媒体报导影响下的 SEI 模型的定性分析

田 露

(南京理工大学紫金学院,江苏 南京 210046)

[摘要] 考虑了媒体报导影响下的 SEI 模型,并且假设传染率为 $(\mu_1-\mu_2 f(I))SI$. 通过构造 Liapunov 函数得到了平衡点全局渐近稳定的充分条件.

[关键词] 全局稳定,Liapunov 函数,SEI 模型,媒体报导

[中图分类号] O175.13 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2011)03-0032-04

Qualitative Analysis of SEI Model With the Impact of Media

Tian Lu

(Zijin College, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210046, China)

Abstract: We consider global properties for a SEI model with impact of media, assuming that the rate of transmission is controlled by an unspecified function $(\mu_1-\mu_2 f(I))SI$. We develop Liapunov functions which enable us to obtain sufficient conditions of a globally asymptotically stable equilibrium state.

Key words: global stability, Liapunov function, SEI model, impact of media

长期以来,对传染病的控制一直是相关方面专家学者研究的热点. 影响传染病传播的因素很多,比如医疗水平、媒体报导、天气等等,如果能协调好这些因素,就能很好地控制传染病的蔓延,减少疾病的感染率. 当某种疾病爆发的时候,比如 2003 年的 SARS,人们通过媒体了解到疾病的情况,引起关注并且提高了疾病的防范意识,这就在一定程度上减少了疾病的感染率. 文献 [1] 考虑了媒体报导这个因素,并选取了 $\beta(I)=\mu\exp(-mI)$ 作为感染率函数. 文献 [2] 选取 $\beta(I)=\beta_1-\beta_2\dfrac{I}{m+I}$ 作为感染率函数,当 $I\to\infty$ 时,传染率减少量的最大值是 β_2,得出当 $R_0<1$ 时无病平衡点是全局稳定的; 当 $R_0>1$ 时地方病平衡点只是局部稳定的.

本文考虑在某一地区内疾病的传播. 我们将人群分成以下几类: (1) $S(t)$,易感者的人数; (2) $E(t)$,处于潜伏期的人数; (3) $I(t)$,感染者的人数.

在这里我们假设感染者康复后有免疫性,因此不会再成为易感者. 我们假设在某一区域内总人数是按 Logistic 增长. 在典型的 SEI 模型基础上,建立了下面考虑媒体宣传报导作用的更一般的模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=r-dS-(\mu_1-\mu_2 f(I))SI,\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=(\mu_1-\mu_2 f(I))SI-(c+d)E,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=cE-\gamma I,\end{cases}\tag{1}$$

其中函数 $f(I)$ 满足 $f(0)=0$,$f'(I)\geqslant 0$,$\lim\limits_{I\to\infty}f(I)=1$,(1) 中所有的参数假设都是正数并且参数表示的意义如下:

(1) r 表示易感人群的出生率;

收稿日期: 2010-11-28.

基金项目:国家自然科学基金(10771104).

通讯联系人:田 露,助教,研究方向: 生物数学. E-mail: tianlu0905@163.com

（2）c 表示平均每天被感染者成为感染者的比率；

（3）d 表示自然死亡率；

（4）γ 表示从感染者中移出的比率，包括恢复率和自然死亡率. 因此 $\gamma > d$；

（5）$\beta(I) = (\mu_1 - \mu_2 f(I))$ 是考虑了媒体报导作用后的接触传染率. 我们知道接触传染率不仅与疾病本身的传播能力有关，还与易感者对疾病的警惕程度有关. 一般来说，染病者报导的数量越多易感者就会减少与其他人接触的机会. 当 $I \to \infty$ 时，传染率的减少量达到 μ_2. 注意到由于媒体的报导不能完全控制住疾病的传播，所以显然 $\mu_1 > \mu_2$.

设 $(S(t), E(t), I(t))$ 是系统（1）的任一正初始条件的解. 记 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$，则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r - dS - dE - \gamma I \leqslant r - lN,$$

其中 $l = \min(d, \gamma)$. 令

$$D = \left\{(S, E, I) \mid S \geqslant 0, E \geqslant 0, I \geqslant 0, S + E + I \leqslant \bar{K}, \bar{K} = \frac{r}{l}, l = \min(d, \gamma)\right\},$$

如果 $(S, E, I) \in D$，则有

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{S=0,E>0,I>0} > 0, \left.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|_{S>0,E=0,I>0} > 0, \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{S>0,E>0,I=0} > 0, \left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{N=\frac{r}{l},S>0,E>0,I>0} \leqslant 0,$$

所以 D 是系统（1）的正向不变集.

1　平衡点的存在性及其稳定性

1.1　无病平衡点

令系统（1）的右端等于零，容易得到无病平衡点 $E_0 = (S_0, E_0, I_0) = (\frac{r}{d}, 0, 0)$. 根据文献[3]中的关于基本再生数的定义，则有（1）的基本再生数为：

$$R_0 = \frac{rc\mu_1}{d\gamma(c + d)}.$$

定理 1　当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

证明　令 $g(I) = (\mu_1 - \mu_2 f(I))I$，系统（1）化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = r - dS - Sg(I), \\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Sg(I) - (c + d)E, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = cE - \gamma I. \end{cases} \tag{2}$$

对系统（2），无病平衡点 E_0 有下式成立：

$$B\gamma I_0 = g(I_0)S_0, dS_0 + B\gamma I_0 = r, B\gamma I_0 = (c + d)E_0, B = \frac{c + d}{c}.$$

取 Liapunov 函数

$$V(S, E, I) = S - S_0 \ln\frac{S}{S_0} + E + BI,$$

由于 $\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{S_0}{S}$，并且 $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{S_0}{S^2}$，则 S_0 是 $S - S_0 \ln\frac{S}{S_0}$ 的最小值点，于是可得到 E_0 是函数 $V(S, E, I)$ 的最小值点. 注意到 $V(S_0, E_0, I_0) > 0$，从而显然有函数 $V(S, E, I)$ 是正定函数. 并且当 (S, E, I) 位于 D 边界时，有 $V(S, E, I) \to +\infty$，因此 $V(S, E, I)$ 是 D 内有无穷大下界的函数.

注意到

$$\frac{\mathrm{d}V(S, E, I)}{\mathrm{d}t} = (1 - \frac{S_0}{S})[r - dS - Sg(I)] + [Sg(I) - (c + d)E] + B(cE - \gamma I) =$$

$$(r - dS)(1 - \frac{S_0}{S}) + B\gamma I\left[\frac{S_0}{B\gamma}\frac{g(I)}{I} - 1\right],$$

对所有的 $S>0$,显然有 $(r-dS)(1-\frac{S_0}{S})\leqslant 0$,且当 $R_0<1$ 时,有

$$\frac{S_0}{B\gamma}\frac{g(I)}{I}=\frac{rc}{d\gamma(c+d)}(\mu_1-\mu_2 f(I))<\frac{rc\mu_1}{d\gamma(c+d)}=R_0<1.$$

因此 $R_0<1$ 保证了 $\frac{\mathrm{d}V(S,E,I)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$,从而根据文献[4]中定理3.9知,无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

1.2 地方病平衡点

令系统(2)右端为零,则由系统(2)的二式和三式得 $S=\frac{\gamma(c+d)}{c(\mu_1-\mu_2 f(I))}$,代入一式,得到如下等式:

$$\frac{r}{d}-\frac{\gamma(c+d)}{cd}I=\frac{\gamma(c+d)}{c(\mu_1-\mu_2 f(I))}.$$

令 $F(I)=\frac{r}{d}-\frac{\gamma(c+d)}{cd}I$,$G(I)=\frac{\gamma(c+d)}{c(\mu_1-\mu_2 f(I))}$. 注意到 $F(I)$ 是单调递减的,$G(I)$ 是单调递增的,且当 $R_0>1$ 时,有 $F(0)=\frac{r}{d}>G(0)=\frac{\gamma(c+d)}{c\mu_1}$,并有

$$\lim_{I\to+\infty}F(I)=-\infty,\ \lim_{I\to+\infty}G(I)=\frac{\gamma(c+d)}{c(\mu_1-\mu_2)},$$

因此当 $R_0>1$ 时,直线 $F(I)$ 和曲线 $G(I)$ 有惟一个交点,记为 $Q(S^*,E^*,I^*)$. 这就说明了当 $R_0>1$ 时,系统(1)存在惟一的地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$.

定理2 当 $R_0>1$ 时,系统(1)存在惟一的地方病平衡点且局部渐近稳定.

证明 计算系统(1)在平衡点 (S^*,E^*,I^*) 处的 Jacobi 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(S^*,E^*,I^*)=\begin{pmatrix}-\frac{r}{S^*} & 0 & \frac{rc\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)}\\ \frac{r}{S^*}-d & -(c+d) & -\frac{rc\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)}\\ 0 & c & -\gamma\end{pmatrix},$$

则其对应的特征方程是

$$\lambda^3+(c+d+\gamma+\frac{r}{S^*})\lambda^2+\left[\gamma(c+d)+\frac{rc^2\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)}+\frac{r(c+d+\gamma)}{S^*}\right]\lambda+\frac{r}{S^*}\gamma(c+d)+\frac{rc^2 d\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)}=0.$$

由 Hurwitz 判据得到

$$H_1=c+d+\gamma+\frac{r}{S^*}>0,$$

$$H_2=\begin{vmatrix}c+d+\gamma+\frac{r}{S^*} & 1\\ rS^*\gamma(c+d)+\frac{rc^2 d\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)} & \gamma(c+d)+\frac{rc^2\mu_2 f'(I^*)S^*}{\gamma(c+d)}+\frac{r(c+d+\gamma)}{S^*}\end{vmatrix}>0,$$

$$H_3>0.$$

由 Hurwitz 判据得,所有特征根均具有负实部,从而地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$ 是局部渐近稳定的.

定理3 当 $R_0>1$ 且 $g(I)$ 满足如下条件:

$$\begin{cases}g(I)/g(I^*)\geqslant I/I^*, & 0<I<I^*,\\ g(I)/g(I^*)\leqslant I/I^*, & I>I^*\end{cases}$$

时,地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$ 对于系统(1)是全局渐近稳定的.

证明 类似于边界平衡点的讨论,对系统(2)地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$ 有如下式子成立:

$$B\gamma I^* = g(I^*)S^*, dS^* + B\gamma I^* = r, B\gamma I^* = (c+d)E^*, B = \frac{c+d}{c}.$$

取 Liapunov 函数

$$V(S,E,I) = S - S^* \ln\frac{S}{S^*} + B\left(I - I^* \ln\frac{I}{I^*}\right) + \left(E - E^* \ln\frac{E}{E^*}\right),$$

注意到函数 $V(S,E,I)$ 满足

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 1 - \frac{S^*}{S}, \frac{\partial V}{\partial E} = 1 - \frac{E^*}{E}, \frac{\partial V}{\partial I} = B\left(1 - \frac{I^*}{I}\right),$$

容易看到 Q 是函数 $V(S,E,I)$ 的惟一驻点. 又有,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{S^*}{S^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial E^2} = \frac{E^*}{E^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial I^2} = B\frac{I^*}{I^2} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S \partial E} = \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial I} = \frac{\partial^2 V}{\partial E \partial I} = 0,$$

由此可以得到地方病平衡点 Q 是函数 $V(S,E,I)$ 的最小值点. 因为 $V(S^*,E^*,I^*) > 0$,这就说明函数 $V(S,E,I) > 0$ 是正定函数. 且容易验证当 (S,E,I) 位于 D 边界时,$V(S,E,I) \to +\infty$,故 $V(S,E,I)$ 是 D 内有无穷大下界的函数.

对于地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$,函数 $V(S,E,I)$ 满足

$$\frac{dV(S,E,I)}{dt} = r - dS - Sg(I) - r\frac{S^*}{S} + dS\frac{S^*}{S} + S^* g(I) + Sg(I) - (c+d)E - Sg(I)\frac{E^*}{E} + (c+d)E^* + B\left(cE - \gamma I - cE\frac{I^*}{I} + \gamma I^*\right) = dS^*\left(1 - \frac{S}{S^*}\right)\left(1 - \frac{S^*}{S}\right) - B\gamma I^*\left(\frac{S^*}{S} + \frac{g(I)SE^*}{g(I^*)S^*E} + \frac{EI^*}{E^*I} + \frac{g(I^*)I}{g(I)I^*} - 4\right) + B\gamma I^*\left(1 - \frac{g(I^*)}{g(I)}\right)\left(\frac{g(I)}{g(I^*)} - \frac{I}{I^*}\right).$$

因为算术平均数大于几何平均数,所以所有的 $S,E,I > 0$,有

$$\frac{S^*}{S} + \frac{Sg(I)E^*}{S^*g(I^*)E} + \frac{EI^*}{E^*I} + \frac{g(I^*)I}{g(I)I^*} \geqslant 4.$$

因为对所有的 $S > 0$,容易得到 $\left(1 - \frac{S}{S^*}\right)\left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \leqslant 0$,再看到函数 $g(I)$ 满足条件:

$$\begin{cases} g(I)/g(I^*) \geqslant I/I^*, & 0 < I < I^*, \\ g(I)/g(I^*) \leqslant I/I^*, & I > I^*, \end{cases}$$

就可得到 $\left(1 - \frac{g(I^*)}{g(I)}\right)\left(\frac{g(I)}{g(I^*)} - \frac{I}{I^*}\right) \leqslant 0.$

综上可得 $\frac{dV(S,E,I)}{dt} \leqslant 0$,由文献[4]中定理 3.9 知,地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$ 对于系统(1)是全局渐近稳定的.

推论　当 $R_0 > 1$ 且 $g(I)$ 是凹函数时,系统(1)在地方病平衡点 $Q(S^*,E^*,I^*)$ 全局渐近稳定.

致谢　感谢导师崔景安教授给予了精心指导.

参考文献

[1] Cui J A, Sun Y H, Zhu H P. The impact of media on the control of infections diseases [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2007, 20(1): 31-53.

[2] Liu Y P, Cui J A. The impact of media coverage on the dynamics of infectious disease [J]. International Journal of Biomathematics, 2008, 1(1): 65-74.

[3] P van den Driessche, James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2): 29-48.

[4] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

责任编辑:丁　蓉