求解主子阵约束下矩阵方程的算法

农利伟[1], 陈浦胤[2]

(1. 南宁地区教育学院数学系, 广西 南宁 530001)
(2 上海交通大学数学系, 上海 200240)

[摘要] 利用文[1]中提出的求解一般有限维算子方程的抽象算法和理论, 获得求解带主子阵约束下矩阵方程 $AXB = C$ 反对称最小二乘解及最佳逼近解的一个迭代算法, 进行了理论分析. 并给出数值例子说明算法的计算效果.

[关键词] 矩阵方程, 迭代算法, 最小二乘解, 最佳逼近解
[中图分类号] TP391 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2010)04-0019-04

An Iterative Algorithm for Solving Matrix Equations With Submatrix Constraints

Nong Liwei[1], Chen Puyin[2]

(1. Department of Mathematics, Nanning Prefecture's Educational College, Nanning 530001, China)
(2. Department of Methematics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: By use of the abstract algorithm and theoretical analysis in [1] for solving a finite-dimensional operator equation, this paper proposes an iterative algorithms for getting the skew-symmetric least-squares solution and the best approximation solution of the matrix equation $AXB = C$ with a submatrix constraint. The convergence analysis of the algorithm is presented and several numerical examples are reported to illustrate its computational performance.

Key words: iterative algorithms, matrix equations, least-squares solutions, the best approximation

约束矩阵方程问题是指在满足一定约束条件下的矩阵集合中求矩阵方程的解, 它在结构设计、振动分析、自动控制等领域有着广泛的实用背景. 关于这方面的研究成果参见文献[2-6]及这些文献所附参考文献. 求解这类问题有两种典型方法, 一个是基于矩阵奇异值分解的直接法[2-4], 另一个是迭代法[5,6]. 一般来说, 迭代法更适合求解大规模问题数值解. 在文献[5, 6]等的基础上, 作者给出了求解有限维算子方程的抽象算法并建立系统收敛性结果[1]. 本文旨在将该抽象算法应用于主子阵约束下的矩阵方程 $AXB = C$ 的求解. 这个问题可视为文[2]中所研究问题的推广, 它最初来源于子系统的扩张, 本质上是一个约束矩阵方程问题, 只是其约束矩阵集合中的矩阵具有同一事先给定的子矩阵. 记 $\|\cdot\|$ 为矩阵的 Frobenius 范数, 本文欲研究的问题具体如下:

问题 1 给定 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times s}$, $C \in \mathbf{R}^{m\times s}$, $X_0 \in \boldsymbol{AS}\mathbf{R}^{k\times k}$, 求 $\hat{X} \in S$ 使得

$$\|A\hat{X}B - C\| = \min,$$

其中 $S = \{X \mid X \in \boldsymbol{AS}\mathbf{R}^{n\times n}, X([1:k]) = X_0\}$, 这里 $\boldsymbol{AS}\mathbf{R}^{n\times n}$ 表示 n 阶实反对称矩阵的集合, $X([1:k])$ 为矩阵 X 的 k 阶顺序主子阵.

问题 2 给定 $X^* \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 求 $X_{LS} \in S_E$ 使得

$$\|X_{LS} - X^*\| = \min_{\hat{X}\in S_E}\|\hat{X} - X^*\|,$$

其中 S_E 为问题 1的解集合.

收稿日期: 2010-09-14
基金项目: 国家自然科学基金(10771138).
通讯联系人: 农利伟, 讲师, 研究方向: 数值代数. E-mail: nlw616@126.com

1　求解约束矩阵方程问题的新算法

为后文需要,先回顾文[1]中所提算法和有关理论分析结果. 任给两个有限维向量空间 $\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{H}_2$,它们的内积和诱导范数分别记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ 和 $\|\cdot\|_i=\langle\cdot,\cdot\rangle_i^{1/2}$, $1\leqslant i\leqslant 2$,设 $T\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H}_1,\boldsymbol{H}_2)$ 是 $\boldsymbol{H}_1$ 到 $\boldsymbol{H}_2$ 的线性算子. 欲求解算子方程

$$T(x)=f. \tag{1}$$

先按常规方式定义 T 的共轭算子 $T^*\in\mathscr{L}(\boldsymbol{H}_2,\boldsymbol{H}_1)$ 为

$$\langle T(y),z\rangle_2=\langle y,T^*(z)\rangle_1,\quad \forall y\in\boldsymbol{H}_1,\quad z\in\boldsymbol{H}_2, \tag{2}$$

则有求解方程(1)的如下迭代法:

算法 1

Step 1　任取 $x_1\in\boldsymbol{H}_1$,计算

$$R_1=f-T(x_1),\quad P_1=Q_1=T^*(R_1),$$

令 $k=1$.

Step 2　如果 $R_k=0$,或 $R_k\neq 0$而 $Q_k=0$则停机;否则,计算

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k Q_k,$$
$$\alpha_k=\frac{\|R_k\|_2^2}{\|Q_k\|_1^2},$$
$$R_{k+1}=f-T(x_{k+1}),$$
$$P_{k+1}=T^*(R_{k+1}),$$
$$Q_{k+1}=P_{k+1}+\beta_k Q_k,$$
$$\beta_k=-\frac{\langle P_{k+1},Q_k\rangle_1}{\|Q_k\|_1^2},$$

令 $k=k+1$,转 Step 2.

对以上算法,成立如下收敛性结果[1]:

定理 1　如果不考虑舍入误差,算法 1在有限步终止,并获得相容问题(1)的精确解.

对于相应于问题(1)的最小二乘问题:

$$\min_{x\in\boldsymbol{H}_1}\|T(x)-f\|_2^2 \tag{3}$$

可通过算法 1求解法方程

$$(T^*T)(x)=T^*(f) \tag{4}$$

而得问题(3)之解. 且成立以下结果:

定理 2　若取初值 $x_1=T^*(x_0)$,其中 x_0 为 $\boldsymbol{H}_2$ 中任一元素,例如取 $x_0=0$,则用算法 1求解问题(4)经有限步迭代可获得问题(3)的惟一的极小范数解.

2　问题 1与问题 2的迭代算法

首先给出以下引理:

引理 1　给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times s}$, $\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{m\times s}$, $\boldsymbol{X}_0\in\boldsymbol{ASR}^{k\times k}$,设 $\boldsymbol{S}_1=\{\boldsymbol{Y}\mid\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{ASR}^{n\times n},\ \boldsymbol{Y}([1:k])=\boldsymbol{0}\}$,则问题 1的通解为 $\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$. 其中 $\boldsymbol{Y}$为问题 $\min\limits_{\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}_1}\|\boldsymbol{AYB}-\boldsymbol{C}\|$ 的通解,而

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{AXB},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{ASR}^{n\times n}. \tag{5}$$

证明　事实上,若 $\boldsymbol{X}$ 如(5)所示,易见 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}_1$,又 $\boldsymbol{S}_1$ 是一个子空间,故 $\boldsymbol{S}$ 是一个线性流形,且有

$$\min_{\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{S}}\|\boldsymbol{AXB}-\boldsymbol{C}\|=\min_{\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}_1}\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\|=\min_{\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}_1}\|\boldsymbol{AYB}-\boldsymbol{C}\|,$$

故引理成立.

由引理 1知,求解问题 1等价于求解问题

$$\min_{\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}_1}\|\boldsymbol{AYB}-\boldsymbol{C}\|. \tag{6}$$

下面根据前一节的抽象算法来获得求解(6)的迭代算法.用符号$\langle\cdot,\cdot\rangle_i$, $i=1,2$表示常规的定义在相应矩阵空间上的自然内积;为行文方便,简记为$\langle\cdot,\cdot\rangle$,而相应的诱导范数恰为前面给出矩阵的 Froubenius 范数$\|\cdot\|$.用符号$X^{\#}$表示将n阶矩阵X的k阶主子阵用零矩阵代换后得到的n阶矩阵.

取

$$H_1=\{Y\in ASR^{n\times n}\mid Y([1:k])=0\},\quad H_2=R^{m\times s},\quad T(Y)=AYB,\ \forall Y\in H_1.$$

对$\forall W\in H_2$,由于

$$\langle Y,T^*(W)\rangle_1=\langle T(Y),W\rangle_2=\langle AYB,W\rangle=\langle Y,A^TWB^T\rangle=$$
$$\langle Y,(A^TWB^T-BW^TA)/2\rangle=\langle Y,(A^TWB^T-BW^TA)^{\#}/2\rangle_1,$$

所以

$$T^*(W)=(A^TWB^T-BW^TA)^{\#}/2,\quad \forall W\in H_2.$$

由$T^*(T(Y))=T^*(C)$则得问题(6)的法方程为

$$(A^TAYBB^T+BB^TYA^TA)^{\#}=(A^TCB^T-BC^TA)^{\#}.\tag{7}$$

再对(7)用算法 1求反对称解,此时取

$$H_1=\{Y\in ASR^{n\times n}\mid Y([1:k])=0\},\quad H_2=R^{n\times n},$$

以及

$$T(Y)=(A^TAYBB^T+BB^TYA^TA)^{\#},\quad \forall Y\in H_1.\tag{8}$$

对$\forall W\in H_2$,由于

$$\langle Y,T^*(W)\rangle_1=\langle T(Y),W\rangle_2=\langle(A^TAYBB^T+BB^TYA^TA)^{\#},W\rangle=$$
$$\langle Y,(A^TA(W-W^T)BB^T+BB^T(W-W^T)A^TA)^{\#}/2\rangle_1,$$

所以

$$T^*(W)=(A^TA(W-W^T)BB^T+BB^T(W-W^T)A^TA)^{\#}/2\tag{9}$$

将(8)、(9)代入算法 1,我们即可获得求解问题(6)的迭代算法.由定理 1和定理 2知道,算法 1经有限步迭代可获得(6)之解,从而获得问题 1的解.

下面考虑问题 2的解.对问题 2中给定的$X^*\in R^{n\times n}$,若$X\in S_E$,则

$$\|X-X^*\|^2=\|X-(X^*-X^{*T})/2\|^2+\|(X^*+X^{*T})/2\|^2=$$
$$\|(X+X^{\#})-(X^*-X^{*T})/2\|^2+\|(X^*+X^{*T})/2\|^2.$$

故问题 2中求$X_{LS}\in S_E$,使得

$$\|X_{LS}-X^*\|=\min_{X\in S_E}\|X-X^*\|,$$

等价于求$Z\in S_1$使

$$\min_{Z\in S_1}\|Z-(X^*-X^{*T})^{\#}/2\|^2.$$

记$X=(X^*-X^{*T})^{\#}/2$,因为法方程总是相容的,即问题 1的解集S_E非空,从而问题 2等价于求下列相容矩阵方程:

$$(A^TAYBB^T+BB^TYA^TA)^{\#}=C^{\#},\tag{10}$$

其中$Y=Y-X$, $C=(A^TCB^T-BC^TA)-(A^TAXBB^T+BB^TXA^TA)$.对(10)求极小范数反对称解,此时取$H_1=\{Y\in ASR^{n\times n}\mid Y([1:k])=0\}$, $H_2=R^{n\times n}$,

$$T(Y)=(A^TAYBB^T+BB^TYA^TA)^{\#},\quad \forall Y\in H_1,\tag{11}$$
$$T^*(W)=(A^TA(W-W^T)BB^T+BB^T(W-W^T)A^TA)^{\#}/2\tag{12}$$

将(11)、(12)代入算法 1,我们获得求解问题 2的迭代算法,整理归纳为如下的算法 2:

算法 2

Step 1 任取$Y_1\in H_1$,比如$Y_1=0$,计算

$$R_1=(C^{\#}-(A^TAY_1BB^T+BB^TY_1A^TA))^{\#},$$
$$P_1=Q_1=(A^TA(R_1-R_1^T)BB^T+BB^T(R_1-R_1^T)A^TA)^{\#}/2,$$

令$k:=1$.

Step 2 如果$R_k=0$,或$R_k\neq 0$而$Q_k=0$则停机;否则,计算

$$Y_{k+1}=Y_k+\alpha_kQ_k,$$

$$\alpha_k = \frac{\| \boldsymbol{R}_k \|_2^2}{\| \boldsymbol{Q}_k \|_1^2},$$

$$\boldsymbol{R}_{k+1} = (\boldsymbol{C}^{\#} - (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Y}_{k+1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{k+1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}))^{\#},$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}_{k+1} - \boldsymbol{R}_{k+1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}_{k+1} - \boldsymbol{R}_{k+1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\#}/2,$$

$$\boldsymbol{Q}_{k+1} = \boldsymbol{P}_{k+1} + \beta_k \boldsymbol{Q}_k,$$

$$\beta_k = -\frac{\langle \boldsymbol{P}_{k+1}, \boldsymbol{Q}_k \rangle_1}{\| \boldsymbol{Q}_k \|_1^2},$$

令 $k := k+1$, 转 Step 2

由定理 2立知

定理 3　如果不考虑舍入误差, 经有限次迭代算法 2可获得相容矩阵方程(10)的惟一极小范数反对称解 $\boldsymbol{Y}^*$. 进而可得问题 2的解为 $\boldsymbol{X}_{LS} = \boldsymbol{Y}^* + \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}$, 其中

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}})^{\#}/2, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

3　数值例子

给定问题 1与问题 2中矩阵如下, 求问题 2中的 $\boldsymbol{X}_{LS}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 14 \\ 5 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 6 \\ 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -16 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -9 & -2 \\ 5 & -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

由于在迭代过程中存在误差, 余项 $\boldsymbol{R}_k$ 一般都不等于零, 取充分小的 ε, 如取 $\varepsilon = 1 \times 10^{-10}$, 当 $\| \boldsymbol{R}_k \| \leqslant \varepsilon$ 时停止迭代, 利用 Matlab程序设计语言按以上算法 2计算, 结果如下:

$$\boldsymbol{X}_{LS} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.2749 & -0.2093 \\ -1.0000 & 0.0000 & 0.4851 & 1.3468 \\ -0.2749 & -0.4851 & 0.0000 & 0.3295 \\ 0.2093 & -1.3468 & -0.3295 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

此时 $\| \boldsymbol{R}_k \| = 4.7224 \times 10^{-11}$, $\| \boldsymbol{X}_{LS} - \boldsymbol{X}^* \| = 19.3906$ 由此可知本文所提算法是有效的.

致谢　本文得到上海交通大学数学系黄建国教授的悉心指导, 在此表示衷心感谢!

[参考文献]

[1] Huang J, Nong L. An iterative algorithm for solving a finite-dimensional linear operator equation $T(x) = f$ with applications [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(5): 1176-1188.

[2] 龚丽莎, 胡锡炎, 张磊. 主子阵约束下矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的对称最小二乘解[J]. 数值计算与计算机应用, 2006, 27(2): 154-160.

[3] 彭振赟, 胡锡炎, 张磊. 双对称矩阵的一类反问题[J]. 计算数学, 2005, 27(1): 11-18.

[4] 戴华. 对称正交对称矩阵反问题的最小二乘解[J]. 计算数学, 2003, 25(1): 59-66.

[5] Peng Z, Peng Y. An efficient iterative method for solving the matrix equation[J]. Numerical Linear Algebra With Applications, 2006, 13(6): 473-485.

[6] Peng Z. An iterative method for the least squares symmetric solution of the linear matrix equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 170(1): 711-723.

[责任编辑: 丁　蓉]