有关树的最大特征值的上界

徐新萍[1], 张丽丽[2]

(1. 江苏教育学院数学与信息技术学院, 江苏 南京 210013)
(2. 河海大学计算机与信息学院, 江苏 南京 210098)

[摘要] 设 T_n 为 n 个顶点的树的集合. Hofmeister已经对 T_n 的最大特征值进行了排序, 给出了第 1至第 5位的序及它们所对应的树, 常安给出第 6至第 8位的序, 梁修东确定了第 9位的值及对应的树. 本文主要讨论了树的最大特征值的上界, 并确定了第 10位的值及对应的树.

[关键词] 树, 特征值, 上界
[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)04-0001-05

The Upper Bound of the Largest Eigenvalue on the Trees

Xu Xinping[1], Zhang Lili[2]

(1. School of Mathematics and Information Technology, Jiangsu Institute of Education, Nanjing 210013, China)
(2. College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract Let T_n be a set of trees with n vertices. Hofmeister has determined the first to the fifth values of the largest eigenvalue of trees in T_n and the corresponding trees for these values. Chang An has determined the sixth to the eighth values of the largest eigenvalue in T_n. Liang Xiudong has determined the ninth value of the largest eigenvalue in T_n and given the corresponding tree. This paper studied the upper bound of the largest eigenvalue of trees, and determined the tenth value of the largest eigenvalue in T_n and present the corresponding tree.

Key words: trees, eigenvalue, upper bound

设 G 是有 n 个顶点 $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ 的简单连通图[1], G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是 $(0,1)$ 矩阵, 其中 $a_{ij} = 1$ 当且仅当 v_i 与 v_j 相邻, G 的特征多项式 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 记为 $\chi(G, \lambda)$[2]. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 所以它的特征值全是实数. 我们总假定它们按不升的次序排列, 即 $\lambda_1(G) \geqslant \lambda_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(G)$.

定理 1[2] G 是有 n 个顶点的简单图, 令 $\chi(G, \lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$, 则 $(1)\ c_1 = 0$; $(2)\ -c_2$ 等于图 G 的边数; $(3)\ -c_3$ 等于图 G 中三角形个数的两倍.

定理 2[2] G 是有 n 个顶点 m 条边的图, 则 $\lambda_1 \leqslant \left(\dfrac{2m(n-1)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

定理 3[2] 如果 G 是树, 则 $\lambda_i(G) = -\lambda_{n-i+1}(G)$, $i = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

设 T_n 为 n 个顶点的树的集合, 关于 T_n 的特征值的排序到目前为止已经得到许多结论[2-8], 对于 n 个顶点的树的最大特征值的上界我们列出有关前九位的结果.

定理 4[3] 设 $T \in T_n$, 则 $\lambda_1(T) \leqslant \sqrt{n-1}$, 当且仅当 $T \cong S_n^1$ 时等号成立.

定理 5[3] 设 $T \in T_n \setminus \{S_n^1\}$, 且 $n \geqslant 4$, 则

$$\lambda_1(T) \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}\left(n-1+\sqrt{n^2-6n+13}\right)},$$ 当且仅当 $T \cong S_n^2$ 时等号成立.

收稿日期: 2010-09-14
基金项目: 国家自然科学基金(61003224)、中央高校基本科研业务费专项资金(2009B21414).
通讯联系人: 徐新萍, 博士, 教授, 研究方向: 图论与组合. E-mail: xxp3268@sina.com

定理6[3]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2\}$,且 $n\geqslant 4$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(n-1+\sqrt{n^2-10n+33})}$,当且仅当 $T\cong S_n^3$时等号成立.

定理7[3]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3\}$,且 $n\geqslant 5$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(n-2+\sqrt{n^2-8n+24})}$,当且仅当 $T\cong S_n^4$时等号成立.

定理8[3]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4\}$,且 $n\geqslant 6$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(n-1+\sqrt{n^2-10n+29})}$,当且仅当 $T\cong S_n^5$或 $T\cong S_8^5$时等号成立.

定理9[5]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4,S_n^5\}$,且 $n\geqslant 11$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(n-1+\sqrt{n^2-14n+61})}$,当且仅当 $T\cong S_n^6$时等号成立.

定理10[5]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4,S_n^5,S_n^6\}$,且 $n\geqslant 11$,则 $\lambda_1(T)\leqslant\gamma_1$,当且仅当 $T\cong S_n^7$时等号成立,其中 γ_1为 $\lambda^6-(n-1)\lambda^4+(3n-13)\lambda^2-2(n-6)=0$最大根.

定理11[5]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4,S_n^5,S_n^6,S_n^7\}$,且 $n\geqslant 11$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}(n-3+\sqrt{n^2-10n+37})}$,当且仅当 $T\cong S_n^8$时等号成立.

定理12[7]　设 $T\in T_n\setminus\{S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4,S_n^5,S_n^6,S_n^7,S_n^8\}$,当 $n\geqslant 11$时,$\lambda_1(T)\leqslant\gamma_2$,当且仅当 $T\cong T_{1,n-5,1}^1$时等号成立,其中 γ_2为 $\lambda^6-(n-1)\lambda^4+(3n-13)\lambda^2-(n-5)=0$的最大根.

$S_n^1,S_n^2,S_n^3,S_n^4,S_n^5(S_8^5),S_n^6,S_n^7,S_n^8,S_n^9(T_{1,n-5,1}^1)$如图1所示.

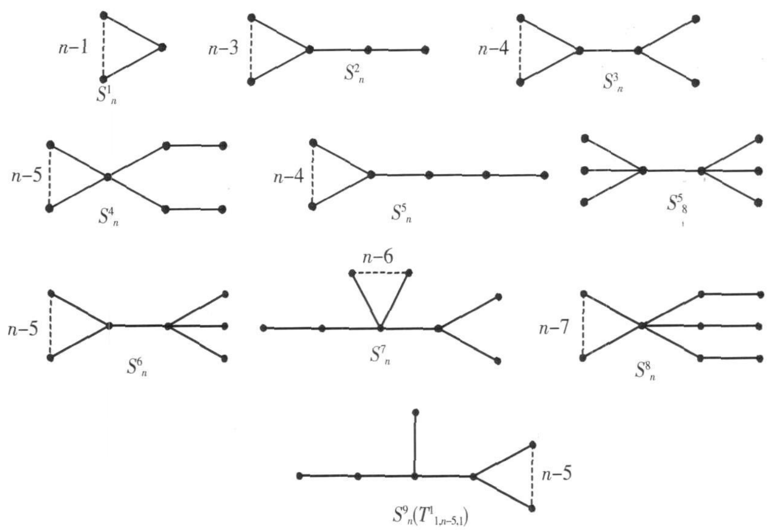

图1　T_n中最大特征值前9位的树

Fig.1　The former nine trees of the largest eigenvalue on the T_n

从以上结论中我们知道了按树的最大特征值的排序中前9位的值及对应的树.

设 $T_n^i=\{T\mid T\in T_n$,且 T中恰有 i条非悬挂边$\}$,则 $T_n=\bigcup_{i=0}^{n-3}T_n^i$. 显然 T_n^0、T_n^{n-3}分别只包含星树 S_n^1与路 P_n,T_n^1与 T_n^2中的树具有如图2所示的形状,其中 $i+j=n-2$,$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-3$;$r+s+t=n-3$,$1\leqslant r\leqslant s$,$t\geqslant 0$

1　主要结论

定理A　设 $T\in T_n^2\setminus\{S_n^4,S_n^5,S_n^7,S_n^9\}$,则

$\lambda_1(T)\leqslant\sqrt{\frac{n-1+\sqrt{n^2-14n+53}}{2}}$,$n\geqslant 10$,当且仅当 $T\cong T_{2,n-5,0}^2$时等号成立.

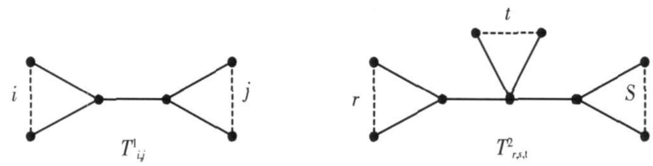

图 2 T^1_n 与 T^2_n 中的树类

Fig.2 The trees on the T^1_n and T^2_n

定理 B 设 $T \in T_n^2 \setminus \{S_n^4, S_n^5, S_n^7, S_n^9, T^2_{2,n-5,0}\}$, 则 $\lambda_1(T) \leqslant \gamma_1$, $n \geqslant 10$, 当且仅当 $T \cong T^2_{1,3,n-7}$ 时等号成立, 其中 γ_1 为 $g(\lambda) = \lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (4n-21)\lambda^2 - 3(n-7)$ 的最大根.

2 定理证明

因为图的特征多项式的根是实数, 因此约定本文讨论的多项式 $f(x)$ 都是首 1多项式, 且它的根是实数. 定理证明将用到以下引理.

引理 1[8] 设 G 是由 G_1, G_2 连结 u, v 而成, 其中 $u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$, 则

$$\chi(G, \lambda) = \chi(G_1, \lambda)\chi(G_2, \lambda) - \chi(G_1 \setminus u, \lambda)\chi(G_2 \setminus v, \lambda).$$

引理 2[8] 设 v 是图 G 的度为 1的点, u 是 v 的邻点, 则

$$\chi(G, \lambda) = \lambda\chi(G \setminus u, \lambda) - \chi(G \setminus \{u, v\}, \lambda).$$

引理 3[9] 设多项式 $f(x)$、$g(x)$ 都是首 1根是实数的多项式, 且 $\partial(f) \geqslant \partial(g)$. 若 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, 且 $r(x) = 0$ 或 $\partial(g) > \partial(r)$, 其中 $q(x)$ 也是首 1多项式. 若 $\lambda_1(g) \geqslant \lambda_1(q)$, 则

(1) 当 $r(x) = 0$ 时, $\lambda_1(f) = \lambda_1(g)$; (2) 当 $x \geqslant \lambda_1(g)$ 时, $r(x) > 0$, 则 $\lambda_1(r) < \lambda_1(g)$.

定理 A 的证明 由引理 1、2, 树 $T^2_{2,n-5,0}$ 的特征多项式为

$$\chi(T^2_{2,n-5,0}, \lambda) = \lambda^{n-4}[\lambda^4 - (n-1)\lambda^2 + (3n-13)].$$

由求根公式, 易得其最大根为 $\sqrt{\dfrac{n-1+\sqrt{n^2-14n+53}}{2}}$, 定理 A 得证.

定理 B 的证明 由引理 1、2, 树 $T^2_{r,s,t}$ 的特征多项式为

$$\chi(T^2_{r,s,t}, \lambda) = \lambda^{n-6}[\lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (rs + rt + st + r + s)\lambda^2 - rst].$$

下面分两种情形进行讨论.

情形 1: $r = 1$, $s \geqslant 4$, 且 $s \neq n-4$, $n-5$.

注意到 $r + s + t = n - 3$, $1 \leqslant r \leqslant s$, $t \geqslant 0$, 则 $t \geqslant 2$, $n \geqslant t + 8$.

因为 $T^2_{1,3,n-7}$ 和 $T^2_{1,s,t}$ 的特征多项式分别为

$$\chi(T^2_{1,3,n-7}, \lambda) = \lambda^{n-6}[\lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (4n-21)\lambda^2 - 3(n-7)],$$

$$\chi(T^2_{1,s,t}, \lambda) = \lambda^{n-6}[\lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (2s + t + st + 1)\lambda^2 - st],$$

令

$$f_1(\lambda) = \lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (2s + t + st + 1)\lambda^2 - st,$$

又

$$g(\lambda) = \lambda^6 - (n-1)\lambda^4 + (4n-21)\lambda^2 - 3(n-7),$$

则

$$f_1(\lambda) = g(\lambda) + (s + st - 3n + 18)\lambda^2 - st + 3(n-7) = g(\lambda) + r_1(\lambda),$$

其中 $r_1(\lambda) = (s + st - 3n + 18)\lambda^2 - st + 3(n-7)$, 而 $r'_1(\lambda) = 2(st + s - 3n + 18)\lambda$.

因为

$$st + s - 3n + 18 = n - 4 - t + (n - 4 - t)t - 3n + 18 = (t-2)n - t^2 - 5t + 14 = (t-2)n - (t-2)(t+7) = (t-2)(n-t-7),$$

又因为 $n \geqslant t + 8 > t + 7$, 所以当 $t \geqslant 3$ 时, $st + s - 3n + 18 > 0$, 因此当 $\lambda > 0$ 时, $r'_1(\lambda) > 0$, 故 $r_1(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的.

又因为 $r_1(1) = (s + st - 3n + 18) - st + 3(n-7) = s - 3 > 0$(因为 $s \geqslant 4$), 因而当 $\lambda \geqslant 1$ 时, 有 $r_1(\lambda)$

>0. 当 $t=2$时, $s=n-4-t=n-6$, 有 $r_1(\lambda)=-2(n-6)+3(n-7)=n-9>0$(因为 $n\geqslant t+8=10>9$).

因此, 当 $\lambda\geqslant\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})(>1)$, $n\geqslant 10$,有 $r_1(\lambda)>0$.而 $f_1(\lambda)=g(\lambda)+r_1(\lambda)$, 因此由引理 3有, $\lambda_1(T^2_{1,s,t})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})=\gamma_1$.

情形 2: $r\geqslant 2$, $s\geqslant 2$, 注意到 $r+s+t=n-3$, 则 $n\geqslant t+7$.

令 $f_2(\lambda)=\lambda^6-(n-1)\lambda^4+(rs+rt+st+r+s)\lambda^2-rst$, 则

$$f_2(\lambda)=g(\lambda)+(rs+rt+st+r+s-4n+21)\lambda^2+3(n-7)-rst=g(\lambda)+r_2(\lambda),$$
$$r'_2(\lambda)=2(rs+rt+st+r+s-4n+21)\lambda.$$

因为

$$rs+rt+st+r+s-4n+21=rs+(n-3-t)t+n-3-t-4n+21=$$
$$rs+(t-3)n-t^2-4t+18=rs-3+(t-3)(n-t-7).\qquad(*)$$

情形 2.1: 当 $t\geqslant 3$时, 有 $rs+rt+st+r+s-4n+21\geqslant rs-3>0$(因为 $r\geqslant 2$, $s\geqslant 2$且 $n\geqslant t+7$). 因此当 $\lambda>0$时, $r'_2(\lambda)>0$,所以 $r_2(\lambda)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的.

注意到 $T^2_{r,s,t}$含 S^1_{t+1}星树, 由引理 3, 有 $\lambda_1(T^2_{r,s,t})>\lambda_1(S^1_{t+1})=\sqrt{t}$.而

$$r_2(\sqrt{t})=[rs-3+(t-3)+(n-t-7)]t+3(n-7)-rst=[t(t-3)+3](n-t-7)\geqslant 0,$$

所以对于任意的 $\lambda\geqslant\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})(>\sqrt{t})$, 有 $r_2(\lambda)>0$.因此由引理 3,有

$$\lambda_1(T^2_{r,s,t})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7}).$$

情形 2.2: 当 $t=0$时, 由$(*)$有

$$rs+rt+st+r+s-4n+21=rs-3n+18=s(n-3-s)-3n+18$$
$$=(s-3)n-(s-3)(s+6)=(s-3)(n-s-6).$$

因为 $s\geqslant r=n-3-s$,所以 $s\geqslant\dfrac{n-3}{2}>3(n\geqslant 10)$.

1) 当 $r\geqslant 3$时, $n-s-6\geqslant 0$,故这时有 $r'_2(\lambda)>0$, 即 $r_2(\lambda)$在$(0,+\infty)$上是递增函数.

又 $r_2(1)=rs+n-3-4n+21+3(n-7)=rs-3>0$, 则对于任意的 $\lambda\geqslant\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})(>1)$, $r_2(\lambda)>0$,因此由引理 3,有

$$\lambda_1(T^2_{r,s,0})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})=\gamma_1.$$

2) 当 $r=2$时, 有 $s=n-5$,此时 $T^2_{2,n-5,0}$的特征多项式为 $\chi(T^2_{2,n-5,0},\lambda)=\lambda^{n-4}[\lambda^4-(n-1)\lambda^2+(3n-13)]$.

令 $h(\lambda)=\lambda^4-(n-1)\lambda^2+(3n-13)$, 则

$$g(\lambda)=\lambda^2h(\lambda)+(n-8)\lambda^2-3(n-7)=\lambda^2h(\lambda)+r_3(\lambda),\ r'_3(\lambda)=2(n-8)\lambda.$$

当 $\lambda>0$时, $r'_3(\lambda)>0$,所以 $r_3(\lambda)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的.

又因为 $T^2_{2,n-5,0}$中含有星树 S^1_{n-4}, 由引理 3, 有 $\lambda_1(T^2_{2,n-5,0})>\lambda_1(S^1_{n-4})=\sqrt{n-5}$.

而 $r_3(\sqrt{n-5})=(n-8)(n-5)-3(n-7)=n^2-16n+61=(n-8)^2-3>0\ (n\geqslant 10)$,

所以对以上任意的 $\lambda\geqslant\lambda_1(T^2_{2,n-5,0})(>\sqrt{n-5})(n\geqslant 10)$, 有 $r_3(\lambda)>0$, 因此由引理 3,有

$$\lambda_1(T^2_{2,n-5,0})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7}).$$

情形 2.3: 当 $t=1$时, 由$(*)$有

$rs+rt+st+r+s-4n+21=rs-2n+13=(n-4-s)s-2n+13=(s-2)n-s^2-4s+13=(s-2)(n-s-6)+1>0$(因为 $s\geqslant 2$, $n\geqslant s+6$).

因此 $r'_2(\lambda)>0$, 所以 $r_2(\lambda)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的.而

$r_2(1)=[rs+2(n-4)-4n+21]+3(n-7)-rs=n-8>0$(因为 $n\geqslant 10$),

所以对于任意的 $\lambda\geqslant\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})(>1)$,有 $r_2(\lambda)>r_2(1)>0$,因此由引理 3,有

$$\lambda_1(T^2_{r,s,1})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7}).$$

情形 2.4: 当 $t=2$时, 由$(*)$有

$$rs+rt+st+r+s-4n+21=rs+3(n-5)-4n+21=(n-5-s)s-n+6=$$

$$(s-1)n-s^2-5s+6=(s-1)(n-s-6)>0,$$

因为 $s\geqslant 2$, $n=s+r+5\geqslant s+7>s+6$,所以当 $\lambda>0$时, $r'_2(\lambda)>0$, 即 $r_2(\lambda)$在$(0,+\infty)$上是单调递增的. 又

$$r_2(\sqrt{2})=2[rs+3(n-5)-4n+21]+3(n-7)-2rs=n-9>0(因为\ n\geqslant 10).$$

所以对于任意 $\lambda>\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})>\lambda_1(S^1_3)=\sqrt{2}$, 有 $r_2(\lambda)>0$, 因此由引理 3, 有

$$\lambda_1(T^2_{r,s,2})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7}).$$

综合以上情形, 有 $\lambda_1(T^2_{r,s,t})<\lambda_1(T^2_{1,3,n-7})=\gamma_1$.

至此定理 B得证.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications[M]. New York: London and Elservier, 1976.

[2] Norman Biggs. Algebraic Graph Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[3] Hofmeister M. On the two largest eigenvalues of trees[J]. Linear Algebra and its Applications, 1997, 260: 43-59.

[4] 李乔, 冯克勤. 论图的最大特征根[J]. 应用数学学报, 1979, 4(2): 167-175.

[5] An Chang, Huang Qiongxiang. Ordering trees by their largest eigenvalues[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 370: 175-184.

[6] Shao J Y. Bounds on the K th eignevalue of trees and forests[J]. Linear Algebra and its Applications, 1991, 149: 19-34.

[7] 梁修东. 树的最大特征值的序[J]. 江南大学学报: 自然科学版, 2007, 12(5): 627-630.

[8] Cvetkovic D, Doob M, Sachs H. Spectra of Graph-Theory and Application[M]. New York: Academic Press, 1980.

[9] An Chang. On the largest eigenvalue of a tree with perfect matchings[J]. Discrete Mathematics, 2003, 269: 45-63.

[责任编辑: 丁　蓉]