一类 Mortar型旋转 Q_1元的多重网格方法

姜亚琴[1, 2]

(1. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(2. 南京邮电大学理学院, 江苏 南京 210046)

[摘要] 研究了一种 mortar型旋转 Q_1元的多重网格方法, 证明了 $\mathscr{W}$循环多重网格算法的最优收敛性, 即收敛率与网格层数和尺寸无关, 数值仿真验证了理论分析.

[关键词] mortar有限元, 旋转 Q_1元, 多重网格
[中图分类号] O241 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)02-0001-09

Multigrid for a Kind of Mortar-Type Rotated Q_1 Element

Jiang Yaqin[1, 2]

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. College of Sciences, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

Abstract In this paper, we study a multigrid method for a kind of mortar-type rotated Q_1 element. It is proved that the convergence of the $\mathscr{W}$-cycle multigrid is optimal, i.e., the convergence rate is independent of the grid levels and size. Numerical experiments are presented to confirm our theoretical results.

Key words mortar finite element, rotated Q_1 element, multigrid

旋转 Q_1元是一种重要的非协调有限元, 文[1]在处理 Stokes问题时首次提出该有限元, 在文[2]中, 作者证明了 $R-T$ 混合四边形元方法与旋转 Q_1元方法的等价性, [3]和[4]分别讨论了旋转 Q_1元的多重网格法和 Schwarz区域分解法.

近几十年来, 许多学者广泛研究了 mortar有限元方法, 该方法是一种不重叠的区域分解方法, 不同子区域的网格可以在子区域的交面上不匹配. 每个子区域的有限元离散在交面上只要满足一个弱连续条件, 即 mortar条件. 利用这种方法可以在不同的子区域上选择不同的网格尺寸以便处理间断系数和各向异性问题[5-7]. 但是, 许多提出的这些 mortar条件不仅与界面自由度有关, 且与界面附近的自由度密切相关, 所以处理 mortar条件的计算量较大. 在文[8]中, 作者提出了一种新颖的 mortar条件, 这种 moratr条件仅与子区域界面的自由度有关, 从而大大缩小了计算量.

针对文[9]中提出的 mortar型旋转 Q_1元, 本文研究了其多重网格方法, 证明了 W 循环多重网格算法的最优收敛性, 即收敛率与网格层数和尺寸无关.

本文分为如下几个部分:第一部分介绍了 mortar 型旋转 Q_1元方法以及相关概念;第二部分提出了多重网格算法;第三部分得出主要结论,最后给出了相应的数值试验. 为方便起见,本文采用了以下符号 $\lesssim$, $\gtrsim$ 和 $\asymp$, $x_1 \lesssim y_1$, $x_2 \gtrsim y_2$ 和 $x_3 \asymp y_3$表示 $x_1 \leqslant C_1 y_1$, $x_2 \geqslant C_2 y_2$, 及 $C_3 x_3 \leqslant y_3 \leqslant C_4 x_3$, 其中 C_1, C_2, C_3, C_4为与网格尺寸无关的常数.

1 *Mortar*型旋转 Q_1 元及 *Mortar*条件

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$为一个矩型有界区域, 它的边界为 $\partial\Omega$. 考虑如下椭圆问题

收稿日期: 2011-02-22
基金项目: 国家自然科学基金(11071124).
通讯联系人: 姜亚琴, 博士, 研究方向: 有限元. E-mail: yqjiangnj@163.com

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{1}$$

方程(1)的变分形式是找一个惟一解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

其中

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x, \quad (f, v) = \int_\Omega f v \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

对于 $f \in L^2(\Omega)$, 方程(2)有如下正则性

$$\| u \|_2 \lesssim \| f \|_0. \tag{4}$$

对 Ω 进行几何协调的矩形网格剖分, 即

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N} \Omega_k, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \varnothing, \quad k \neq l.$$

如果 $k \neq l$, $\Omega_k \cap \Omega_l$ 是空集或一条边或一个点. 设 T_1^i 是子区域 Ω_i 的一个最粗的拟一致剖分, 剖分中的每一个单元为四条边平行于 x 轴或 y 轴的矩形. 记 $T_1 = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{T}_1^i$. h_1 表示 $\mathcal{T}_1$ 中最大单元直径. 连接 $\mathcal{T}_1$ 中单元的边的中点得到较细剖分 $\mathcal{T}_2$, 显然 $\mathcal{T}_2$ 的参数 h_2 满足 $h_2 = \frac{1}{2} h_1$. 重复这一过程, 得到一簇剖分 $\mathcal{T}_l(l = 1, 2, \dots, L)$. 假设 $\Omega_{i,h}$, $\partial\Omega_{i,l}$ 分别为 Ω_i 和 $\partial\Omega_i$ 的顶点.

定义在子区域 $\mathcal{T}_l(\Omega_i)$ 的旋转 Q_1 有限元空间为

$$X_l(\Omega_i) = \{ v \in L^2(\Omega_i) \mid v|_E = a_E^1 + a_E^2 x + a_E^3 y + a_E^4 (x^2 - y^2),$$

$$a_E^i \in \mathbf{R}, \int_e v \, \mathrm{d}s = 0, \ \forall e \in \partial E \cap \partial\Omega, \text{其中 } E \in \mathcal{T}_l(\Omega_i);$$

$$\text{对于 } E_1, E_2 \in \mathcal{T}_l(\Omega_i), \text{如果 } \partial E_1 \cap \partial E_2 = e, \text{则} \int_e v|_{\partial E_1} \mathrm{d}s = \int_e v|_{\partial E_2} \mathrm{d}s \}.$$

全局的离散空间可写成如下形式

$$X_l(\Omega) = \prod_{i=1}^{N} X_l(\Omega_i).$$

容易看出

$$X_1(\Omega) \subset X_2(\Omega) \subset \dots \subset X_L(\Omega).$$

边界 $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{N} \partial\Omega_i \backslash \partial\Omega$ 被分成一组不连续的开边 $\gamma_m (1 \leqslant m \leqslant M)$, 也就是说 $\Gamma = \bigcup_{m=1}^{M} \gamma_m$, $\gamma_m \cap \gamma_n = \varnothing$, 对于 $m \neq n$. 定义交界的一边为 mortar 边, 记为 $\gamma_{m(i)}$, 同时另一边为非 mortar 边, 记为 $\delta_{m(j)}$, 实际上 $\gamma_{m(i)} = \delta_{m(j)} = \gamma_m$. 因此对于边界 γ_m 有两个不同的剖分, 即 $\mathcal{T}_l(\gamma_{m(i)})$ 和 $\mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})$, 不妨假定较细一边为 mortar 边. 设分片常数空间 $S_l(\delta_{m(j)})$, 它的维数与 $\delta_{m(j)}$ 上元素个数相等. 对于非 mortar 边 $\delta_{m(j)}$, 定义一个 L^2 投影算子 $Q_{l\delta}: L^2(\gamma_m) \to S_l(\delta_{m(j)})$,

$$(Q_{l\delta} v, \phi)_{L^2(\delta_{m(j)})} = (v, \phi)_{L^2(\delta_{m(j)})}, \quad \forall \phi \in S_l(\delta_{m(j)}). \tag{5}$$

类似定义 $S_l(\gamma_{m(i)})$ 和 $Q_{l\gamma}$. 接下来, 再设 $\mathcal{T}_l^{1/2}(\Omega_i)$ 为连接 $\mathcal{T}_l(\Omega_i)$ 的单元对边中点形成的剖分, 如下的辅助空间是定义在 l 层上的一个双线形协调有限元空间:

$$V_{l\,i}^{1/2} = V_l^{1/2}(\Omega_i) = \{ v \in C^0(\Omega_i) \mid v|_K \text{ 是双线性的}, \forall K \in \mathcal{T}_l^{1/2}(\Omega_i) \}.$$

设 $V_l^{1/2} = \prod_{i=1}^{N} V_{l\,i}^{1/2}$ 且 $V_l^{1/2}(s) = V_l^{1/2}|_s$ 对于 $s \subset (\Gamma \cup \partial\Omega)$. 根据[9], 定义一个局部映射 $I_l^\gamma \to V_l^{1/2}(\gamma)$:

(1) 当 P 是 $e \in \gamma$ 的中点时, $I_l^\gamma v(P) = \frac{1}{|e|} \int_e v \, \mathrm{d}s$;

(2) 当 P 是 γ 的端点时, $I_l^\gamma v(P) = I_l^\gamma v(P_{CR})$, 其中 P_{CR} 是 γ 上离 P 最近的一个中点;

(3) 当 P 是 $T_l(\gamma)$ 上单元的顶点时, $I_l^\gamma v(P) = \frac{1}{2}(I_l^\gamma v(P_l) + I_l^\gamma v(P_r))$, 其中 P_l, P_r 分别是 P 在 γ 上的左邻中点与右邻中点.

全局的 mortar 有限元空间可以定义为

$$V_l = \{v \in X_l(\Omega) \mid Q_{l,\delta}(I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v_i) = Q_{l,\delta} v_j,\ \ \forall \delta_{m(j)} = \gamma_{m(i)} \subset \Gamma\},$$

其中 $v_i = v|_{\gamma_{m(i)}}$, $v_j = v|_{\delta_{m(j)}}$. 界面 Γ 上满足的条件称为 mortar条件. 问题 (2) 的离散形式为: 求 $u_l \in V_l$ 满足

$$a_l(u_l, v_l) = (f, v_l),\ \ \forall\ v_l \in V_l, \tag{6}$$

其中

$$a_l(u_l, v_l) = \sum_{i=1}^{N} a_{l,i}(u_l, v_l),\ a_{l,i}(u_l, v_l) = \sum_{E\in\mathcal{T}_l^i} (\nabla u_l, \nabla v_l)_E.$$

此外, 在 mortar有限元空间上装配如下范数

$$\| v\|_{l,i}^2 := a_{l,i}(v, v),\ \ \| v\|_l^2 := \sum_{i=1}^{N} \| v\|_{l,i}^2.$$

由 [1] 可知, 方程 (6) 存在惟一解, 且有下面的误差估计.

定理 **1** 假设 u, u_l 分别为方程 (2) 和 (6) 的解, 则

$$\| u - u_l \|_l \preccurlyeq \sum_{i=1}^{N} h_{l,i} | u |_{2,\Omega},$$

其中 $h_{l,i} = \max_{E\in T_l^i} h_E$, h_E 为单元 $E \in T_l^i$ 的直径.

2 多重网格算法

为了在不嵌套的有限元空间 V_l 中定义一个合适的网格转移算子, 首先定义一个局部空间上的网格转移算子 $J_l^i: X_{l-1}(\Omega_i) \to X_l(\Omega_i)$,

$$\frac{1}{|e|}\int_e J_l^i v\, ds = \begin{cases} 0, & e \subset \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \\ \frac{1}{|e|}\int_e v\, ds, & e \subset \partial\Omega_i \setminus \partial\Omega, \\ \frac{1}{|e|}\int_e v\, ds, & e \subset \partial E,\ E \in \mathcal{T}_{l-1}^i, \\ \frac{1}{2|e|}\int_e (v|_{E_1} + v|_{E_2})\, ds, & e \subset \partial E_1 \cap \partial E_2,\ E_1, E_2 \in \mathcal{T}_{l-1}^i, \end{cases}$$

其中 $e \in \partial E$, $E \in \mathcal{T}^i$.

基于算子 J_l^i 定义相应的全局空间算子 $J_l: X_{l-1}(\Omega) \to X_l(\Omega)$,

$$J_l v = (J_l^1 v^1, J_l^2 v^2, \dots, J_l^N v^N),\ \ \forall\ v = (v^1, v^2, \dots, v^N) \in X_{l-1}(\Omega).$$

再定义一个算子 $\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}: X_l(\Omega) \to X_l(\Omega)$,

$$\int_e \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(v)\, ds = \begin{cases} \int_e Q_{l,\delta}(I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v|_{\gamma_{m(i)}} - v|_{\delta_{m(j)}})\, ds, & e \in \mathcal{T}(\delta_{m(j)}), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

此时, 对于任意 $v \in X_l(\Omega)$, 取

$$v^* = v + \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(v), \tag{7}$$

有 $v^* \in V_l$, 事实上由于 $\psi \in S_l(\delta_{m(j)})$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\delta_{m(j)}} v^*|_{\delta_{m(j)}} \psi\, ds &= \int_{\delta_{m(j)}} v|_{\delta_{m(j)}} \psi\, ds + \int_{\delta_{m(j)}} \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(v)|_{\delta_{m(j)}} \psi\, ds = \\ &\int_{\delta_{m(j)}} v|_{\delta_{m(j)}} \psi\, ds + \int_{\delta_{m(j)}} Q_{l,\delta}(I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v|_{\gamma_{m(i)}} - v|_{\delta_{m(j)}}) \psi\, ds = \\ &\int_{\delta_{m(j)}} v|_{\delta_{m(j)}} \psi\, ds + \int_{\delta_{m(j)}} (I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v|_{\gamma_{m(i)}} - v|_{\delta_{m(j)}}) \psi\, ds = \\ &\int_{\delta_{m(j)}} I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v|_{\gamma_{m(i)}} \psi\, ds = \int_{\delta_{m(j)}} I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} v^*|_{\gamma_{m(i)}} \psi\, ds \end{aligned}$$

基于算子 J_l 和 $\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}$, 构造 mortar有限元空间中的网格转移算子 $I_l: X_{l-1}(\Omega) \to V_l$,

$$I_l v = J_l v + \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_{l\,\delta_{m(j)}}(J_l v), \quad \forall v \in X_{l-1}(\Omega). \tag{8}$$

在提出多重网格算法之前,需要介绍几个辅助算子,对于 $l=1,\cdots,L$,定义 $A_l: V_l \to V_l$,$P_{l-1}: V_l \to V_{l-1}$ 和 $P^0_{l-1}: V_l \to V_{l-1}$ 分别如下:

$$(A_l u, v) = a_l(u,v), \ \forall u, v \in V_l, \ (P^0_{l-1}u, v) = (u, I_l v), \ \forall u \in V_l, v \in V_{l-1},$$

$$a_{l-1}(P_{l-1}u, v) = a_l(u, I_l v), \ \forall u \in V_l, v \in V_{l-1}.$$

此外,还需要满足下列条件的光滑算子 R_l(例如 Gauss-Seidel, conjugate gradient迭代法等),

$$\frac{\|u\|_0^2}{\lambda_l} \leqslant C_R(R_l u, u), \ \forall u \in V_l, \tag{9}$$

其中 $C_R \geqslant 1$与网格层数无关.且$R_l = (I - K_l^* K_l)A_l^{-1}$或$R_l = (I - K_l K_l^*)A_l^{-1}$, $K_l = I - R_l A_l$, $K_l^* = I - R_l^T A_l$, R_l^T是 R_l 关于内积$(\cdot,\cdot)$的伴随算子,λ_l 是 A_l 的最大特征值.定义

$$R_l^{(k)} = \begin{cases} R_l, & k\text{是奇数}, \\ R_l^T, & k\text{是偶数}. \end{cases}$$

现在介绍多重网格算法,设 $B_l: V_l \to V_l$ 为多重网格算子.

算法　取 $B_1 = A_1^{-1}$.设 $2 \leqslant l \leqslant L$, p 为正整数,在 B_{l-1} 的基础上按下列方式定义 $B_l g$,对于任取的 $g \in V_l$,

(1) 设初始值 x^0,取 $q^0 = 0$.

(2) 通过下列方式计算 x^k for $k = 1,\cdots,m(l)$,

$$x^k = x^{k-1} + R_l^{(k+m(l))}(g - A_l x^{k-1}).$$

(3) 再计算 $y^{m(l)} = x^{m(l)} + I_l q^p$,其中 $q^i\ (i=1,\cdots,p)$ 满足

$$q^i = q^{i-1} + B_{l-1}(P^0_{l-1}(g - A_l x^{m(l)}) - A_{l-1}q^{i-1}).$$

(4) 对于 $k = m(l)+1,\cdots,2m(l)$,计算 y^k

$$y^k = y^{k-1} + R_l^{(k+m(l))}(g - A_l y^{k-1}).$$

(5) 定义 $B_l g = y^{2m(l)}$.

注　理论上光滑次数 $m(l)$ 足够多,实际计算时不需要很多.

3 主要结论

为了得到多重网格算法的收敛性,先证明下面一些引理.

定义 1　定义算子 $\mathscr{M}_{l,i}: X_l(\Omega_i) \to V_l^{1/2}(\Omega_i)$,任取 $v \in X_l(\Omega_i)$,

(1) 如果 P 是单元 E 的中心,$E \in \mathscr{T}(\Omega_i)$,则

$$(\mathscr{M}_{l,i}v)(P) = \frac{1}{4}\sum_{e_i \in \partial E}\frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} v\,\mathrm{d}s;$$

(2) 如果 P 是边 $e \in \partial E$, $E \in \mathscr{T}_l(\Omega_i)$ 的中点,则

$$(\mathscr{M}_{l,i}v)(P) = \frac{1}{|e|}\int_e v\,\mathrm{d}s;$$

(3) 如果 $P \in \Omega_{i,l} \backslash \partial\Omega_{i,l}$,则

$$(\mathscr{M}_{l,i}v)(P) = \frac{1}{4}\sum_{e_i}\frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} v\,\mathrm{d}s;$$

其中求和是针对所有以 P 为公共顶点的边 e_i, $e_i \in \partial E_i$, $E_i \in \mathscr{T}(\Omega_i)$;

(4) 如果 $P \in \partial\Omega_{i,l} \backslash \{c_1,\cdots,c_n\}$,则

$$(\mathscr{M}_{l,i}v)(P) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|e_l|}\int_{e_l} v\,\mathrm{d}s + \frac{1}{|e_r|}\int_{e_r} v\,\mathrm{d}s\right),$$

其中 $e_l \in \partial E_1 \cap \partial\Omega_i$、$e_r \in \partial E_2 \cap \partial\Omega_i$是点 P 的左邻边和右邻边,$E_1, E_2 \in \mathscr{T}_l(\Omega_i)$, $c_1,\cdots,c_n$ 是子区域 Ω_i的顶点;

(5) 如果 $P \in \{c_1,\cdots,c_n\}$,则

$$(\mathscr{M}_{l,i}v)(P)=\frac{|e_l|}{|e_l|+|e_r|}\left(\frac{1}{|e_l|}\int_{e_l}v\mathrm{d}s\right)+\frac{|e_r|}{|e_l|+|e_r|}\left(\frac{1}{|e_r|}\int_{e_r}v\mathrm{d}s\right),$$

对于算子 $\mathscr{M}_{l,i}$，有下面的结论成立.

引理 1 任取 $v\in X_l(\Omega_i)$，则

$$|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(\Omega_i)}\asymp\|v\|_{l,i}. \tag{10}$$

证明 假设单元 $K\in\mathscr{T}_l^{1/2}(\Omega_i)$，可以找到单元 $E\in\mathscr{T}_l(\Omega_i)$ 满足 $K\subset E$. 设 P_1 为 K 和 E 的公共顶点，P_2、P_3 是 K 的另外两顶点，并且位于 E 的边上，P_4 是 K 的第四个顶点，位于 E 内部. 那么

$$|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(K)}^2\asymp\sum_{i,j=1}^{4}|\mathscr{M}_{l,i}v(P_i)-\mathscr{M}_{l,i}v(P_j)|^2\leqslant$$

$$\sum_{\tau\in\mathscr{T}_l(\Omega_i),P_1\in\bar{\tau}}\ \sum_{e_i,e_j\in\partial\tau}\left(\frac{1}{|e_i|}\int_{e_i}v\mathrm{d}s-\frac{1}{|e_j|}\int_{e_j}v\mathrm{d}s\right)^2\leqslant\sum_{\tau\in\mathscr{T}_l(\Omega_i),P_1\in\bar{\tau}}|v|_{H^1(\tau)}^2.$$

$\mathscr{T}_l^{1/2}(\Omega_i)$ 的每一个 K 都有上面的不等式，所以

$$|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(\Omega_i)}\leqslant\|v\|_l. \tag{11}$$

对于任意的 $E\in\mathscr{T}_l(\Omega_i)$，设 $e_i(i=1,2,3,4)$ 是 E 的边，$Q_i(i=1,2,3,4)$ 是 $e_i(i=1,2,3,4)$ 的中点，则有

$$|v|_{H^1(E)}^2\asymp\sum_{i,j=1}^{4}\left(\frac{1}{|e_i|}\int_{e_i}v\mathrm{d}s-\frac{1}{|e_j|}\int_{e_j}v\mathrm{d}s\right)^2=$$

$$\sum_{i,j=1}^{4}(\mathscr{M}_{l,i}v(Q_i)-\mathscr{M}_{l,i}v(Q_j))^2\leqslant\sum_{K\subset E,K\in\mathscr{T}_l^{1/2}(\Omega_i)}|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(K)}^2.$$

在 $\mathscr{T}_l(\Omega_i)$ 的所有单元 E 上进行叠加，得出

$$\|v\|_l\leqslant|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(\Omega_i)}. \tag{12}$$

由(11)和(12)得到(10).

由插值估计(见[10])，容易推得下面结论

引理 2 $\|v-Q_{l,\delta}v\|_{L^2(\gamma_m)}\leqslant h_l^{1/2}|v|_{H^{1/2}(\gamma_m)}$，$\forall v\in H^{1/2}(\gamma_m)$.

此外，算子 Π_l^γ 有下面的性质.

引理 3 任取 $v\in X_l(\Omega_i)$，有

$$\begin{aligned}&\|Q_{l,\delta}\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}-\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}\leqslant h_l^{1/2}\ \|v\|_{l,i},\\&\|\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}-Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}\leqslant h_l^{1/2}\ \|v\|_{l,i}.\end{aligned} \tag{13}$$

证明 根据算子 $\mathscr{M}_{l,i}$ 和 Π_l^γ 的定义，容易看出

$$\mathscr{M}_{l,i}v=\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v_i,\ \text{on}\ \gamma_{m(i)},\ \forall v\in X_l(\Omega_i),\ v_i=v|_{\gamma_{m(i)}}.$$

利用引理 1,2 和迹定理，可以推出

$$\begin{aligned}\|Q_{l,\delta}\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}-\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}&\leqslant h_l^{1/2}|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^{1/2}(\gamma_{m(i)})}\leqslant\\h_l^{1/2}|\mathscr{M}_{l,i}v|_{H^1(\Omega_i)}&\leqslant h_i^{1/2}\ \|v\|_{l,i}.\end{aligned} \tag{14}$$

所以引理 3 的第一个不等式成立. 同时

$$\begin{aligned}\|\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}-Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}&=\|\mathscr{M}_{l,i}v-Q_{l,\gamma}v_i\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}=\\&\sum_{e\in\mathscr{T}_l^{1/2}(\gamma_{m(i)})}\int_e(\mathscr{M}_{l,i}v-Q_ev_i)\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $Q_ev_i=Q_{\acute{e}}v_i$，$e\subset\acute{e}\subset\mathscr{T}_l(\gamma_{m(i)})$，$Q_{\acute{e}}$ 是到定义在 $\mathscr{T}_l(\gamma_{m(i)})$(以 $\acute{e}=2e$ 为单元)上分片常数空间的一个 L^2 正交投影. 通过 Scaling 技巧(见[10])，对于任意常数 c，成立下面不等式

$$\int_e(\mathscr{M}_{l,i}v-c)^2\mathrm{d}s\leqslant h_l\int_{\hat{e}}(\hat{\mathscr{M}}_{l,i}v-c)^2\mathrm{d}\hat{s}\leqslant h_l\|\hat{\mathscr{M}}_{l,i}v-c\|_{1,\hat{E}}^2\leqslant h_l|\hat{\mathscr{M}}_{l,i}v|_{1,\hat{E}}^2\leqslant h_l|\mathscr{M}_{l,i}v|_{1,E}^2,$$

再由(15)和引理 1，得出

$$\|\Pi_l^\gamma Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}-Q_{l,\gamma}v|_{\gamma_{m(i)}}\|_{L^2(\gamma_{m(i)})}\leqslant h_l^{1/2}\ \|\mathscr{M}_{l,i}v\|_{H^1(\Omega_i)}\leqslant h_l^{1/2}\ \|v\|_{l,i}.$$

根据[11]，局部网格转移算子 J_l^i 有下列性质.

引理 4 任取 $v^i\in V_{l-1}(\Omega_i)$，则

$$\| J_l^i v^i \|_{l,i} \preccurlyeq \| v^i \|_{l-1,i},\quad \| v^i - J_l^i v^i \|_{0,i} \preccurlyeq h_l \| v^i \|_{l-1,i}.$$

所以全局网格转移算子 I_l: $V_{l-1} \to V_l$ 也有如下相同性质.

引理 **5**　任取 $v \in V_{l-1}$, 则

$$(1)\ \| I_l v \|_l \preccurlyeq \| v \|_{l-1}, \tag{16}$$

$$(2)\ \| v - I_l v \|_0 \preccurlyeq h_l \| v \|_{l-1}. \tag{17}$$

证明　先证明(1). 由上面的引理得

$$\| I_l v \|_l^2 = \| J_l v + \sum_{i=1}^{M} \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_l^2 \preccurlyeq (\| J_l v \|_l^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_l^2) \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq \| v \|_{l-1}^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_l^2. \tag{18}$$

在非 mortar边 $\delta_{m(j)}$ 上, 有

$$\begin{aligned}
\| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_l^2 &= \sum_{E \in \mathcal{T}_l(\Omega_j)} \int_E | \nabla (\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v)) |^2 \mathrm{d}x \preccurlyeq \sum_{E \in \mathcal{T}_l(\Omega_j)} \sum_{e \in \partial E} \left(\frac{1}{|e|} \int_e \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \mathrm{d}s \right)^2 = \\
&\sum_{e \in \mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})} \left(\frac{1}{|e|} \int_e Q_{l,\delta} (I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} - (J_l v) |_{\delta_{m(j)}}) \mathrm{d}s \right)^2 \preccurlyeq \\
&h_l^{-2} \sum_{e \in \mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})} \left(\int_e Q_{l,\delta} (I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} - (J_l v) |_{\delta_{m(j)}}) \mathrm{d}s \right)^2 \preccurlyeq \\
&h_l^{-2} \sum_{e \in \mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})} \left(\int_e I^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} - (J_l v) |_{\delta_{m(j)}} \mathrm{d}s \right)^2 \preccurlyeq \\
&h_l^{-1} \| I^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} - (J_l v) |_{\delta_{m(j)}} \|_{L^2(\gamma_m)}^2 \preccurlyeq \\
&h_l^{-1} (\| I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} - Q_{l,\delta} I_l^{\gamma} Q_{l,\gamma} (J_l v) |_{\gamma_{m(i)}} \|_{L^2(\gamma_m)}^2 + \\
&\| Q_{l,\delta} (J_l v) |_{\delta_{m(j)}} - (J_l v) |_{\delta_{m(j)}} \|_{L^2(\gamma_m)}^2) := h_l^{-1} (F_1 + F_2).
\end{aligned} \tag{19}$$

利用引理 3, 4和 scaling技巧, 推出

$$F_1 \preccurlyeq h_l (\| v \|_{l-1,i}^2 + \| v \|_{l-1,j}^2),\quad F_2 \preccurlyeq h_l \| v \|_{l-1,j}^2.$$

利用上面 4个不等式可以得到本引理的第一个结论.

接下来证明不等式(2), 根据 I_l的定义, 可以推出

$$\| v - I_l v \|_l^2 \preccurlyeq \left(\| v - J_l v \|_0^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_0^2 \right) \preccurlyeq \left(h_l^2 \| v \|_{l-1}^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_0^2 \right). \tag{20}$$

类似于证明不等式(1), 推得

$$\| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (J_l v) \|_0^2 \preccurlyeq C h_l^2 (\| v \|_{l-1,i}^2 + \| v \|_{l-1,j}^2),$$

再由(20) 得到本引理的第二个结论.

此外, 还须定义一个从 $H^2(\Omega_i)$ 到 $X_l(\Omega_i)$ 的插值算子 π_l^i, 并且成立如下结论[12]

$$\| \xi - \pi_l^i \xi \|_{L^2(\Omega_i)} + h_l \| \xi - \pi_l^i \xi \|_l \preccurlyeq h_l^2 | \xi |_{H^2(\Omega_i)},\quad \forall\ \xi \in H^2(\Omega_i). \tag{21}$$

基于 π_l^i, 有全局空间算子 π_l: $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to X_l(\Omega)$,

$$\pi_l \xi = (\pi_l^1 \xi^1, \pi_l^2 \xi^2, \ldots, \pi_l^N \xi^N),\quad \forall\ \xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^N) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

再定义 Π_l: $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to V_l$,

$$\Pi_l \xi = \pi_l \xi + \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (\pi_l \xi),$$

其中 $\xi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\Pi_l \xi \in V_l$.

引理 **6**　对于算子 Π_l, 有下面结论成立

$$\| \xi - \Pi_l \xi \|_0 + h_l \| \xi - \Pi_l \xi \|_l \preccurlyeq h_l^2 | \xi |_2,\quad \forall\ \xi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

证明　根据 Π_l 的定义, 三角不等式和 (21), 推得

$$\| \xi - \Pi_l \xi \|_0^2 \preccurlyeq \left(\| \xi - \pi_l \xi \|_0^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (\pi_l \xi) \|_0^2 \right) \preccurlyeq \left(h_l^4 \| \xi \|_2^2 + \sum_{m=1}^{M} \| \varepsilon_{l,\delta_{m(j)}} (\pi_l \xi) \|_0^2 \right),$$

同时

$$\|\xi-\Pi_l\xi\|_l^2 \preccurlyeq \|\xi-\pi_l\xi\|_l^2+\sum_{m=1}^{M}\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\|_l^2 \preccurlyeq h_l^2\|\xi\|_2^2+\sum_{m=1}^{M}\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\|_l^2.$$

利用范数等价性和 Schwarz不等式, 得到

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\|_0^2=\sum_{E\in\mathcal{T}_l}\int_E|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)|^2\mathrm{d}x \preccurlyeq h_l^2\sum_{E\in\mathcal{T}_l}\sum_{e\subset\partial E}\left(\frac{1}{|e|}\int_e\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\mathrm{d}s\right)^2 \preccurlyeq$$

$$h_l^2\sum_{e\in\mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})}\left(\frac{1}{|e|}\int_e(I_l^{\gamma}Q_{l,\gamma_{m(i)}}(\pi_l\xi)|_{\gamma_{m(i)}}-(\pi_l\xi)|_{\delta_{m(j)}})\mathrm{d}s\right)^2 \preccurlyeq$$

$$\sum_{e\in\mathcal{T}_l(\delta_{m(j)})}\left(\int_e I_l^{\gamma}Q_{l,\gamma_{m(i)}}(\pi_l\xi)|_{\gamma_{m(i)}}-(\pi_l\xi)|_{\delta_{m(j)}})\mathrm{d}s\right)^2 \preccurlyeq$$

$$h_l\|I_l^{\gamma}Q_{l,\gamma_{m(i)}}(\pi_l\xi)|_{\gamma_{m(i)}}-(\pi_l\xi)|_{\delta_{m(j)}}\|_{0,\gamma_m}.$$

通过 (21)和 (16)中类似的证明方法, 得到

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\|_0^2 \preccurlyeq h_l^4|\xi|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j}.$$

类似可以证明

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(\pi_l\xi)\|_l^2 \preccurlyeq h_l^2|\xi|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j}. \tag{22}$$

得证.

下面给出一个关键的引理.

引理 7 任取 $\xi\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, 有下面结论成立

$$\|\xi-I_l\Pi_{l-1}\xi\|_l \preccurlyeq h_l|\xi|_2.$$

证明 根据引理 4和 Π_{l-1}、I_l的定义, 推得

$$\|\xi-I_l\Pi_{l-1}\xi\|_l=\|\xi-I_l(\pi_{l-1}\xi)-\sum_{m=1}^{M}I_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_l=$$

$$\|\xi-J_l(\pi_{l-1}\xi)-\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(J_l(\pi_{l-1}\xi))-\sum_{m=1}^{M}I_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_l \leqslant$$

$$\|\xi-J_l(\pi_{l-1}\xi)\|_l+\|\sum_{m=1}^{M}\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(J_l(\pi_{l-1}\xi))\|_l+$$

$$\|\sum_{m=1}^{M}I_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_l := T_1+T_2+T_3. \tag{23}$$

利用逼近性质 (21)和引理 4得出

$$T_1 \leqslant \|\xi-\pi_{l-1}\xi\|_l+\|\pi_{l-1}\xi-J_l(\pi_{l-1}\xi)\|_l \preccurlyeq h_l|\xi|_2. \tag{24}$$

接下来考虑 T_2, 在每一条 mortar边 $\delta_{m(j)}$ 上, 利用引理 4和 (22)中类似的证明理论, 有

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(J_l(\pi_{l-1}\xi))\|_l \preccurlyeq h_l|\xi|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j}.$$

在所有的边 $\delta_{m(j)}$ 上叠加, 则有

$$T_2 \preccurlyeq h_l|\xi|_2. \tag{25}$$

对于 T_3, 根据 I_l的定义, 自然成立

$$\|I_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_l \preccurlyeq \|J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_l+$$

$$\sum_{m=1}^{M}\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)))\|_l := G_1+G_2.$$

由引理 4、(22), 则

$$G_1 \preccurlyeq h_l\|\xi\|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j}. \tag{26}$$

再考虑 G_2, 当 $\delta_{n(j)}\cap\delta_{m(j)}\neq\emptyset$ 时, 有

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{n(j)}}(J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)))\|_l\neq 0$$

如果 $\delta_{n(j)}=\delta_{m(j)}$, 容易看出

$$I_l^{\gamma}Q_{l,\gamma}J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))|_{\gamma_{m(i)}}=0,$$

那么

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{m(j)}}(J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)))\|_l \preccurlyeq$$

$$h_l^{-1/2}\|I_l^{\gamma}Q_{l,\gamma}J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))|_{\gamma_{m(i)}}-J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))|_{\delta_{m(j)}}\|_{0,\gamma_m}=$$

$$h_l^{-1/2}\,\|J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))|_{\delta_{m(j)}}\|_{0,\gamma_m}\preccurlyeq h_l^{-1/2}(\|\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)\|_{0,\gamma_m}+$$
$$\|\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)-J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi))\|_{0,\gamma_m}):=h_l^{-1/2}(H_1+H_2).\tag{27}$$

利用引理 4和(22)中类似的证明方法,推出

$$H_1\preccurlyeq h_l^{3/2}\,\|\xi\|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j},\tag{28}$$

$$H_2\preccurlyeq h_l^{1/2}\,\|\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)\|_l\preccurlyeq h_l^{3/2}\,\|\xi\|_{2,\Omega_i\cup\Omega_j}.\tag{29}$$

对于其他的 $\delta_{n(j)}$满足$\left(\delta_{n(j)}\cap\delta_{m(j)}\neq\emptyset\right)$,证明过程类似,所以

$$\|\varepsilon_{l,\delta_{n(j)}}(J_l(\varepsilon_{l-1,\delta_{m(j)}}(\pi_{l-1}\xi)))\|_l\preccurlyeq h_l\|\xi\|_{2,\Omega_n\cup\Omega_j},\tag{30}$$

其中 $\Omega_n\cap\Omega_j=\gamma_n$.

联合(23)~(30)一起完成了证明.

引理 8 　算子 P_{l-1}具备性质

$$\|v-P_{l-1}v\|_0\preccurlyeq h_l\|v\|_l,\quad\forall\ v\in V_l.$$

证明　考虑如下辅助问题

$$\begin{cases}-\Delta\xi=v-P_{l-1}v, & 在\ \Omega中,\\ \xi=0, & 在\ \partial\Omega上,\end{cases}$$

则

$$\|v-P_{l-1}v\|_0^2=(-\Delta\xi,v-P_{l-1}v)=(a_l(\xi,v)-a_{l-1}(\xi,P_{l-1}v))-$$
$$\sum_{K\in\mathcal{T}_l}\oint_{\partial K}\frac{\partial\xi}{\partial n}v\,\mathrm{d}s+\sum_{K\in\mathcal{T}_{l-1}}\oint_{\partial K}\frac{\partial\xi}{\partial n}P_{l-1}v\,\mathrm{d}s:=F_1+F_2+F_3.$$

由[1]中的引理 2,4得到

$$|F_2|\preccurlyeq h_l|\xi|_2\|v\|_l=h_l\|v-p_{l-1}v\|_0\|v\|_l.$$

再利用引理 5,容易看出

$$\|P_{l-1}v\|_{l-1}^2=a_{l-1}(P_{l-1}v,P_{l-1}v)=a_l(v,I_lP_{l-1}v)\preccurlyeq\|v\|_l\|P_{l-1}v\|_l,$$

所以

$$\|P_{l-1}v\|_{l-1}\preccurlyeq\|v\|_l.$$

由[1]中的引理 2和以上不等式,得出

$$|F_3|\preccurlyeq h_l|\xi|_2\|P_{l-1}v\|_{l-1}\preccurlyeq h_l\|v-P_{l-1}v\|_0\|v\|_l.$$

现在估计 F_1.

$$|F_1|=|a_l(\xi,v)-a_{l-1}(\Pi_{l-1}\xi,P_{l-1}v)+a_{l-1}(\Pi_{l-1}\xi,P_{l-1}v)-a_{l-1}(\xi,P_{l-1}v)|\leqslant$$
$$|a_l(\xi-I_l\Pi_{l-1}\xi,v)|+|a_{l-1}(\xi-\Pi_{l-1}\xi,P_{l-1}v)|\preccurlyeq$$
$$h_l|\xi|_2(\|v\|_l+\|P_{l-1}v\|_{l-1})\preccurlyeq h_l|\xi|_2\|v\|_l\preccurlyeq h_l\|v-P_{l-1}v\|_0\|v\|_l.$$

由以上所有不等式可以得证.

现在给出一个重要的逼近性质.

引理 9 　$|a_l((I-I_lP_{l-1})v,v)|\preccurlyeq\left(\dfrac{\|A_lv\|_0^2}{\lambda_l}\right)^{1/2}a_l(v,v)^{1/2},\quad\forall\ v\in V_l.$

证明　利用三角不等式、引理 5,8,可以推出

$$\|v-I_lP_{l-1}v\|_0\leqslant v-P_{l-1}v\|_0+\|(I-I_l)P_{l-1}v\|_0\preccurlyeq h_l(\|v\|_l+\|P_{l-1}v\|_{l-1})\preccurlyeq h_l\|v\|_l.$$

另外一方面

$$\|v-I_lP_{l-1}\|_l=\sup_{\omega\in V_l,\|\omega\|_l=1}a_l(v-I_lP_{l-1}v,\omega)=\sup_{\omega\in V_l,\|\omega\|_l=1}a_l(v,\omega-I_lP_{l-1}\omega)\leqslant$$
$$\sup_{\omega\in V_l,\|\omega\|_l=1}\|A_lv\|_0\|\omega-I_lP_{l-1}\omega\|_0\preccurlyeq h_l\|A_lv\|_0.$$

这样可以得出

$$|a_l((I-I_lP_{l-1})v,v)|\leqslant\|(I-I_lP_{l-1})v\|_l\|v\|_l\preccurlyeq h_l\|A_lv\|_0\|v\|_l\preccurlyeq\left(\frac{\|A_lv\|_0^2}{\lambda_l}\right)^{1/2}a_l(v,v)^{1/2}.$$

基于引理 9,由文[13]中定理 7可得如下结论.

定理 2 　如果 $p=2$和 $m(l)=m$ 足够大,则

$$|a_l((I-B_lA_l)v, v)| \leqslant \delta a_l(v, v), \quad \forall\ v \in V_l. \tag{31}$$

其中收敛因子 $\delta = \dfrac{C}{C+m^{1/2}}$.

据此定理知, $\mathscr{W}$循环多重网格方法的收敛性是最优的, 即收敛率与网格层数和尺寸无关.

4 数值算例

本节中提供一个数值算例来说明本文算法的最优收敛性.

考虑问题 (1), 不妨设 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 区域 Ω被分成两个相邻的子区域, 在每个子区域上进行矩形网格剖分, 两个子区域的网格在边界上不匹配. 设 $\Omega_1 = [0, 1] \times [0, 0.5]$ 为 mortar子区域, $\Omega_2 = [0, 1] \times [0.5, 1]$ 为非 mortar子区域. 设问题 (1) 的真解为 $u = x(1-x)y(1-y)$.

采用 $\mathscr{W}$循环多重网格算法, 得到如下结果 (见表 1). 表中 h_i $(i=1, 2)$ 表示 $\mathscr{T}_h(\Omega_i)$ 的网格尺寸, $\text{iter}_{(3,3)}$ 为前光滑次数与后光滑次数都为 3次的多重网格的迭代次数, u_h为方程 (6) 的解. 从表中数据容易看出本文的多重网格算法是最优的.

表 1 算法的迭代次数

Table 1 Number of iterations for the algorithm

h_1^{-1}	h_2^{-1}	$\Vert u-u_h \Vert_l$	$\text{iter}_{(3,3)}$
6	4	0.038 558 9	4
12	8	0.018 910 6	4
24	16	0.009 452 6	4
48	32	0.004 610 9	4
96	64	0.002 406 0	5
192	128	0.001 211 3	5

[参考文献]

[1] Rannacher R, Turek S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element[J]. Numer Math Partial Diff Equations, 1992, 8(2): 97-111.

[2] Arbogast T, Chen Z X. On the implementation of mixed methods as nonconforming methods for second order elliptic problem[J]. Math Comp, 1995, 211(64): 943-971.

[3] Chen J R, Huang P Q. Analysis of mortar-type Q_1^{rot}/Q_0 element and multigrid methods for the incomppressible Stokes problem[J]. Appl Numer Math, 2007, 57(5): 562-579.

[4] Wang F, Chen J, Xu W, et al. An additive Schwarz preconditioner for the mortar-type rotated Q_1 FEM for elliptic problems with discontinuous coefficients[J]. Appl Numer Math, 2009, 59(7): 1657-1667.

[5] Chen J R, Xu X J. The mortar element method for Rotated Q_1 element[J]. J Comp Maths, 2002, 20(3): 313-324.

[6] Belgacem F B, Maday Y. The mortar element for three dimensional finite element[J]. RAIRO Numer Anal, 1997, 31(2): 289-309.

[7] Marcinkowski L. The mortar element method with locally nonconforming element[J]. BIT, 1999, 39(4): 716-739.

[8] Bi C J, Li L K. Multigrid for the mortar element method with locally P1 nonconforming element[J]. Numer Math, 2003, 12(2): 193-204.

[9] Jiang Y Q. A mortar element method for rotated Q_1 element[J]. J Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 2008, 31(4): 50-55.

[10] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problem[M]. New York: North-Holland, 1978.

[11] Chen Z X, Oswald P. Multigrid and multilevel methods for nonconforming Q_1 element[J]. Math Comp, 1998, 222(67): 667-693.

[12] Klucek P, Li B, Luskin M. Analysis of a class of nonconforming finite element for crystalline microstructure[J]. Math Comp, 1996, 215(65): 1111-1135.

[13] Bramble J H, Pasciak J E, Xu J. The analysis of multigrid algorithm with nonnested spaces and noninherited quadratic form[J]. Math Comp, 1991, 193(56): 1-34.

[责任编辑: 丁 蓉]