第 33卷第 3期
2010年 9月
南京师大学报 (自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY (Natural Science Edition)
Vol 33 No. 3
Sept, 2010

权为可逆阵的加权广义逆矩阵的几个恒等式

袁玩贵, 廖祖华, 邵益新

(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

[摘要] 研究了在权矩阵 M, N 可逆的条件下加权广义逆的几个恒等式.

[关键词] 广义逆, 加权广义逆, 矩阵乘积

[中图分类号] O153 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)03-0022-04

Some Identities of Generalized Inverses of Matrix With Invertible Weights

Yuan Wangui, Liao Zuhua, Shao Yixin

(Science of Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

Abstract In this paper, some identities are established for the weighted generalized inverses of the matrix product, where the weights are invertible.

Key words generalized inverse, weighted generalized inverse, matrix product

随着控制论、信息安全、数据分析、数理统计等学科的发展, 近年来, 作为其研究工具之一的广义逆矩阵理论也飞速发展, 其中加权 Moore-Penrose逆的研究越来越受到人们的重视. 文 [1-7]均研究了矩阵乘积加权广义逆 $(AB)^+_{M,N}$的恒等式或反序律. 而本文是在权矩阵 M, N 为可逆阵的前提下, 将文 [6] 中加权广义逆的几个恒等式加以推广, 从而使其应用更为广泛. 由于条件的减弱, 所以本文在证明方法上与相关文献有所不同.

定义 1 设矩阵 $A \in C^{m\times n}$, M, N 分别为 m, n阶可逆矩阵, 若存在矩阵 X 满足下列四个等式:

$$AXA = A, XAX = X, (MAX)^* = MAX, (NXA)^* = NXA,$$

则称 X 为 A 的关于 M, N 的加权广义逆, 记为 $A^+_{M,N}$.

本文所用的记号与文 [1] 相同, 只是 $r(\cdot)$ 表示矩阵 $\cdot$ 的秩.

下文所提及的矩阵 M, N 分别为 m, n 阶可逆矩阵.

引理 1[1]

$$AB(AB)^{(1)}A = A \Leftrightarrow r(AB) = r(A), \tag{1}$$

$$B(AB)^{(1)}AB = B \Leftrightarrow r(AB) = r(B). \tag{2}$$

引理 2[8] $A^+_{M,N}$存在 $\Leftrightarrow A^*M^*A, AN^{-1}A^*$ 均为 Hermitian, 且

$$r(A^*M^*A) = r(AN^{-1}A^*) = r(A). \tag{3}$$

引理 3[8] 若 $A^+_{M,N}$存在, 则必惟一, 且可表示为

$$A^+_{M,N} = N^{-1}A^*(AN^{-1}A^*)^{(1)}A(A^*M^*A)^{(1)}A^*M^*. \tag{4}$$

(其中 (1) - 逆均可任取)

1 主要结果

定理 1 设 $A \in C^{m\times p}$, $B \in C^{p\times n}$, 若 $(AB)^+_{M,N}$存在, 则

收稿日期: 2009-03-16

基金项目: 江南大学青年基金 (312000-52210699).

通讯联系人: 袁玩贵, 硕士, 讲师, 研究方向: 代数. E-mail: ywg_602@163.com

(1) $(AB)^{+}_{M,N} = (A^{+}AB)^{+}_{I,N}(ABB^{+})^{+}_{M,I}$,

(2) $(AB)^{+}_{M,N} = ((A^{+})^{*}B)^{+}_{I,N}(B^{+}A^{+})^{*}(A(B^{+})^{*})^{+}_{M,I}$.

证明 (1) 令 $K = A^{+}AB$, 由 $(AB)^{+}_{M,N}$存在, 据引理 2知 $(AB)^{*}M^{*}(AB)$, $(AB)N^{-1}(AB)^{*}$ 均为 Hermitian矩阵, 且 $r(AB) = r((AB)^{*}M^{*}(AB)) = r((AB)N^{-1}(AB)^{*})$.

所以, $KN^{-1}K^{*} = A^{+}ABN^{-1}(AB)^{*}(A^{+})^{*}$ 为 Hermitian 又

$r(AB) = r(AA^{+}ABN^{-1}(AA^{+}AB)^{*}) \leqslant r(KN^{-1}K^{*}) \leqslant r(K) \leqslant r(AB)$, 故 $r(K) = r(KN^{-1}K^{*})$.

从而由引理 2知 $K^{+}_{I,N}$存在, 即 $(A^{+}AB)^{+}_{I,N}$存在.

同理可证 $r(S) = r(S^{*}M^{*}S)$, 从而 $(ABB^{+})^{+}_{M,I}$存在.

因为 $r(ABB^{+}) = r(AA^{+}ABB^{+}) \leqslant r(A^{+}AB) = r(A^{+}ABB^{+}B) \leqslant r(ABB^{+})$,

所以 $r(ABB^{+}) = r(A^{+}AB) = r((A^{+}AB)^{*}(A^{+}AB)) = r(B^{*}A^{+}AB) = r(ABB^{+}A^{*})$.

由引理 1易得

$$AB(B^{*}A^{+}AB)^{(1)}B^{*}A^{+}ABB^{+}A^{*}(ABB^{+}A^{*})^{(1)}AB = AB. \tag{5}$$

取 $(A^{+}ABN^{-1}(A^{+}AB)^{*})^{(1)}$ 为 $A^{*}(ABN^{-1}(AB)^{*})^{(1)}A$, 取 $((ABB^{+})^{*}M^{*}ABB^{+})^{(1)}$ 为 $B((AB)^{*}M^{*}AB)^{(1)}B^{*}$, 由 (5) 式得

$$(A^{+}AB)^{+}_{I,N} = N^{-1}(AB)^{*}(ABN^{-1}(AB)^{*})^{(1)}AB(B^{*}A^{+}AB)^{(1)}B^{*}A^{+}A,$$

$$(ABB^{+})^{+}_{M,I} = BB^{+}A^{*}(ABB^{+}A^{*})^{(1)}AB((AB)^{*}M^{*}AB)^{(1)}(AB)^{*}M^{*}.$$

上述两式相乘并由 (4) 式可得定理 1的 (1) 式.

(2) 令 $K = (A^{+})^{*}B$, $S = A(B^{+})^{*}$, 则

$KN^{-1}K^{*} = ((A^{+})^{*}A^{+}AB)N^{-1}((A^{+})^{*}A^{+}AB)^{*} = ((A^{+})^{*}A^{+})ABN^{-1}(AB)^{*}((A^{+})^{*}A^{+})^{*}$,

所以, $KN^{-1}K^{*}$ 为 Hermitian 同理可证 $S^{*}M^{*}S$ 为 Hermitian

另外,

$$AB = AA^{*}(A^{+})^{*}B = AA^{*}K = A(B^{+})^{*}B^{*}B = SB^{*}B. \tag{6}$$

由 (5) 与 (6) 式

$$r(AB) = r(ABN^{-1}(AB)^{*}) = r(AA^{*}KN^{-1}K^{*}AA^{*}) \leqslant$$
$$r(KN^{-1}K^{*}) \leqslant r(K) = r((A^{+})^{*}A^{+}AB) \leqslant r(AB),$$

所以 $r(KN^{-1}K^{*}) = r(K)$. 同理可证 $r(S^{*}M^{*}S) = r(S)$.

根据引理 2知 $K^{+}_{I,N} = ((A^{+})^{*}B)^{+}_{I,N}$与 $S^{+}_{M,I} = (A(B^{+})^{*})^{+}_{M,I}$存在. 由

$$r(A^{+*}B) = r((A^{+*}B)^{*}A^{+*}B) = r(B^{*}A^{+}A^{+*}B),$$
$$r(AB^{+*}) = r(AB^{+*}(AB^{+*})^{*}) = r(AB^{+*}B^{+}A^{*}),$$

根据引理 1得

$$A^{+*}B(B^{*}A^{+}A^{+*}B)^{(1)}B^{*}A^{+}A^{+*}B = B, \quad AB^{+*}B^{+}A^{*}(AB^{+*}B^{+}A^{*})^{(1)}AB^{+*} = AB^{+*}. \tag{7}$$

取 $(A^{+*}BN^{-1}B^{*}A^{+})^{(1)} \equiv ((AA^{*})^{+}ABN^{-1}(AB)^{*}(AA^{*})^{+})^{(1)}$ 为 $AA^{*}(ABN^{-1}(AB)^{*})^{(1)}AA^{*}$,

取 $(B^{+}A^{*}M^{*}A(B^{+})^{*})^{(1)} \equiv ((B^{*}B)^{+}(AB)^{*}M^{*}AB(B^{*}B)^{+})^{(1)}$ 为 $B^{*}B((AB)^{*}M^{*}AB)^{(1)}B^{*}B$,

由引理 3

$$((A^{+})^{*}B)^{+}_{I,N} = N^{-1}(AB)^{*}(ABN^{-1}(AB)^{*})^{(1)}AB(B^{*}A^{+}(A^{+})^{*}B)^{(1)}B^{*}A^{+},$$

$$(A(B^{+})^{*})^{+}_{M,I} = B^{+}A^{*}(A(B^{+})^{*}B^{+}A^{*})^{(1)}AB((AB)^{*}M^{*}AB)^{(1)}(AB)^{*}M^{*},$$

上述两式相乘结合 (7) 式即可证得定理 1的 (2) 式.

定理 2 设 $A \in C^{m\times p}$, $B \in C^{p\times q}$, $C \in C^{q\times n}$, 若 $(ABC)^{+}_{M,N}$存在, 则

(1) $(ABC)^{+}_{M,N} = (A^{+}ABC)^{+}_{I,N}B(ABCC^{+})^{+}_{M,I}$,

(2) $(ABC)^{+}_{M,N} = ((AB)^{+}ABC)^{+}_{I,N}B^{+}(ABC(BC)^{+})^{+}_{M,I}$,

(3) $(ABC)^{+}_{M,N} = ((ABB^{+})^{+}ABC)^{+}_{I,N}B(ABC(B^{+}BC)^{+})^{+}_{M,I}$,

(4) $(ABC)^{+}_{M,N} = (A^{+*}BC)^{+}_{I,N}A^{+*}BC^{+*}(ABC^{+*})^{+}_{M,I}$,

(5) $(ABC)^{+}_{M,N} = ((AB^{+*})^{+}ABC)^{+}_{I,N}B^{*}BB^{*}(ABC(B^{+*}C)^{+})^{+}_{M,I}$,

(6) $(ABC)^{+}_{M,N} = ((AB)^{+*}C)^{+}_{I,N}(AB)^{+*}B^{+}(BC)^{+*}(A(BC)^{+*})^{+}_{M,I}$.

证明　由$(ABC)^{+}_{M,N}$存在及引理2知, $(ABC)^{*}M^{*}(ABC)$与$(ABC)N^{-1}(ABC)^{*}$均为Hermitian,且

$$r((ABC)^{*}M^{*}(ABC))=r((ABC)N^{-1}(ABC)^{*})=r(ABC).$$

(1)令$K=A^{+}ABC$, $S=ABCC^{+}$,则$KN^{-1}K^{*}=A^{+}ABCN^{-1}(ABC)^{*}(A^{+})^{*}$为Hermitian.

另一方面, $r(KN^{-1}K^{*})\leqslant r(K)\leqslant r(ABC)$,又

$$r(KN^{-1}K^{*})\geqslant r(AKN^{-1}K^{*}A^{*})=r(ABCN^{-1}(ABC^{*}))=r(ABC),$$

所以, $r(KN^{-1}K^{*})=r(K)$.根据引理2, $K^{+}_{I,N}=(A^{+}ABC)^{+}_{I,N}$存在.

同理可证$S^{*}M^{*}S$是Hermitian,且$r(S^{*}M^{*}S)=r(S)$,因此$S^{+}_{M,I}=(ABCC^{+})^{+}_{M,I}$存在.

取$(A^{+}ABCN^{-1}(A^{+}ABC)^{*})^{(1)}$为$A^{*}(ABCN^{-1}(ABC)^{*})^{(1)}A$,

取$((ABCC^{+})^{*}M^{*}ABCC^{+})^{(1)}$为$C((ABC)^{*}M^{*}ABC)^{(1)}C^{*}$,

由引理3

$$(ABC)^{+}_{M,N}=N^{-1}(ABC)^{*}(ABCN^{-1}(ABC)^{*})^{(1)}ABC((ABC)^{*}M^{*}ABC)^{(1)}(ABC)^{*}M^{*},\tag{8}$$

$$(A^{+}ABC)^{+}_{I,N}=N^{-1}(ABC)^{*}((ABC)N^{-1}(ABC)^{*})^{(1)}ABC((BC)^{*}A^{+}ABC)^{(1)}(BC)^{*}A^{+}A,\tag{9}$$

$$(ABCC^{+})^{+}_{M,I}=CC^{+}(AB)^{*}(ABCC^{+}(AB)^{*})^{(1)}ABC((ABC)^{*}M^{*}(ABC))^{(1)}(ABC)^{*}M^{*},\tag{10}$$

将(9)与(10)式代入(1)式等号右端并与(8)式相比较知只需证明

$$ABC((BC)^{*}A^{+}ABC)^{(1)}(BC)^{*}A^{+}ABCC^{+}(AB)^{*}(ABCC^{+}(AB)^{*})^{(1)}ABC=ABC.\tag{11}$$

由$r(ABC)=r(AA^{+}ABC)\leqslant r(A^{+}ABC)=((BC)^{*}A^{+}ABC)\leqslant r(ABC)$,知

$$r(ABC)=r((BC)^{*}A^{+}ABC),$$

依据引理1得

$$ABC((BC)^{*}A^{+}ABC)^{(1)}(BC)^{*}A^{+}ABC=ABC.\tag{12}$$

同理

$$ABCC^{+}(AB)^{*}(ABCC^{+}(AB)^{*})^{(1)}ABC=ABC.\tag{13}$$

由(12)与(13)式可直接证得(11)式成立.因此定理2的(1)式成立.

(2)令$K=(AB)^{+}ABC$, $S=ABC(BC)^{+}$.类似于定理2的(1)式的证明,可证得$KN^{-1}K^{*}$, $S^{*}M^{*}S$为Hermitian而$ABC=AB(AB)^{+}ABC=ABK$,故有

$$r(ABC)=r((ABC)N^{-1}(ABC)^{*})=r(ABKN^{-1}K^{*}(AB)^{*})\leqslant r(KN^{-1}K^{*})\leqslant r(K)\leqslant r(ABC),$$

即有$r(KN^{-1}K^{*})=r(K)$.同理可证$r(S^{*}M^{*}S)=r(S)$.

所以由引理2知, $K^{+}_{I,N}=((AB)^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$S^{+}_{M,I}=(ABC(BC)^{+})^{+}_{M,I}$均存在.

仿照(1)的证明方法,由(4)式得到$((AB)^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$(ABC(BC)^{+})^{+}_{M,I}$的表达式.

取$((AB)^{+}ABCN^{-1}((AB)^{+}ABC)^{*})^{(1)}$为$(AB)^{*}(ABCN^{-1}(ABC)^{*})^{(1)}AB$,

取$((ABC(BC)^{+})^{*}M^{*}ABC(BC)^{+})^{(1)}$为$BC((ABC)^{*}M^{*}ABC)^{(1)}(BC)^{*}$.

化简$((AB)^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$(ABC(BC)^{+})^{+}_{M,I}$的表达式,并代入定理2的(2)式右边即可证之.

(3)令$K=(ABB^{+})^{+}ABC$, $S=ABC(B^{+}BC)^{+}$,仿照定理2的(1)的证明,可类似证得$KN^{-1}K^{*}$与$S^{*}M^{*}S$都是Hermitian.注意到$ABC=ABB^{+}(ABB^{+})^{+}ABB^{+}BC=ABB^{+}K$,我们有

$$r(ABC)=r(ABCN^{-1}(ABC)^{*})\leqslant r(KN^{-1}K^{*})\leqslant r(K)\leqslant r(ABC).$$

即$r(KN^{-1}K^{*})=r(K)$.

又$ABC=ABB^{+}BC=ABB^{+}BC(B^{+}BC)^{+}B^{+}BC=SB^{+}BC$,同理可证$r(S^{*}M^{*}S)=r(S)$.

因此,根据引理2知, $K^{+}_{I,N}=((ABB^{+})^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$S^{+}_{M,I}=(ABC(B^{+}BC)^{+})^{+}_{M,I}$均存在.

由(4)式得到$((ABB^{+})^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$(ABC(B^{+}BC)^{+})^{+}_{M,I}$的表达式,然后分别取

$$((ABB^{+})^{+}ABCN^{-1}((ABB^{+})^{+}ABC)^{*})^{(1)}\text{为}(ABB^{+})^{*}(ABCN^{-1}(ABC)^{*})^{(1)}ABB^{+},$$

$$((ABC(B^{+}BC)^{+})^{*}M^{*}(ABC(B^{+}BC)^{+}))^{(1)}\text{为}B^{+}BC((ABC)^{*}M^{*}(ABC))^{(1)}(B^{+}BC)^{*},$$

化简$((ABB^{+})^{+}ABC)^{+}_{I,N}$与$(ABC(B^{+}BC)^{+})^{+}_{M,I}$的表达式,并代入(3)式右端,仿照(1)式证明即可证明定理2的(3)式成立.

(4)～(6)式的证明方法与定理2的(1)、(2)、(3)式证明方法类似.

(4)式的证明过程中,只需取

$$(A^{+*}BCN^{-1}(A^{+*}BC)^*)^{(1)} \text{为} AA^*(ABCN^{-1}(ABC)^*)^{(1)}AA^*,$$
$$((ABC^{+*})^*M^*ABC^{+*})^{(1)} \text{为} CC^*((ABC)^*M^*ABC)^{(1)}CC^*.$$

(5) 式证明过程中, 只需取

$$(((AB^{+*})^+ABCN^{-1}((AB^{+*})^+AB)^*)^{(1)} \text{为} B^+A^*(ABCN^{-1}(ABC)^*)^{(1)}AB^{+*},$$
$$((ABC(B^{+*}C)^+)^*M^*ABC(B^{+*}C)^+)^{(1)} \text{为} B^{+*}C((ABC)^*M^*ABC)^{(1)}C^*B^+.$$

(6) 式证明过程中, 只需取

$$(((AB)^{+*}CN^{-1}((AB)^{+*}C)^*)^{(1)} \text{为} AB(AB)^*(ABCN^{-1}(ABC)^*)^{(1)}AB(AB)^*,$$
$$((A(BC)^{+*})^*M^*A(BC)^{+*})^{(1)} \text{为} (BC)^*(BC)((ABC)^*M^*A(BC)^+)^{(1)}(BC)^*(BC).$$

(4) ~ (6) 式的详细证明不再赘述.

文 [6] 中有关加权广义逆的恒等式均是本文的主要结论 (定理 1、2) 的特例.

致谢　审稿人提出了许多宝贵意见, 特别是定理的证明方法, 使本文质量得到很大地提高, 在此, 对审稿人表示衷心感谢和敬佩.

[参考文献]

[1] Adi Ben-Israel, Thomas N E Greville. Generalized Inverses Theory and Applications[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2003.

[2] 陈永林. 广义逆矩阵的理论与方法[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2005.

[3] Wang Guorong, Zheng Bing. The reverse order law for the generalized inverse $A^2_{T,S}$[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 157(2): 295-305.

[4] Medhat A Rakha. On the Moore-penrose generalized inverse matrix[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 158(1): 185-200.

[5] Sun Wenyu, Wei Yimin. Triple reverse-order law for weighted generalized inverses[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 125(2/3): 221-229.

[6] Tian Yongge, Cheng Shizhen. Some identities for moore-penrose inverses of matrix products[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2004, 52(6): 405-420.

[7] Campbell S L, Meyer Jr C D. Generalized inverses of linear transformations, corrected reprint of the 1979 original[M]. New York: Dover Publications Inc, 1991.

[8] Yuan Wangui, Liao Zuhua. The generalized moore-penrose inverses of matrices over rings[C] // The Proceedings of the Seventh International Conference on Matrix Theory and Applications. Liverpool: World Academic Union, 2006: 289-292.

[责任编辑: 丁　蓉]