平面图3可着色的充分条件

赵春红[1,2],董 伟[1,3]

(1. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210046)
(2. 沙洲职业工学院建筑工程系,江苏 张家港 215600)
(3. 南京晓庄学院数学与信息技术学院,江苏 南京 211171)

[摘要] 证明了(1) 每一个不含4-6圈,也不含距离小于2的三角形对,且每个7-圈最多与一个三面相邻的平面图是3-可着色的;(2) 每一个不含4-圈和5-圈,且每个6-圈或7-圈不与长度小于8的圈有公共边的平面图是3-可着色的.

[关键词] 平面图,圈,着色
[中图分类号] O157.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)03-0013-06

The Sufficient Conditions on 3-Colorable Plane Graphs

Zhao Chunhong[1,2], Dong Wei[1,3]

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. Department of Architecture, Shazhou Professional Institute of Technology, Zhangjiagang 215600, China)
(3. School of Mathematics & Information Technology, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing 211171, China)

Abstract: This paper proveed the following sufficient conditions on 3-colorable plane graphs: (1) Let G be a plane graph with neither cycles of length from 4 to 6 nor triangles of distance less than two. Furthermore, if every 7-cycles of G is adjacent to at most one triangle, then G is 3-colorable; (2) Every plane graph with neither cycles of length 4, 5 nor cycles of length 6 and 7 adjacent to cycles of length less than 8 is 3-colorable.

Key words: plane graph, cycle, coloring

我们所研究的图为有限简单图. 除特别声明,我们所使用的符号、概念都与[1]中一致.

设 $G=(V(G),E(G))$ 是图,v 是 G 的顶点,称 $d_G(v)$ 和 $N_G(v)$ 分别是 v 的点度和邻域. G 的最小度记为 $\delta(v)$.

设 $C: V(G)\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$ 是从 G 的顶点集 V 到整数集 K 的一个映射,如果对于任意的 $uv\in E(G)$,有 $C(u)\neq C(v)$,那么我们称 C 是 G 的一个 k-正常着色. 而使得 G 存在正常着色的最小的整数 k 称为 G 的着色数,记作 $\chi(G)$. 同时,G 中的点 v 所着的颜色记为 $C(v)$.

对 G 中的每个顶点 v,给定一个颜色的集合 L,记为 $L(v)$,若对任意的 $C(v)\in L(v)$,G 都存在正常着色,则称 C 是 G 的一个 L 列表染色. G 的最小的列表染色数称为 G 的选色数,记为 $\chi_l(G)$. 显然,$\chi(G)\leqslant\chi_l(G)$.

设 G 是平面图. 记 $F(G)$ 为 G 中面的集合. 若 $f\in F(G)$,f 的边界所包含的边数记为 $d(f)$,其中割边计两次;边界所包含的点记为 $V(f)$. 若 $v\in V(f)$,则称 v 与 f 相邻. 若两个面 f_1,f_2 有公共边,则称 f_1 与 f_2 相邻.

设 v 是图 G 的顶点,如果 $d(v)=k$ 或 $d(v)\geqslant k$,则称 v 是一个 k 度点或 k^+ 度点. 类似的称 $f\in F(f)$ 是一个 k 度面或 k^+ 度面如果 $d(f)=k$ 或 $d(f)\geqslant k$.

对于平面图 G 中的圈 C,用 $\mathrm{Int}(C)$ 表示位于圈 C 中的点集;用 $\mathrm{Out}(C)$ 表示位于圈外的点集. 若 $\mathrm{Int}(C)\neq\varnothing$ 且 $\mathrm{Out}(C)\neq\varnothing$,则称圈 C 为分离圈.

收稿日期:2010-04-20.
通讯联系人:赵春红,讲师,研究方向:图论与组合优化. E-mail: zhaochunhong10@163.com

设 $d(v)=3$ 且 v 是一个与三角形相邻的内部点,则称 v 为坏点.

Grötzsch 证明了每个不含 3-圈的平面图是 3-可着色的. 实际上,1976 年,Steinberg 猜想每个既不含 4-圈也不含 5-圈的平面图是 3-可着色的. 随后,Erdös 提出一个较 Steinberg 猜想稍弱的问题: 是否存在整数 k,使得每个不含 4 至 k 圈的平面图是 3-可着色的. Abbott 和 Zhou [2] 证明了不含 4 至 11 圈的平面图是 3-可着色的. Borodin 等人 [3] 将 k 改进至 7. Xu [4] 证明了对于每个既不含 5-圈也不含 7-圈,且不含相邻 3-圈的平面图是 3-可着色的. 由文 [4] 的结论,容易得到每个不含 4-,5-,7-圈的平面图是 3-可着色的.

设 Γ_1 是不含 4-6 圈,也不含距离小于 2 的三角形对,且每个 7-圈最多与一个三面相邻的平面图集合; Γ_2 是不含 4-圈和 5-圈,且每个 6-圈或 7-圈不与长度小于 8 的圈有公共边的平面图集合.

本文将证明如下定理:

定理 1　$\forall G \in \Gamma_1, \chi(G) \leqslant 3$.

定理 2　$\forall G \in \Gamma_2, \chi(G) \leqslant 3$.

1　定理 1 的证明

为了证明上述结论,我们给出如下的结构引理:

引理 1　$\forall G \in \Gamma_1, \delta(G) \leqslant 2$.

证明　假设结论不成立,即对于图 $G \in \Gamma_1, \delta \geqslant 3$. 我们给 G 中的顶点和面赋一个初始的权重 w. 其中对每个顶点 $w(v)=2d(v)-6$; 每个面 $w(f)=d(f)-6$. 由 Euler 公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$,于是有

$$\sum_{x \in V \cup F} w(x) = \sum_{v \in V}(2d(v)-6) + \sum_{f \in F}(d(f)-6) = -12.$$

如果我们经过一系列点和面的权重的相互调整,得到一个新的权重 $w^*(x), x \in V \cup F$,那么必然还有 $\sum w^*(x) = -12$. 而此时如果同时能保证对任意的 $x \in V \cup F$,有 $w^*(x) \geqslant 0$,那么我们将得到矛盾.

权重的调整将依照以下的规则:

(R) 每个 7^+-面转移 1 给相邻的 3 面.

注意到 $\delta(v) \geqslant 3, w^*(v)=2d(v)-6 \geqslant 0$.

令 f 是 G 的一个 k-面. 由于 G 不含 4-6 圈, $k \neq 4,5,6$.

如果 $k=3$,由 R, $w^*(f) \geqslant 3-6+3\times 1 \geqslant 0$.

如果 $k=7$,由图 G 的选择,每个 7-面至多与一个 3-面相邻,由 R, $w^*(f) \geqslant 7-6-1\times 1 \geqslant 0$.

如果 $k \geqslant 8$,由图 G 的选择, f 至多与 $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ 个 3-面相邻, $w^*(v) \geqslant k-6-\lfloor \frac{k}{3} \rfloor \times 1 \geqslant 0$.

至此,对于任意的 $x \in V \cup F$,都有 $w^*(x) \geqslant 0$. 于是

$$0 \leqslant \sum_{x \in V \cup F} w(x)^* = \sum_{x \in V \cup F} w(x) = -12,$$

矛盾,结论得证.

引理 2　$\forall G \in \Gamma_1, \chi_l(G) \leqslant 3$.

证明　反证法. 假设 G 是顶点最少的反例,即对于 $\forall v \in G$,存在一个列表 $|L(v)|=3$,使得 G 不是 L-可着色的,但是对于 G 的任何子图 H 满足 $|H|<|G|$ 均成立. 则 G 连通,否则考虑其连通分支即可. 由引理 1,对于 $\forall G \in \Gamma_1, \delta(G) \leqslant 2$. 设 v 是 G 的 2^--点,由 G 的最小性, $H=G\backslash v$ 是 L-可着色的,则 v 总是可以得到和其邻点不同的颜色,从而将 H 的 L-着色扩充到一个 G 的 L-着色.

推论 1　$\forall G \in \Gamma_1, \chi(G) \leqslant 3$.

2　定理 2 的证明

我们首先证明如下结论:

定理 3　设 $G \in \Gamma_2$,则 G 的每一个 6-11 圈的 3-正常着色 φ 都可扩充到 G.

证明　设 G 是边数和点数之和 $|E(G)|+|V(G)|=\sigma(G)$ 最少的一个极小反例,即: G 不含 4-圈和 5-圈,且每个 6-圈或 7-圈不与长度小于 8 的圈有公共边,存在 G 中的某一个 6-11 圈 f_0 的边界 D 的导出

子图的 3-着色 φ 不可扩充到整个图 G.

引理 3 G 中不可能含有长度 $\leqslant 11$ 的分离圈 S.

证明 设 G 存在着长度 $\leqslant 11$ 的分离圈 S,则由 G 的极小性,可把 D 的正常着色 φ 扩充到 $G\backslash \mathrm{Int}(S)$,再把得到的 S 的 3-着色扩充到 $G\backslash \mathrm{Ext}(S)$,从而得到整个 G 的 3-着色. 矛盾.

引理 4 G 中圈长为 6-8 的圈不含有弦,圈长为 9-11 的圈不含有非三角形的弦.

证明 由于 G 不含 4-圈和 5-圈,且每个 6-圈或 7-圈不与长度小于 8 的圈有公共边,所以 G 中圈长为 6-8 的圈不含有弦. 若 G 中圈长为 9-11 的圈含有非三角形的弦,则 G 中一定含有 4-圈或 5-圈,或者存在某个 6-圈或 7-圈与长度小于 8 的圈有公共边,也与 G 的选取矛盾.

引理 5 D 是一个简单圈,无弦.

证明 若 D 不是简单圈,则 D 一定由两个长 $\leqslant 7$ 的圈相交形成,则 G 或者含有了 4-5 圈,或者存在了某个 6-圈或 7-圈与长度小于 8 的圈有了公共边,与 G 的选取矛盾.

下证 D 无弦,由引理 4,若 D 有弦,则 $9 \leqslant |D| \leqslant 11$,且为三角形弦. 假设 uv 是 D 的三角形弦,$wv \in E(G)$,$wu \in E(G)$. 删去点 w,在边 uv 间插入点 w',得到 G',显然 $\sigma(G') < \sigma(G)$,只要给 w' 适当的颜色,则可将 D 正常着色扩充到 $D' = (D\backslash\{uv,vw,wu\}) \cup \{vw',uw'\}$,再扩充到 $G\backslash \mathrm{Ext}(D')$,从而得到图 G 的正常着色.

综合上述引理,则 D 在 G 中界定一个面,不妨设 f_0 为圈 D 界定的面且为 G 的外部面.

引理 6 G 是 2 连通的.

证明 不妨设 v 是 G 的一个割点,B 是 G 的一个包含 v 的悬挂块. 设 $G' = G\backslash(V(B)\backslash v)$,则 $G' \in \Gamma_2$. 由 G 的选取,D 的着色 φ 总可以扩充到 G' 上. 并且由 G 的选取,B 总是 3-可着色的. 我们可以调整 B 的 3-着色使得点 v 的着色与其在 G' 中所着的颜色一致,从而 φ 可以扩充到 G 上,这与 G 的选取矛盾.

引理 7 G 的每一个 2 度点都属于 D,且没有一个 2 度点与一个 3 面相关.

证明 不妨设 v 是 D 的一个 2 度点,且 v 不是 D 上的点,显然,$G\backslash v \in \Gamma_2$. 故可把 D 的 3-着色 φ 扩充到 $G\backslash v$,而与 v 的邻点只有两个,最多使用两种颜色,则可以给 v 着以第三种颜色,从而可以扩充到整个图 G 的 3-着色. 矛盾. 若有一个 2 度点与一个 3 面相关,则 D 含有了弦,与引理 5 矛盾.

引理 8 G 中的 6-圈或 7-圈都不与三角形有公共边.

证明 否则与 G 的选取矛盾.

引理 9 除 f_0 外,任何两个面都不可能正好拥有两条相邻的公共边.

证明 否则,或有割点,或有 2 度点.

一个四元组是一条路,$T = v_1v_2v_3v_4$,$T \in \mathrm{Int}(D)$,使得 $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 3$,这里 $\cdots xv_1v_2v_3v_4x'\cdots$ 是在一个面的边界上,且有三角形 tv_1v_2,$t'v_3v_4$,这里 $t \neq x'$,$t' \neq x$.

引理 10 G 中无四元组.

证明 假设 G 中有四元组 $T = v_1v_2v_3v_4$,删除 v_1,v_2,v_3,v_4 及其邻边,粘合 x 和 t,得到图 G^*,则 $G^* \in \Gamma_2$. 首先,G^* 不含 4-,5-圈. 否则,设存在一个 4-或 5-圈 $S^* = xz_1\cdots z_kt$,$3 \leqslant k \leqslant 4$. 那么 $S = xz_1\cdots z_ktv_3v_2v_1$ 分割 t' 和 x,由 G 的选择,t 不在 S 上,所以 S 是一个长度 $\leqslant 11$ 的分离圈. 同理,G^* 中不会产生新的 6-或 7-圈,也不会有重边和环. 所以 $G^* \in \Gamma_2$.

由于 $\sigma(G^*) < \sigma(G)$,若 D 的着色 φ 不会被粘合 x 和 t 所破坏,则可以把 D 的着色 φ 扩充到 G^*,从而扩充到 G. 方式如下:按 v_4,v_3,v_2,v_1 这个顺序着色,则与 G 不是 3-可着色的矛盾.

现在证明 D 的着色 φ 不会被粘合 t 和 x 所破坏. 粘合 t 和 x,会有两种结果:(a) 粘合了 D 中着以不同颜色的点;(b) 把 D 中着相同颜色的两个点连以了边. 总之,这两种情况都说明了 x 和 t 到 D 的距离之和最多为 1.

设 $D = d_1d_2\cdots d_{|D|}$,按照顺时针顺序递增排列,设 $d_{|D|}$ 是 D 中离 x 最近的点,而 d_j 是离 t 最近的点,因为 $|D| \leqslant 11$,所以 D 被 d_j 和 $d_{|D|}$ 分成两条路 P_1,P_2,设 $P_1 = d_{|D|}d_1\cdots d_j$,至多有 5 条边. 这条路与路 $d_jtv_3v_2v_1xd_{|D|}$ 相关,产生一个圈长至多为 11 的圈 C,分割 t' 与 v_4,矛盾.

下面,我们将用权转移的方法证明反例 G 不存在,从而定理得证.

对于 $\forall x \in (V(G) \cup F(G))\backslash\{f_0\}$,令 $w(x) = d(x) - 4$,对于 f_0,令 $w(x) = d(x) + 4$.

由 Euler 公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=2$,得 $\sum_{x\in V\cup F} w(x)=0$.

定义如下权转移规则:

(R_1) 每一个三面从其相关点处收获 $\frac{1}{3}$.

(R_2) v 是与内部非三角形面 f 相关的顶点:

(a) 设 $d(v)=2$,则 f 给予 v 点 $\frac{2}{3}$;

(b) 设 $d(v)=3$,且 v 是内部点:若 v 是坏点,则 f 给予 v 点 $\frac{2}{3}$,否则 f 给予 v 点 $\frac{1}{3}$;

(c) 设 $d(v)\geqslant 4$:若 v 是内部点且 v 不与3-面相关,则 f 给予 v 点 $\frac{1}{3}$;若 v 是内部点,v 与3-面相关,且 f 与这个3-面相邻,则 f 给予 v 点 $\frac{1}{3}$;若 v 是外部点,与3-面相关,但 f 与这个3-面不相邻,则 f 从 v 点收获 $\frac{1}{3}$.

(R_3) 外部面 f_0 给 D 的每个点 $\frac{4}{3}$.

记每一个元素的新权重为 $w^*(x)$,其中 $x\in V(G)\cup F(G)$.

引理11 $\forall v\in V(G)$,$w^*(v)\geqslant 0$.

证明 $d(v)=2$,则 $v\in D$ 且不可能与一个3-面相关,所以,由 R_2 和 R_3,有 $w^*(v)=2-4+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=0$.

$d(v)=3$. 若 v 是外部点,则 v 至多与一个三面相关,由 R_3,v 可从外部面得到 $\frac{4}{3}$,由 R_1,要给予相关的三面 $\frac{1}{3}$,$w^*(v)\geqslant 3-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=0$.

若 v 是内部点,如果 v 是坏点,则与 v 相关的面中必有2个非三角形的面,由 R_1,R_2,$w^*(v)\geqslant 3-4+\frac{2}{3}\times 2-\frac{1}{3}=0$;如果 v 不是坏点,由 R_2,$w^*(v)=3-4+\frac{1}{3}\times 3=0$.

$d(v)=4$. 若 v 是外部点. 如果 v 与1个三面相关且三面与 D 相邻,则与 v 相关的另外2个面1个与三面相邻,1个与三面不相邻,由 R_3,1个面既无收获也不给予,1个给予 f 面 $\frac{1}{3}$,则 $w^*(v)=4-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}>0$;如果 v 与1个三面相关且三面不与 D 相邻,则与 v 相关的另外2个面既无收获也不给予,$w^*(v)=4-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}>0$;如果 v 不与三面相关,由 R_3,$w^*(v)=4-4+\frac{4}{3}>0$.

若 v 不是外部点. 如果 v 与1个三面相关,由 R_1,v 要给予相关的三面 $\frac{1}{3}$,而与 v 相关的面中除这个三面外必有3个非三角形的面,其中2个与三面相邻,1个与三面不相邻,由 R_3,1个面既无收获也不给予,2个面给予 v 点各 $\frac{1}{3}$,$w^*(v)=4-4-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 2>0$. 如果 v 不与三面相关,$w^*(v)=4-4=0$.

$d(v)=5$. 若 v 是内部点,由 R_1 和 R_3,v 至多给2个3-面 $\frac{1}{3}$,同时至多给1个非3-面 $\frac{1}{3}$,$w^*(v)\geqslant 5-4-\frac{1}{3}\times 3=0$. 若 v 是外部点,由 R_1 和 R_3,$w^*(v)\geqslant 5-4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\times 5=0$.

$d(v)\geqslant 6$. 由 R_1 和 R_3,v 至多给予 $d(v)$ 个 $\frac{1}{3}$,$w^*(v)\geqslant d(v)-4+d(v)\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

引理12 $w^*(f_0)>0$.

证明 由 R_3 和 $6 \leqslant |f_0| \leqslant 11$,$w^*(f_0) = d(f_0) + 4 - d(f_0) \times \frac{4}{3} \geqslant 0$.

引理13 $\forall f \neq f_0$,$w^*(f) \geqslant 0$.

证明 $d(f) = 3$,由 R_1,$w^*(f) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

设 $d(f) \geqslant 8$,若 f 与一个2度点 v 相邻,显然,由 R_2,f 给予 v 点 $\frac{2}{3}$,且 f 与 D 相关的公共点中有2个点的度 $\geqslant 3$,这2个点也是 D 边界上2度点形成的最大路径的端点,且这2个点从面既不给予也不收获. 设由这2个点划分的 D 边界上的另一段路径为 P,且最多 P 上的每个点的度都为3,且都与1个三角形相邻,则 $w^*(f) = d(f) - 4 + (d(f) - 2) \times \frac{2}{3} \geqslant 0$.

设 $d(f) = 6$ 或 $d(f) = 7$,若 f 与1个2度点 v 相邻,显然,由 R_2,f 给予 v 点 $\frac{2}{3}$,且 f 与 D 相关的公共点中有2个点的度 $\geqslant 3$,这2个点也是 D 边界上2度点形成的最大路径的端点,且这2个点从面 f 既不给予也不收获,设由这2个点划分的 D 边界上的另一段路径为 P,P 上的每个点都不可能与1个三角形相邻,所以 f 给予 P 上的点 $\frac{1}{3}$. 我们按 f 中2度点的个数分下列情况讨论:

(1) f 中2度点的个数 $\leqslant 2$,$w^*(f) = d(f) - 4 - 2 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$ 或者 $w^*(f) = d(f) - 4 - 1 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

(2) f 中2度点的个数为3. 若 $d(f) = 6$,则令 x 是 f 中不在 D 上的点,因为 $d(x) \geqslant 3$,$6 \leqslant |D| \leqslant 11$,则 G 中存在长度 $\leqslant 11$ 的分离圈,或者 G 含4-圈,5-圈,或者存在6-圈,7-圈与长度小于8的圈有公共边,与 G 的选取矛盾. 若 $d(f) = 7$,$w^*(f) = d(f) - 4 - 3 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

(3) f 中2度点的个数为4. 则 $d(f) \neq 6$,否则,$P \cup (D \backslash f)$ 形成5-圈,与 G 的选取矛盾. 若 $d(f) = 7$,$w^*(f) = d(f) - 4 - 4 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

(4) f 中2度点的个数为5. 同情况(3). $d(f) \neq 6,7$.

故,以下总假设非外部面上没有2度点.

设 $d(f) = 6$,由于 G 中的6面不与三面相邻,则 f 最多给每个点 $\frac{1}{3}$,则 $w^*(f) \geqslant 6 - 4 - 6 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

设 $d(f) = 7$,由于 G 中的7面不与三面相邻,则 f 最多给每个点 $\frac{1}{3}$,则 $w^*(f) \geqslant 7 - 4 - 7 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

设 $d(f) = 8$. 我们分下列情况讨论:

(1) 若 f 给其至少4个点最多都是 $\frac{1}{3}$,或者至少有2个点从 f 处既不收获也不给予,则 $w^*(f) \geqslant 8 - 4 - 4 \times \frac{2}{3} - 4 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$ 或者 $w^*(f) \geqslant 8 - 4 - 6 \times \frac{2}{3} \geqslant 0$.

(2) 若 f 中有1个点 v 属于 D,则该点不是坏点,$d(v) \geqslant 3$. 若 $d(v) = 3$,则该点从 f 处既不收获也不给予,且 f 中与 v 相邻的点中也有1个点属于 D,加上其他的6个点不可能都是坏点,$w^*(f) \geqslant 8 - 4 - 5 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

若 $d(v) \geqslant 4$,且 v 不与三面相关,则该点从 f 处既不收获也不给予,而其他7个点至少有两个点不是坏点,$w^*(f) \geqslant 8 - 4 - 5 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{3} \geqslant 0$.

若 $d(v) \geqslant 4$,且 v 与三面相关,我们分以下子情况讨论:

(2_1) f与三面不相邻,则f从v收获$\frac{1}{3}$,而另外7个点不可能都是坏点,则$w^*(f) \geqslant 8-4-6\times\frac{2}{3}-1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

(2_2) f与三面相邻,则点v既无收获也不给予,而另外7个点不可能都是坏点. 若有6个坏点,必有4个三角形与f相邻,则另一点u,必然$d(u)\geqslant 4$,则由R_2,f从v收获$\frac{1}{3}$,则$w^*(f)\geqslant 8-4-6\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}\geqslant 0$. 若有5个坏点,则另2个点最多从$f$面收获$\frac{1}{3}$,则$w^*(f)\geqslant 8-4-5\times\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{3}\geqslant 0$. 若只有4个及其以下的坏点,则$w^*(f)\geqslant 8-4-4\times\frac{2}{3}-4\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

(3) 不妨设f中的点都不属于D,且或者有6个坏点,或者有5个坏点.

若f有6个坏点,则f必然与4个三面相邻,则另2个点的度$\geqslant 4$,则这2个点给予f面$\frac{1}{3}$,则$w^*(f)\geqslant 8-4-6\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

若f有5个坏点,或者f与4个三面相邻,则另3个点的度$\geqslant 4$,则这3个点给予f面$\frac{1}{3}$,则$w^*(f)\geqslant 8-4-5\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{3}\geqslant 0$. 或者$f$与3个三面相邻,则相关的6个点中必有1个点的度$\geqslant 4$,该点给予$f$面$\frac{1}{3}$,则$w^*(f)\geqslant 8-4-5\times\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

设$d(f)=9$. 由于f最多可与4个三角形相关,但由于G无四元组,所以不可能有连续的5个坏点出现,则8个公共点中必然有2个非坏点,则$w^*(f)\geqslant 9-4-6\times\frac{2}{3}-3\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

设$d(f)=10$. 由于f最多可与5个三角形相关,但由于G无四元组,所以不可能有连续的5个坏点出现,则10个公共点中必然有2个非坏点,则$w^*(f)\geqslant 10-4-8\times\frac{2}{3}-2\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

设$d(f)=11$. 由于f最多可与5个三角形相关,最多拥有10个公共点,则剩下的1个点最多从f面处收获$\frac{1}{3}$,$w^*(f)\geqslant 11-4-10\times\frac{2}{3}-1\times\frac{1}{3}\geqslant 0$.

设$d(f)\geqslant 12$. 最多f的每个点都从f面处收获$\frac{2}{3}$,$w^*(f)\geqslant d(f)-4-d(f)\times\frac{2}{3}\geqslant 0$.

根据前述几个引理,新权重之和大于零,说明极小反例G不存在,从而定理3得证.

推论2 $\forall G\in T_2, x(G)\leqslant 3$.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications [M]. New York: Macmillan Ltd Press, 1976.
[2] Abbott H L, Zhou B. Om small faces in 4-critical graphs [J]. Ars Combin, 1991, 32: 203-207.
[3] Borodin O V, Glebov A N, Raspaud A, et al. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable [J]. J Combin Theroy Ser B, 2005, 93: 303-311.
[4] Xu B. On 3-colorable plane graphs without 5-and 7-cyclesm [J]. J Combin Thery Ser B, 2006, 96: 958-963.

[责任编辑:丁 蓉]