第 34 卷第 3 期
2011 年 9 月
南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)
Vol. 34 No. 3
Sept, 2011

最大度是 6 且不含有弦的小圈的可平面图的边染色

倪伟平

(枣庄学院数学与统计学院,山东 枣庄 277160)

[摘要] 对于最大度是 Δ 的可平面图 G,如果 $\chi'(G)=\Delta$,称 G 为第一类图;如果 $\chi'(G)=\Delta+1$,称 G 为第二类图,$\chi'(G)$ 表示 G 的边染色数. 1965 年,Vizing 证明了任何一个 $\Delta\geqslant 8$ 的可平面图均是第一类图,并猜想 $\Delta=6$ 的可平面图也是第一类图. 本文运用 Discharge 方法证明了最大度是 6,且不含有弦的 k-圈的可平面图是第一类图 $(4\leqslant k\leqslant 7)$.

[关键词] 平面图,边染色,最大度,圈
[中图分类号] O157.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)03-0019-06

Edge Coloring of Planar Graphs With $\Delta=6$ Without Short Cycles Contain Chords

Ni Weiping

(School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang, 277160, China)

Abstract: Let G be a planar graph of maximum degree Δ, G is said to be class 1 if $\chi'(G)=\Delta$ and class 2 if $\chi'(G)=\Delta+1$, where $\chi'(G)$ denotes the chromatic index of G. In 1965, Vizing proved that every planar graph of maximum degree at least eight is of class 1. By applying a Discharging method, we prove that every simple planar graph G with $\Delta=6$ is of class 1, if G does not contain chordal-k-cycles $(4\leqslant k\leqslant 7)$.

Key words: planar graph, edge coloring, maximum degree, cycle

文中考虑的图都是简单、无向有限图. 若图 G 可以表示在平面上,并且任意两条边仅在其端点处才可能相交,则称 G 是可平面图,图 G 的这种平面上的表示法称为 G 的一个平面嵌入,或称为平面图. 分别用符号 $V(G)$、$E(G)$、$F(G)$、$\Delta(G)$(简记为 Δ)表示 G 的顶点集合、边集合、面集合、最大度. 用 $d(x)$ 表示 x 在 G 中的度数,其中 $x\in V(G)\cup F(G)$. 用 $d_k(v)$ 表示顶点 v 的度数为 k 的邻点的个数,$d_{k^+}(v)$ 表示顶点 v 的度数不小于 k 的邻点的个数. 度数为 k 的点(或面)称为 k-点(或 k-面),度数不小于 k 的点(或面)称为 k^+-点(或 k^+-面).

若存在一个映射 $\phi: E(G)\to\{1,2,\cdots k\}$,对 G 中任意两条相邻接的边 e_1 和 e_2,有 $\phi(e_1)\neq\phi(e_2)$,则称 G 是 k-边可染色的,使得图 G 具有 k-边可染色的最小的正整数 k 定义为 G 的边色数,记作 $\chi'(G)$. 若图 G 满足 $\chi'(G)=\Delta(G)$ 称 G 为第一类图,若 $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ 称 G 为第二类图. 若图 G 是连通的第二类图,并且去掉任意边 $e\in G$ 后,$G-e$ 是第一类图,则称 G 是一个临界图. 最大度为 Δ 的临界图简称 Δ-临界图. 显然,每个 k-临界图 $(k\geqslant 2)$ 是 2-连通的.

若一个 3-面 f 关联 3 个度数分别为 i,j,k 的顶点,其中 $i\leqslant j\leqslant k$,则称 f 为 (i,j,k)-面. G 中的任意两个圈(或面)称为相邻接的,如果它们至少有一条公共边. G 中的任意两个圈(或面)称为相交的,若它们关联于同一个顶点.

Vizing [1,2] 证明了每个 $\Delta\geqslant 8$ 的简单平面图是第一类图,同时猜想这个结论对 $\Delta\geqslant 6$ 的简单平面图也是成立的,并给出了 $\Delta\in\{2,3,4,5\}$ 的简单平面图存在第二类的例子. 文献 [3,4] 独立证明了 $\Delta=7$ 时

收稿日期: 2010-02-16.
基金项目:国家自然科学基金(61075033).
通讯联系人:倪伟平,硕士,副教授,研究方向:图论. E-mail: niweipingdd@yahoo.com.cn

Vizing猜想成立. 因此,Vizing猜想仅剩下当$\Delta = 6$时的情形尚未解决. 文献[5]证明了每个$\Delta = 6$,且无长度为k-圈($3 \leqslant k \leqslant 5$)的简单平面图是第一类图. 文献[6]进一步证明了若$\Delta = 6$的简单平面图G满足下面条件之一,则它是第一类的:(1)没有6-圈.(2)没有4-圈带一条弦,等价地,没有相邻三角形.(3)不含有弦的5-圈和有弦的6-圈. 文献[7]证明了若一个围长为g的简单平面图G满足下列条件之一,则G是第一类图:(1)$\Delta \geqslant 5$且$g \geqslant 4$.(2)$\Delta \geqslant 4$且$g \geqslant 5$.(3)$\Delta \geqslant 3$且$g \geqslant 8$. 文献[8]证明了$\Delta = 6$的简单平面图G若不含有弦的5-圈或不含有弦的6-圈,则它是第一类图. 下面将运用Discharge方法及临界图的重要性质进一步证明,最大度是6且不含有弦的7圈的可平面图是第一类图.

1 临界图的性质

引理1[2] 设G是一个Δ-临界图,$\Delta \geqslant 3$且$v \in V(G)$,$u \in V(G)$那么

(1)v至少相邻2个Δ-点,至多邻接一个度为2的点.

(2)如果$d_k(v) \geqslant 1$ $k \neq \Delta$,则$d_\Delta(v) \geqslant \Delta - k + 1$.

(3)如果$uv \in E(G)$,有$d(u) + d(v) \geqslant \Delta + 2$.

对一个6-临界图G和$v \in V(G)$),根据引理1,有:

(P1)如果$d(v) = 2$,那么v相邻2个6-点.

(P2)如果$d(v) = 3$,那么v只能相邻5^+-点,且若$d_5(v) = 1$,则$d_6(v) = 2$.

(P3)如果$d(v) = 4$,那么v只能相邻4^+-点,且若$d_4(v) = 1$,则$d_6(v) = 3$. 若$d_5(v) \geqslant 1$,则$d_6(v) \geqslant 2$.

(P4)如果$d(v) = 5$,那么v只能相邻3^+-点,且若$d_3(v) = 1$,则$d_6(v) = 4$. 若$d_4(v) \geqslant 1$,则$d_6(v) \geqslant 3$. 若$d_5(v) \geqslant 1$,则$d_6(v) \geqslant 2$.

(P5)设$d(v) = 6$,若$d_2(v) = 1$,则$d_6(v) = 5$. 若$d_3(v) \geqslant 1$,则$d_6(v) \geqslant 4$. 若$d_4(v) \geqslant 1$,则$d_6(v) \geqslant 3$.

引理2[4] 设G是一个Δ-临界图,$xy \in E(G)$,若$d(x) + d(y) = \Delta + 2$,则

(1)每个$v \in N(\{x,y\}) \backslash \{x,y\}$是$\Delta$-点.

(2)每个$v \in N(N(\{x,y\})) \backslash \{x,y\}$满足$d(v) \geqslant \Delta - 1$.

(3)如果$d(x) < \Delta$,$d(y) < \Delta$,则每个$v \in N(N(\{x,y\})) \backslash \{x,y\}$是$\Delta$-点.

引理3[3] 如果图G包含3个不同的点x,y,z满足下列2个条件,那么G不是Δ-临界图:

(1)$xy \in E(G)$,$xz \in E(G)$,$d(z) < 2\Delta - d(x) - d(y) + 2$.

(2)xz包含在至少$d(x) + d(y) - \Delta - 2$个不包含顶点y的三角形中.

2 最大度是6且不含有弦的k-圈($4 \leqslant k \leqslant 7$)的可平面图是第一类图

定理1 最大度是6且不含有弦的7-圈的可平面图G是第一类图.

证明 假设定理不成立,即G是第二类图. 不失一般性,可以假设G是6-临界简单平面图,那么,G显然是2-连通的. 因此G的每个面的边界是一个圈,且每条边位于2个不同面的边界上. 设s是G中的顶点v所关联的3-面的个数,由此有下面的断言:

断言1 (a)G中每个度为6的顶点v至多关联4个3-面,即$s \leqslant 4$.(b)若6-点v的邻接顶点的度至少是3,则当$s = 4$时,v还关联2个7^+-面,当$s = 3$时,v至少关联1个7^+-面,当$s = 2$时,v至少关联1个5^+-面.(c)若6-点v与2-点邻接,则当$s \geqslant 3$时,v至少关联1个7^+-面.

此结论由临界图的性质容易得出,这里不再赘述.

将Euler公式进行简单变形可得$\sum_{x \in V}(d(x) - 4) + \sum_{x \in F}(d(x) - 4) = -8$.

对任意$x \in V(G) \cup F(G)$,定义初值$ch(x)$为

$$ch(x) = \begin{cases} d(x) - 4, & x \in V(G), \\ d(x) - 4, & x \in F(G). \end{cases}$$

下面根据给出的交换规则(Discharging rules),对每一个$x \in V(G) \cup F(G)$的$ch(x)$进行调整,从而

得到新的初值 $ch'(x)$. 因为所作的调整始终保证不影响其和式的值,所以有

$$\sum_{x \in V \cup F} ch(x) = \sum_{x \in V \cup F} ch'(x) = -8.$$

如果可以证明对于每一个 $x \in V(G) \cup F(G)$,都有 $ch'(x) \geqslant 0$,则与上式矛盾,从而定理得证.

定义规则如下:

R1 对每个 6-点 v,v 分值如下:

R1-1 v 分值 1 给其邻接的每个 2-点. 分值$\frac{1}{3}$给其邻接的每个 3-点. v 分值$\frac{1}{3}$给其邻接的每个 5-点.

R1-2 若 v 邻接 4-点 u,u 又与 4-点 w 邻接,则 v 分值$\frac{2}{9}$给 u.

R1-3 设 v 与 6-点 u 邻接,u 与 2-点 x 邻接,而 v 与 x 不邻接,则 v 分值$\frac{1}{56}$给 u.

R2 对每个 5-点 v,v 分值$\frac{1}{3}$给其邻接的每个 3-点.

R3 对每个度为 3 的面 f,设 x,y,z 是 f 的 3 个不同顶点,且 $d(x) \leqslant d(y) \leqslant d(z)$,

R3-1 若 f 是 $(k,6,6)$-面,$k = 2,3,4$,则 y,z 分别分值$\frac{1}{2}$给 f.

R3-2 若 f 是 $(4,4,6)$-面,则 x,y,z 分别分值$\frac{1}{3}$给 f.

R3-3 若 f 是 $(k,5,6)$-面,$k = 3,4$,则 y 分值$\frac{1}{3}$,z 分值$\frac{2}{3}$给 f.

R3-4 若 f 是 $(4,5,5)$-面,则 y,z 分别分值$\frac{1}{2}$给 f.

R3-5 若 f 的顶点的度至少为 5,则 x,y,z 分别分值$\frac{1}{3}$给 f.

R4 对每个度至少为 5 的面 f,f 分值$\frac{d(f)-4}{d(f)}$给其关联的每个顶点.

对每个 $v \in V(G)$,有 $d(v) \geqslant 2$. 设 $d(v) = 2$,则 $ch(v) = -2$. 由(P1)知,v 与两个 6-点相邻接,由 R1-1,有 $ch'(v) = -2 + 1 \times 2 = 0$.

设 $d(v) = 3$,则 $ch(v) = -1$. 由(P2),v 与 3 个 5^+-点相邻接,由 R1-1 和 R2,v 得值$\frac{1}{3} \times 3$,所以,有 $ch'(v) = -1 + \frac{1}{3} \times 3 = 0$.

设 $d(v) = 4$,则 $ch(v) = 0$. 若 v 与 4-点相邻接,由引理 2,有 $d_6(v) = 3$,由 R1-2,v 得值$\frac{2}{9} \times 3$. 由 R3-2,v 至多分值$\frac{1}{3} \times 2$ 给与其关联的$(4,4,6)$-面,所以 $ch'(v) \geqslant \frac{2}{9} \times 3 - \frac{1}{3} \times 2 = 0$.

设 $d(v) = 5$,则 $ch(v) = 1$. 由(P4)知,$\min\{d(u) \mid u \in N(v)\} \geqslant 3$ 且至多有一个 3-点,至少有 2 个 6-点与 v 邻接.

若 $d_3(v) = 1$,根据(P4):$d_6(v) = 4$,由 R1-1,v 得值$\frac{1}{3} \times 4$. 因 G 中不含有弦的 7-圈,所以 v 至多关联 5 个 3-面,由 R2、R3-3、R3-5,v 至多分出值$\frac{1}{3} \times 6$,所以,$ch'(v) \geqslant 1 + \frac{1}{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times 6 > 0$.

若 $\min\{d(u) \mid u \in N(v)\} = 4$,则 $d_6(v) \geqslant 3$,由 R1-1,v 至少得值$\frac{1}{3} \times 3$. 假如 $d_4(v) = 2$,由引理 3,v 至多关联 2 个 3-面,皆为$(5,6,6)$-面,由 R3-5,有 $ch'(v) \geqslant 1 - \frac{1}{3} \times 2 > 0$. 假如 $d_4(v) = 1$,因 G 中不含有弦的 7-圈,所以 v 至多关联 5 个 3-面,由 R3-3,、R3-4、R3-5,v 至多分出值$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 4$ 给其关联的 3-面,

所以,$ch'(v) \geqslant 1+\frac{1}{3}\times 3-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 4\right)>0$.

若 $\min\{d(u) \mid u \in N(v)\} \geqslant 5$,则 $d_6(v) \geqslant 2$,由 R1-1,v 至少得值$\frac{1}{3}\times 2$. 因 G 中不含有弦的7-圈,所以 v 至多关联5个3-面,由 R3-5,v 至多分出值$\frac{1}{3}\times 5$ 给其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 1+\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}\times 5=0$.

设 $d(v)=6$,则 $ch(v)=2$. 由(P5)知,$\min\{d(u) \mid u \in N(v)\} \geqslant 2$ 且 v 至多与1个2-点,至少与2个6-点邻接.

若 $d_2(v)=1$,根据(P5):$d_6(v)=5$,由引理2,对任意 $u \in N(N(\{v,x\}))\setminus\{v,x\}$ 有 $d(u) \geqslant 5$. 由(a)知:$s \leqslant 4$. 当 $s \geqslant 3$ 时,由结论(c)及 R4,v 至少得值$\frac{3}{7}$,由 R1-3,v 至少得值$\frac{1}{56}\times 4$,由 R1-1,v 至多分值1给其邻接的2-点,由 R3-1、R3-5,v 至多分值$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 3$ 给其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 2+\frac{3}{7}+\frac{1}{56}\times 4-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 3\right)=0$. 当 $s \leqslant 2$ 时,由 R1-1、R3-1、R3-5,v 至多分值 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 给其邻接的2-点及其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)>0$.

若 $\min\{d(u) \mid u \in N(v)\}=3$,由(P5),有 $d_6(v) \geqslant 4$.

假如 $d_3(v)=2$ 或 $d_3(v)=1$ 且 $d_4(v)=1$,根据引理3,v 至多关联3个度为3的面,皆为(6,6,6)-面,由 R1-1、R3-5,v 至多分值$\frac{1}{3}\times 5$ 给其邻接的3-点及其关联的3-面,所以 $ch'(v) \geqslant 2-\frac{1}{3}\times 5>0$.

假如 $d_3(v)=1$ 且 $d_4(v)=0$,则 $d_5(v) \leqslant 1$,由 R1-1,v 至多分出值$\frac{1}{3}\times 2$ 给其邻接的3-点及5-点. 由(a)知:$s \leqslant 4$. 当 $s=4$ 时,由(b)及 R4,v 得值$\frac{3}{7}\times 2$,由 R3-1、R3-3、R3-5,v 至多分值$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 2$ 给其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 2+\frac{3}{7}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 4+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)>0$. 当 $s=3$ 时,由(b)及 R4,v 得值$\frac{3}{7}$,再由 R1-1、R3-1、R3-3、R3-5,有 $ch'(v) \geqslant 2+\frac{3}{7}-\left(\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)>0$. 当 $s \leqslant 2$ 时,由 R1-1、R3-1、R3-3、R3-5,有 $ch'(v) \geqslant 2-\left(\frac{1}{3}\times 2+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)>0$.

若 $\min\{d(u) \mid u \in N(v)\}=4$,由(P5),有 $d_4(v) \leqslant 3$,$d_5(v) \leqslant 2$,$d_6(v) \geqslant 3$. 由(a)有 $s \leqslant 4$.

假如 $d_4(v)=3$,由引理2知:v 不满足 R1-2 的分值条件. 由 R3-1、R3-5,v 至多分值$\frac{1}{2}\times 4$ 给其关联的3-面,所以 $ch'(v) \geqslant 2-\frac{1}{2}\times 4=0$.

假如 $d_4(v)=2$ 且 $d_5(v)=1$,并设此5-点为 u,由引理2知:v 不满足 R1-2 的分值条件,由引理3知:v 不能与2个邻接于 uv 边的(4,5,6)-面关联. 当 $s=4$ 时,由(b)及 R4,v 得值$\frac{3}{7}\times 2$,由 R1-1,v 分值$\frac{1}{3}$ 给其邻接的5-点,由 R3-1、R3-3,R3-5,v 至多分值$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 3$ 给其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 2+\frac{3}{7}\times 2-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\right)>0$. 当 $s \leqslant 3$ 时,由 R1-1,v 分值$\frac{1}{3}$ 给其邻接的5-点,由 R3-1、R3-3,R3-5,v 至多分值$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2$ 给其关联的3-面,所以,$ch'(v) \geqslant 2-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times 2\right)=0$.

假如 $d_4(v)=2$ 且 $d_6(v)=4$,由(a)知:$s \leqslant 4$. 当 $s \geqslant 3$ 时,由(b)及 R4,v 至少得值$\frac{3}{7}$,若 v 关联(4,

4,6)-面,由R1-2,v分值$\frac{2}{9}\times 2$给其邻接的4-点,由R3-1、R3-2,R3-5,v至多分值$\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times 2$给其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}-\left(\frac{2}{9}\times 2+\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times 2\right)>0$. 若$v$不关联(4,4,6)-面,则由引理2知:$v$不满足R1-2的分值条件,由R3-1、R3-2,R3-5,v至多分值$\frac{1}{2}\times 4$给其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\times 4>0$. 当$s\leqslant 2$时,$v$至多分值$\frac{2}{9}\times 2+\frac{1}{2}\times 2$给其邻接的4-点及其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2-\left(\frac{2}{9}\times 2+\frac{1}{2}\times 2\right)>0$.

假如$d_4(v)=1$,且$d_5(v)\geqslant 1$时,由R1-1,v至多分值$\frac{1}{3}\times 2$给其邻接的5-点. 由(a)知:$s\leqslant 4$. 若$s=4$,由(b)及R4,v得值$\frac{3}{7}\times 2$,由R3-1、R3-3、R3-5,v至多分值$\frac{1}{3}\times 2+\frac{2}{3}\times 2$给其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 4+\frac{2}{3}\times 2\right)>0$. 若$s=3$,由(b)及R4,$v$得值$\frac{3}{7}$,由R3-1、R3-3、R3-5,$v$至多分值$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 2$给其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}-\left(\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times 2\right)>0$. 若$s\leqslant 2$,由R3-1、R3-3、R3-5,有$ch'(v)\geqslant 2-\left(\frac{1}{3}\times 2+\frac{2}{3}\times 2\right)=0$.

假如$d_4(v)=1$,且$d_6(v)=5$时,由R1-2,v至多分值$\frac{2}{9}$给其邻接的4-点,由R3-1、R3-5,v至多分值$\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times 2$给其关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2-\left(\frac{1}{3}\times 2+\frac{1}{2}\times 2+\frac{2}{9}\right)>0$.

若$\min\{d(u)\mid u\in N(v)\}\geqslant 5$,由引理1,$v$至多与4个5-点,至少与2个6-点邻接. 由(a)知:$s\leqslant 4$. 当$s=4$时,由(b)及R4,v得值$\frac{3}{7}\times 2$,由R1-1、R1-3、R3-5,v至多分值$\frac{1}{3}\times 8+\frac{1}{56}\times 2$给其邻接的5-点、6-点及关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}\times 2-\left(\frac{1}{3}\times 8+\frac{1}{56}\times 2\right)>0$. 当$s=3$时,由(b)及R4,$v$至少得值$\frac{3}{7}$,由R1-1、R1-3、R3-5,$v$至多分值$\frac{1}{3}\times 7+\frac{1}{56}\times 2$给其邻接的5-点、6-点及关联的3-面,所以$ch'(v)\geqslant 2+\frac{3}{7}-\left(\frac{1}{3}\times 7+\frac{1}{56}\times 2\right)>0$. 当$s=2$时,由(b)及R4,$v$至少得值$\frac{1}{5}$,再由R1-1、R1-3、R3-5,有$ch'(v)\geqslant 2+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\times 6+\frac{1}{56}\times 2\right)>0$. 当$s\leqslant 1$时,由R1-1、R1-3、R3-5,有$ch'(v)\geqslant 2-\left(\frac{1}{3}\times 5+\frac{1}{56}\times 2\right)>0$.

假设$f\in F(G)$,则$d(f)\geqslant 3$.

若$d(f)\geqslant 5$,则$ch(f)\geqslant 1$,由R4,有$ch'(f)=d(f)-4-d(f)\times\frac{d(f)-4}{d(f)}=0$;

若$d(f)=4$,则$ch(f)=0$,取$ch'(f)=0$;

若$d(f)=3$,则$ch(f)=-1$,根据引理1、引理2、引理3知,f只能是下面几种形式之一:(2,6,6)-面,(3,5,6)-面,(3,6,6)-面,(4,4,6)-面,(4,5,5)-面,(4,5,6)-面,(4,6,6)-面,(5,5,5)-面,(5,5,6)-面,(5,6,6)-面,(6,6,6)-面.

假如f的顶点的度至少是5,由R3-5,有$ch'(f)=-1+\frac{1}{3}\times 3=0$;

若f是(2,6,6)-面、(3,6,6)-面、(4,6,6)-面,由R3-1,有$ch'(f)=-1+\frac{1}{2}\times 2=0$;

若f是(4,4,6)-面,由R3-2,有$ch'(f)=-1+\frac{1}{3}\times 3=0$;

若f是(3,5,6)-面、(4,5,6)-面,由R3-3,有$ch'(f) = -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$;

若f是(4,5,5)-面,由R3-4,有$ch'(f) = -1 + \frac{1}{2} \times 2 = 0$. 定理1得证.

由文献[6]、[8]知最大度是6且不含有弦的4-圈,或不含有弦的5-圈,或不含有弦的6-圈的可平面图G是第一类图. 因此得到下面的结论:

定理2　设G是最大度为6的可平面图,若G不含有弦的k圈,$4 \leqslant k \leqslant 7$,则$G$是第一类图.

[参考文献]

[1] Vizing V G. On an estimate of the chromatic index of a p-graph[J]. Diskret Analiz, 1964, 3(1): 25-30.
[2] Vizing V G. Critical graphs with given chromatic class[J]. Diskret Analiz, 1965, 5(1): 9-17.
[3] Sanders D P, Zhao Y. Planar graphs of maximum degree seven are class 1[J]. Combin Theory Ser B, 2001, 83(2): 201-212.
[4] Zhang L. Every planar with maximum degree 7 is of class 1[J]. Graphs Combin, 2000, 16(4): 467-495.
[5] Zhou G. A note on graphs of class 1[J]. Discrete Math, 2003, 263(1/3): 339-345.
[6] Bu Y, Wang W. Some sufficient conditions for a planar graph of maximum degree six to be class 1[J]. Discrete Math, 2006, 306(13): 1 440-1 445.
[7] Li X, Luo R. Edge coloring of embedded graphs with large girth[J]. Graphs Combin, 2003, 19(3): 393-401.
[8] Wang Weifan, Chen Yongzhu. A sufficient condition for a planar graph to be class 1[J]. Theoret Computer Sci, 2007, 385(1/3): 71-77.

责任编辑:丁　蓉