第34卷第3期　南京师大学报(自然科学版)　Vol. 34 No. 3
2011年9月　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)　Sept，2011

李亚普诺夫方程 $AX+XB=C$ 的简洁解及其应用

尤兴华[1]，马圣容[2]

(1. 南京工程学院基础部，江苏 南京 211167)
(2. 南京晓庄学院数学与信息技术学院，江苏 南京 211171)

[摘要]　首先给出了4种情况下李亚普诺夫方程 $AX+XB=C$ 解的简洁表达式，然后，通过前述结论得出了矩阵方程 $AX+YB=E$ 的最小二乘解以及极小范数最小二乘解的解析式，并且，通过相应数值例子验证了相关结论.

[关键词]　李亚普诺夫方程，约当标准型，最小二乘解，极小范数最小二乘解
[中图分类号]　O151.21　[文献标志码]　A　[文章编号]　1001-4616(2011)03-0044-06

The Simple Formulae of Solutions to Liapunov Matrix Equation $AX+XB=C$ and Its Application

You Xinghua[1]，Ma Shengrong[2]

(1. Department of Basic Course，Nanjing Institute of Technology，Nanjing 211167，China)
(2. School of Mathematics & Information Technology，Nanjing Xiaozhuang University，Nanjing 211171，China)

Abstract: At first，the simple expression of solutions to matrix equation $AX+XB=C$ is given，the second an explicit formulae for the minimum-norm least-squares solutions of matrix equation $AX+YB=E$ is obtained，finally，a numerical example is given.

Key words: Liapunov matrix equation，Jordan canonical form，the least-squares solution，the minimum-norm least-squares solution

当前，在矩阵理论领域，对矩阵方程以及广义逆理论的研究一直是最热点的问题之一，如文[1-5]. 而对矩阵方程 $AX+XB=C$ 解的研究与探索更是没有间断过，但几乎所有的结论要么基于矩阵 A、B 为特殊矩阵(如对称矩阵等)的情形，要么解的表达形式过于繁琐，如文[6-10]. 此外，还有一些文献仅仅只是讨论了解的存在性，如文[11]. 而在力学以及控制论等诸多领域李亚普诺夫方程都有着很重要的应用. 例如，在决定稳定性时就需要求解李亚普诺夫方程 $A'X+XA=-Q$.

综上所述，可见该方程的求解问题确实是一个非常重要的课题. 所以，我们认为给出该方程的解的最简洁表达式也是很有必要的. 本文将围绕该命题展开讨论，并且最终给出它的重要应用——矩阵方程 $AX+YB=E$ 的最小二乘解以及极小范数最小二乘解.

本文采用的所有关于矩阵及广义逆方面的记号参考文献[12,13].

设矩阵 $A\in C^{m\times m}$，$B\in C^{n\times n}$，$C\in C^{m\times n}$，考虑矩阵方程

$$AX+XB=C \tag{1}$$

这里 $A=PJ_AP^{-1}$，$B=QJ_BQ^{-1}$ 是矩阵 A 和 B 的约当标准型，其中

收稿日期：2010-12-20.
基金项目：江苏省高校自然科学基金(07KJD110077).
通讯联系人：尤兴华，讲师，研究方向：计算数学理论及应用. E-mail：xhyou@njit.edu.cn

$$\boldsymbol{J}_A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1&&&\\&\boldsymbol{J}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{J}_s\end{bmatrix},\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i&1&&&\\&\lambda_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&\lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i},1\leqslant i\leqslant s,\sum_{i=1}^{s}m_i=m,\tag{2}$$

$$\boldsymbol{J}_B=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{J}}_1&&&\\&\bar{\boldsymbol{J}}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\bar{\boldsymbol{J}}_t\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{J}}_i=\begin{bmatrix}\mu_i&1&&&\\&\mu_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&\mu_i\end{bmatrix}_{n_j\times n_j},1\leqslant j\leqslant t,\sum_{j=1}^{t}n_j=n.\tag{3}$$

再设

$$\boldsymbol{N}_i=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}_{m_i\times m_i},\bar{\boldsymbol{N}}_j=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\&&&&0\end{bmatrix}_{n_j\times n_j}.$$

为了顺利得到最终的结论,我们再给出如下几个引理:

引理 1[12] $\overrightarrow{\boldsymbol{ABC}}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{B}}$.

引理 2[14] 设 $\boldsymbol{E}_A=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{AA}^+$,那么

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})^{(1,3)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^+-\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_A\boldsymbol{B})^+\\(\boldsymbol{E}_A\boldsymbol{B})^+\end{bmatrix}.$$

引理 3[13] $[\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}]^+=\begin{bmatrix}\boldsymbol{KP}^+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{QC}^+)\\\boldsymbol{T}^H\boldsymbol{KP}^+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{QC}^+)+\boldsymbol{C}^+\end{bmatrix}$,其中 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{PP}^+)\boldsymbol{Q}$,$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{P}^+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}^+\boldsymbol{C})$,$\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{TT}^H)^{-1}$.

1 矩阵方程 $AX+XB=C$ 的简洁解

当特征值 $\lambda_i,\mu_j(\lambda_i\in\lambda(\boldsymbol{A}),\mu_j\in\lambda(\boldsymbol{B}),i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$ 满足如下一些条件时,我们就可以得到方程(1)的惟一解的最简洁(至少目前)的公式.

定理 1 如果 $\mathrm{Re}(\lambda_i)+\mathrm{Re}(\mu_j)<0(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$,那么方程(1)的惟一解的最简洁表达式为

$$X=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}\mathrm{d}t,\tag{4}$$

其中 $\mathrm{e}^{At}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(At)^n}{n!}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PJ}_A\boldsymbol{P}^{-1}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{QJ}_B\boldsymbol{Q}^{-1}$ 分别是矩阵 A 和 B 的约当标准型,这里 J_A 和 J_B 由(2)和(3)给定. 设 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CQ}$ 分块矩阵表示如下:

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{CQ}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11}&\boldsymbol{C}_{12}&\cdots&\cdots&\boldsymbol{C}_{1t}\\\boldsymbol{C}_{21}&\boldsymbol{C}_{22}&\cdots&\cdots&\boldsymbol{C}_{2t}\\\vdots&\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\\boldsymbol{C}_{s1}&\boldsymbol{C}_{s2}&\cdots&\cdots&\boldsymbol{C}_{st}\end{bmatrix}\begin{array}{l}m_1\\m_2\\\vdots\\m_s\end{array}\\\begin{array}{ccccc}n_1&n_2&\cdots&\cdots&n_t.\end{array}\end{array}$$

设 $\boldsymbol{D}_{ij}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{N}_it}\boldsymbol{C}_{ij}\mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{N}}_jt}$,那么

$$D_{ij}(t)=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}\\ & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}t^{m_i-2}\\ & & \ddots & \cdots & \vdots\\ & & & \ddots & t\\ & & & & 1\end{bmatrix}C_{ij}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{1}{(n_j-1)!}t^{n_j-1}\\ & 1 & t & \cdots & \frac{1}{(n_j-2)!}t^{n_j-2}\\ & & \ddots & \cdots & \vdots\\ & & & \ddots & t\\ & & & & 1\end{bmatrix},$$

易知,$D_{ij}(t)$ 中每个元素都是一个多项式,且它们的次数不大于 m_i+n_j-2. 从而有

$$e^{At}Ce^{Bt}=P\begin{bmatrix}e^{(\lambda_1+\mu_1)t}D_{11}(t) & \cdots & e^{(\lambda_1+\mu_t)t}D_{1t}(t)\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ e^{(\lambda_s+\mu_1)t}D_{s1}(t) & \cdots & e^{(\lambda_s+\mu_t)t}D_{st}(t)\end{bmatrix}Q^{-1}.$$

由 $\mathrm{Re}(\lambda_i+\mu_j)<0$ 及 $D_{ij}(t)$ 的每一元素都是多项式,可得积分 $\int_0^{+\infty}e^{(\lambda_i+\mu_j)t}D_{ij}(t)\,dt$ 是收敛的. 所以积分 $\int_0^{+\infty}e^{At}Ce^{Bt}dt$ 也是收敛的,从而

$$A\int_0^{+\infty}e^{At}Ce^{Bt}dt+\int_0^{+\infty}e^{At}Ce^{Bt}dt\cdot B=\int_0^{+\infty}(Ae^{At}Ce^{Bt}+e^{At}Ce^{Bt}B)\,dt=$$
$$\int_0^{+\infty}(e^{At}Ce^{Bt})'dt=\lim_{t\to+\infty}e^{At}Ce^{Bt}-C=-C,$$

所以最简洁表达式(4)即为方程(1)的惟一解.

类似于定理 1,我们可以得出如下 3 个推论:

推论 1　如果 $\mathrm{Re}(\lambda_i)+\mathrm{Re}(\mu_j)>0\ (i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$,那么(1)的简洁解可表示为

$$X=\int_0^{+\infty}e^{-At}Ce^{-Bt}dt. \tag{5}$$

推论 2　如果 $\mathrm{Im}(\lambda_i)+\mathrm{Im}(\mu_j)>0\ (i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$,那么(1)的简洁解可表示为

$$X=-i\int_0^{+\infty}e^{iAt}Ce^{iBt}dt. \tag{6}$$

推论 3　如果 $\mathrm{Im}(\lambda_i)+\mathrm{Im}(\mu_j)<0\ (i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,t)$,那么(1)的简洁解可表示为

$$X=i\int_0^{+\infty}e^{-iAt}Ce^{-iBt}dt. \tag{7}$$

2　一些应用

在这一部分我们将主要讨论矩阵方程

$$AX+YB=E, \tag{8}$$

并且给出该方程的最小二乘解以及极小范数最小二乘解.

定理 2　矩阵方程(8)的最小二乘解为

$$\begin{cases}X=A^+E+F_AU-A^+VB,\\ Y=E_AEB^++V-E_AVBB^+,\end{cases} \tag{9}$$

而(8)的极小范数最小二乘解可表示为

$$\begin{cases}X=\int_0^{+\infty}e^{-A^HAt}A^HEe^{-B^HBt}dt,\\ Y=(A^H)^+\int_0^{+\infty}e^{-A^HAt}A^HEe^{-B^HBt}dt\cdot B^H+E_AEB^+,\end{cases} \tag{10}$$

其中矩阵 $U\in C^{m\times n}$,$V\in C^{n\times m}$ 为任意矩阵,并且 $F_A=I-A^+A$,E_A 见引理 2.

证明　由引理 1,方程(8)可化为向量形式

$$[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\vec{X}\\ \vec{Y}\end{bmatrix}=\vec{E}. \tag{11}$$

而根据引理2,知

$$[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]^{(1,3)}=\begin{bmatrix}A^{+}\otimes I-(A^{+}\otimes B^{\mathrm{T}})(E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+})\\E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{+}\otimes I\\E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+}\end{bmatrix},$$

从而,(11)一个向量形式的最小二乘特解可表示为

$$\begin{cases}\overrightarrow{X}_0=(A^{+}\otimes I)\overrightarrow{E},\\\overrightarrow{Y}_0=(E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+})\overrightarrow{E}.\end{cases}\tag{12}$$

而由

$$[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]^{(1,3)}[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}A^{+}A\otimes I&A^{+}\otimes B^{\mathrm{T}}\\0&E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+}B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

可得,(11)的向量形式最小二乘通解为

$$\begin{cases}\overrightarrow{X}=\overrightarrow{X}_0+(F_A\otimes I)\overrightarrow{U}-(A^{+}\otimes B^{\mathrm{T}})\overrightarrow{V},\\\overrightarrow{Y}=\overrightarrow{Y}_0+\overrightarrow{V}-(E_A\otimes(BB^{+})^{\mathrm{T}})\overrightarrow{V},\end{cases}\tag{13}$$

其中 $U\in C^{m\times n}$,$V\in C^{n\times m}$ 是任意矩阵.

将(12)和(13)转换为矩阵形式,即得(9).

根据引理3,有

$$[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]^{+}=\begin{bmatrix}(I+SS^{H})^{-1}(A^{+}\otimes I)\\S^{H}(I+SS^{H})^{-1}(A^{+}\otimes I)+E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+}\end{bmatrix},$$

其中 $S=(A^{+}\otimes B^{\mathrm{T}})(I-E_A\otimes B^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{+})=A^{+}\otimes B^{\mathrm{T}}$,因而

$$[A\otimes I,I\otimes B^{\mathrm{T}}]^{+}=\begin{bmatrix}(I+(A^{H}A)^{+}\otimes\overline{B}^{H}\overline{B})^{-1}(A^{+}\otimes I)\\((A^{H})^{+}\otimes\overline{B})(I+(A^{H}A)^{+}\otimes\overline{B}^{H}\overline{B})^{-1}(A^{+}\otimes I)+E_A\otimes(B^{\mathrm{T}})^{+}\end{bmatrix},$$

从而(11)的极小范数最小二乘解可表示为

$$\overrightarrow{X}=(I+(A^{H}A)^{+}\otimes\overline{B}^{H}\overline{B})^{-1}\overrightarrow{A^{+}E},\tag{14}$$

$$\overrightarrow{Y}=((A^{H})^{+}\otimes\overline{B})\vec{X}+\overrightarrow{E_AEB^{+}}.\tag{15}$$

易知,与(14)等价的矩阵形式为

$$X+(A^{H}A)^{+}XB^{H}B=A^{+}E.$$

设 $A^{H}A=[P_1,P_2]\begin{bmatrix}\Lambda_1^{-1}&O\\O&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1^{H}\\P_2^{H}\end{bmatrix}$,令 $P=[P_1,P_2]$ 为酉矩阵,且 $\Lambda_1\equiv\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$,$\lambda_i>0$,从而我们有

$$X+[P_1,P_2]\begin{bmatrix}\Lambda_1^{-1}&O\\O&O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1^{H}\\P_2^{H}\end{bmatrix}XB^{H}B=A^{+}E,$$

以 $[P_1,P_2]^{H}$ 左乘得

$$\begin{cases}P_1^{H}X+\Lambda_1^{-1}P_1^{H}XB^{H}B=P_1^{H}A^{+}E,\\P_2^{H}X=P_2^{H}A^{+}E.\end{cases}$$

因为 $P_2^{H}P_1=0$ 且 $R(A^{+})=R(A^{H})=R(P_1)$,所以 $P_2^{H}A^{+}=0$.

从而,我们得到

$$\begin{cases}\Lambda_1P_1^{H}X+P_1^{H}XB^{H}B=\Lambda_1P_1^{H}A^{+}E,\\P_2^{H}X=0.\end{cases}$$

再根据推论1,有

$$\begin{cases}P_1^{H}X=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\Lambda_1t}\Lambda_1P_1^{H}A^{+}E\mathrm{e}^{-B^{H}Bt}\mathrm{d}t,\\P_2^{H}X=0.\end{cases}$$

以 P_1^{H} 左乘上面第一个式子,根据文[13]第二章1.5节,(11)的极小范数最小二乘解必满足条件

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in R\left(\begin{bmatrix} A^H \otimes I \\ I \otimes (B^H)^T \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \vec{X} \equiv x = (A^H \otimes I)\mu, \vec{Y} \equiv y = (I \otimes (B^H)^T)\mu, \text{对某个}\mu.$$

$$\Rightarrow X = A^H U, Y = UB^H \Rightarrow R(X) \subset R(A^H) \equiv R(P_1) \Rightarrow P_1P_1^H X = X.$$

因而

$$X = \int_0^{+\infty} P_1 e^{-\Lambda_1 t}\Lambda_1 P_1^H A^+ E e^{-B^H B t}dt =$$

$$\int_0^{+\infty} (P_1 e^{-\Lambda_1 t}P_1^H)(P_1\Lambda_1 P_1^H A^+ E)e^{-B^H B t}dt =$$

$$\int_0^{+\infty} (e^{-A^H A t} - P_2P_2^H)(A^H AA^+ E)e^{-B^H B t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-A^H A t}A^H E e^{-B^H B t}dt.$$

另一方面，由(15)，我们有

$$Y = (A^H)^+ XB^H + E_A EB^+ = (A^H)^+\left[\int_0^{+\infty} e^{-A^H A t}A^H E e^{-B^H B t}dt\right]B^H + E_A EB^+.$$

证毕.

3 数值例子

例1 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{和} E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

易得

$$A^+ = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0.3333 & 0.0833 & -0.0833 \\ -0.1667 & 0.1667 & -0.0833 & 0.0833 \\ 0.8333 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 1 & 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

设 $A^H A = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \Lambda_1^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1^H \\ P_2^H \end{bmatrix}$，这里

$$[P_1, P_2] = \begin{bmatrix} 0.1789 & 0.6769 & -0.4201 & 0.5774 \\ 0.7199 & 0.3692 & 0.1086 & -0.5774 \\ -0.5410 & 0.3073 & -0.5287 & -0.5774 \\ 0.3962 & -0.5575 & -0.7295 & 0 \end{bmatrix}, \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 52.7238 & & \\ & 4.9049 & \\ & & 0.3712 \end{bmatrix},$$

且

$$B^H B = Q\Lambda_2 Q^H = \begin{bmatrix} -0.8054 & -0.1340 & -0.5774 \\ -0.5187 & 0.6305 & 0.5774 \\ -0.2867 & -0.7645 & 0.5774 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.8054 & -0.1340 & -0.5774 \\ -0.5187 & 0.6305 & 0.5774 \\ -0.2867 & -0.7645 & 0.5774 \end{bmatrix}^H.$$

由定理1，知

$$X = \int_0^{+\infty} P_1 e^{-\Lambda_1 t}\Lambda_1 P_1^H A^+ EQ e^{-\Lambda_2 t}Q^H dt,$$

从而，可得

$$X = \begin{bmatrix} 0.6084 & 0.2651 & -0.5624 \\ 0.2452 & -0.0340 & -0.2131 \\ 0.3629 & 0.2991 & -0.3491 \\ -0.2299 & 0.5241 & 0.0139 \end{bmatrix}.$$

又因为

$$Y = (A^H)^+ XB^H + E_A EB^+,$$

可得

$$Y = \begin{bmatrix} 0.3394 & -0.5186 & -1.0537 \\ -0.1486 & 0.1716 & -0.5853 \\ 0.5065 & -0.1111 & 0.1939 \\ -0.0065 & 0.6111 & 0.3061 \end{bmatrix}.$$

经验证解(X,Y)就是方程 $AX + YB = E$ 的极小范数最小二乘解.

[参考文献]

[1] You Xinghua, Ma Shengrong, Yan Shijian. The explicit solution to equation $AX+XB=C$ in matrices [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2009, 24(2): 516-524.

[2] Zheng Bing, Zhong Chengkui. The existence and expressions for the generalized inverse $A(2)\ T,S$ of linear operator in Hilbert space [J]. Acta Mathematica Scientia, 2007, 27(2): 288-295.

[3] Jiang Tongsong, Wei Musheng. On a solution of the quaternion matrix equation $X-A\bar{X}B=C$ and its application [J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 20(6): 1-8.

[4] Chen Xiaoshan, Li Wen. On the matrix equation $X+A^{*}X^{-1}A=P$: Solution and perturbation analysis [J]. Mathematica Numerica Sinica, 2005, 27(3): 303-310.

[5] Jameson A. Solution of the equation $AX+XB=C$ by inversion of an $M\times M$ or $N\times N$ matrix [J]. SIAM J Appl Math, 1968, 28(16): 1 020-1 023.

[6] Eurice de Souza, Bhattacharyya S P. Controllability, observability and the solution of $AX-XB=C$ [J]. Linear Algebra Appl, 1981, 39: 167-188.

[7] John Jones J K, Lew C. Solutions of Liapunov matrix equation $BX-XA=C$ [J]. IEEE Trans Automatic Control, 1982, AC-27: 464-466.

[8] 陈玉明, 肖衡. 矩阵方程 $AX-XB=C$ 的显式解 [J]. 应用数学和力学, 1995, 15(12): 1 051-1 059.

[9] 韩维信. 李雅普诺夫矩阵方程的求解公式 [J]. 天津大学学报: 自然科学与工程技术版, 2001, 34(3): 408-409.

[10] 汤学炳. 李雅普诺夫矩阵方程的新解法 [J]. 江汉石油学院学报, 1998, 20(3): 126-129.

[11] 殷保群, 奚宏生, 杨孝先. 矩阵方程 $AX-XB=C$ 非奇异解的存在性 [J]. 中国科学技术大学学报, 2000, 30(3): 340-344.

[12] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverse: Theory and Applications [M]. New York: Wiley, 1974.

[13] 陈永林. 广义逆矩阵的理论与方法 [M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2005.

[责任编辑:丁 蓉]