第 34 卷第 4 期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol. 34 No. 4
2011 年 12 月　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)　　Dec, 2011

分数次多线性交换子在齐型 Herz-Morrey 空间中的有界性

葛仁福[1]，徐国华[2]

(1. 连云港师范高等专科学校数学系，江苏 连云港 222006)
(2. 南京师范大学数学科学学院，江苏 南京 210046)

[摘要] 在齐型 Herz-Morrey 空间上讨论了一类由满足某些尺寸条件的线性算子与 BMO(X) 函数生成的多线性交换子的有界性，作为应用，得到了分数次积分算子多线性交换子的有界性.

[关键词] Herz-Morrey 空间，多线性，交换子
[中图分类号] O174.6　[文献标志码] A　[文章编号] 1001-4616(2011)04-0021-05

Estimates for Multilinear Commtators of Fractional Integrals in Homogeneous Type Herz-Morrey Spaces

Ge Renfu[1], Xu Guohua[2]

(1. Department of Mathematical, Lianyungang Teachers College, Lianyungang 222006, China)
(2. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)

Abstract: In this paper, the boundedness of a class of multilinear commutators generated by linear operators which satisfies the size candition and RBMO functions on homogeneous type Herz-Morrey space was proved. As special cases, the properties of fractional multilinear commutators was obtained.

Key words: Herz-Morrey space, multilinear, commutator

设 d 是拓扑空间 X 上的拟度量，即定义在 $X\times X$ 上的实值函数，且对任意 $x,y,z\in X$ 满足

$$d(x,y)\leqslant K[d(x,z)+d(z,y)].$$

式中，K 是与 x,y,z 无关的正常数. 明显的当 $K\leqslant 1$ 时，(X,d) 是度量空间. 对任意的 $x\in X, r>0$，我们记以 x 为中心，r 为半径的球体 $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$. 若正则 Borel 测度 μ 满足下述双倍条件，即对任意 $a>0$ 有，

$$0\leqslant \mu(B(x,ar))\leqslant A\mu(B(x,r))<\infty,$$

式中，A 是与 x、r 无关的正常数，则称 (X,d,μ) 为齐型空间. 在本文中我们假设对任意 $x\in X$，有 $\mu(x)=0$，$\mu(X)=\infty$，以及 Pan 在文 [1] 中引入的 "Condition I".

Condition I　对球体 $B(x,r)$，假设 $t\geqslant 1$，则存在常数 $a\geqslant 2, A_0>1$ 满足

$$\mu(B(x,ar))\geqslant A_0\mu(B(x,r)).$$

事实上，A 与 t 有关且 $A(t)=A^{1+\log_2 t}$，见文 [2].

设 $b\in \mathrm{BMO}(X)$，T 是具有标准核的 Claderón-Zygmund 奇异积分算子，由它们生成的交换子 $[b,T]$ 定义为：

$$[b,T]f(x)=b(x)Tf(x)-T(bf)(x).$$

该类算子首先是 Coifman、Rochberg 和 Wiess 在 [3] 中为研究椭圆方程解的正则性问题引入的，并且在欧氏空间中证明了 $[b,T]$ 在 $L^p(\mathbf{R}^n)(1<p<\infty)$ 空间中的有界性. 他们还借助这一交换子给出了 $\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$ 空间的新的特征刻画. 受此结果的启发，由函数 b 和各种算子生成的交换子的有界性问题得到

收稿日期：2011-06-10.
基金项目：国家自然科学基金(10671094).
通讯联系人：葛仁福，副教授，研究方向：泛函分析. E-mail: gerenfu_sxx@163.com

了广泛研究.1982年Chanillo[4]研究了分数次奇异积分算子交换子的$L^p(\mathbf{R}^n)(1<p<\infty)$有界性;随后,Lu和Yang在文[5]中讨论了$[b,T]$在Herz空间中的性质;Perez[6]将交换子推广到如下的高阶情形:

$$T_b^m(f)=[b^m,T](f)=\int_{\mathbf{R}^n}(b(x)-b(y))^m K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

并得到下述加权估计,

$$\int_{\mathbf{R}^n}\|T_b^m f(x)\|^p\omega(x)\mathrm{d}x\leqslant C\|b\|_{\mathrm{BMO}}^{mp}\int_{\mathbf{R}^n}(M^{m+1}f(x))^p\omega(x)\mathrm{d}x,$$

其中,$0<p<\infty$,$\omega\in A_\infty$,M是Hardy-Littlewood极大算子.

2002年,Perez和Trujillo-Gonealee首先引入了多线性交换子,

$$T_{\boldsymbol{b}}f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\prod_{j=1}^{m}(b_j(x)-b_j(y))K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,$$

其中,$\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)$.在文[7]中他们证明了当$b_i\in\mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$时,$T_{\boldsymbol{b}}$是$L^p(\mathbf{R}^n)(1<p<\infty)$空间上的有界算子.最近,周伟军、马柏林和徐景实在文[8]中研究了分数次积分算子多线性交换子,

$$I_{\ell,\boldsymbol{b}}(f)=[\boldsymbol{b},I_\ell](f)=\int_{\mathbf{R}^n}|x-y|^{-(n-\ell)}\prod_{j=1}^{m}(b_j(x)-b_j(y))f(y)\mathrm{d}y,$$

其中,I_ℓ是标准的分数次奇异积分算子,

$$I_\ell f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}f(y)/|x-y|^{n-\ell}\mathrm{d}y. \tag{1}$$

他们得到当$1/q=1/p-l/n$,$1<p<l/n$时,$[\boldsymbol{b},I_l]$是$L^p(\mathbf{R}^n)$到$L^q(\mathbf{R}^n)$的有界算子,并且证明了该算子在Herz空间中的有界性.

受上述文献的启发,一个自然的问题是多线性交换子在齐型空间中是否具有类似的有界性.本文致力于研究分数次多线性交换子在齐型Herz-Morrey空间中的有界性.需要说明的是,Herz-Morrey比$L^p(X)$和Herz空间更广泛.

为书写方便,首先给出本文中出现的一些定义和记号.对$x_0\in X$,$k\in\mathbf{Z}$,记$B_k=\{x\in X:d(x_0,x)<a^k\}$,$A_k=B_k\backslash B_{k-1}$,$\chi_k=\chi_{A_k}$表示$A_k$的特征函数.对局部可积函数$f$,$f_{B_k}$表示它的平均$f_{B_k}=1/|B_k|\int_{B_k}f(y)\mathrm{d}y$.

定义1 设$\alpha\in X$,$0\leqslant\lambda<\infty$,$0<p<\infty$以及$1\leqslant q\leqslant\infty$,齐次Herz-Morrey空间$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(X)$定义为

$$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(X)=\{f\in L_q(X\backslash\{x_0\}):\|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(X)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(X)}=\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_{k_0})^{\alpha p}\|f\chi_k\|_{L^q(X)}^p\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{L^q(X)}=\left(\int_X\|f(x)\|^q\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}.$$

简单计算可知,

$$MK_{p,q}^{\alpha,0}(X)=K_q^{\alpha,p}(X),MK_{p,p}^{0,0}(X)=L^p(X).$$

定义2 设$0<\ell<n$,标准核分数次奇异积分算子I_ℓ定义为,

$$I_\ell f(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\ell}}\mathrm{d}y. \tag{2}$$

定义3 称局部可积函数$b\in\mathrm{BMO}(X)$,如果存在常数A满足,对任意的方体$Q\subset X$有,

$$\sup_Q\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|b(x)-m_Q(b)|\mathrm{d}\mu(x)\leqslant A<\infty, \tag{3}$$

对$Q_1\subset Q_2$有

$$|m_{Q_1}(b)-m_{Q_2}(b)|\leqslant C_nA, \tag{4}$$

我们称最小的常数A为b的BMO(X)范数,记为$\|b\|_*$.当$1<p<\infty$时有,

$$\sup_Q\left(\frac{1}{\mu(Q)}\int_Q|b(x)-m_Q(b)|^p\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\approx\|b\|_*, \tag{5}$$

在以下行文中,对 $1 \leqslant j \leqslant m$,我们用 C_j^m 表示 $\{1,\cdots,m\}$ 的全体有限子集 $\sigma = \{\sigma(1),\cdots,\sigma(j)\}$. 记 σ' 为 $\sigma \in C_j^m$ 的补集,$\sigma' = \{1,\cdots,m\}\backslash\sigma$. 对任意 $\sigma = \{\sigma(1),\cdots,\sigma(j)\} \in C_j^m$,我们有 $\boldsymbol{b}_\sigma = (b_{\sigma(1)},\cdots,b_{\sigma(j)})$,并且 $b_\sigma = (b_{\sigma(1)}\cdots b_{\sigma(j)})$. 在此意义下,记 $\|\boldsymbol{b}_\sigma\|_* = \|b_{\sigma(1)}\|_*\cdots\|b_{\sigma(j)}\|_*$.

1 主要结论及其证明

本文的主要结论是:

定理 1 设 $b_i \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$,$i = 1,\cdots,m$,$T_l$ 是线性算子并满足如下尺寸条件:

a) 当 $\mathrm{supp}\, f \subset A_k$,$d(x_0,x) \geqslant ka^{k+1}$,$k \in \mathbf{Z}$ 时,有,

$$|T_l f(x)| \leqslant C\|f\|_{L^1(X)}/\mu(B(x_0,d(x_0,x)))^{\frac{n-l}{n}};$$

b) 当 $\mathrm{supp}\, f \subset A_k$,$d(x_0,x) \leqslant \frac{1}{k}a^{k-2}$,$k \in \mathbf{Z}$,有,

$$|T_l f(x)| \leqslant C\|f\|_{L^1(X)}/\mu(B_j)^{\frac{n-l}{n}}.$$

若 T_{lb} 是 $L^{q_1}(X)$ 到 $L^{q_2}(X)$ 的有界算子,则 T_{lb} 是 $M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha,\lambda}(X)$ 到 $M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha,\lambda}(X)$ 有界的,其中 $0 \leqslant \lambda < \infty$,$0 < p < \infty$,$q_1 > 1$,$1/q_2 = 1/q_1 - l/n$ 且 $-1/q_2 + \lambda < \alpha < 1 - 1/q_1$.

简单计算可知由(2)式定义的分数次积分算子满足上述尺寸条件,故作为定理 1 的直接推论,对分数次积分算子有

定理 2 设 $b_i \in \mathrm{BMO}(\mathbf{R}^n)$,$i = 1,\cdots,m$,$I_l$ 是分数次积分算子,则存在常数 C 使得,

$$\|I_{lb}(f)\|_{M\dot{K}_{p,q_2}^{\alpha,\lambda}(X)} \leqslant C\|(\boldsymbol{b})\|_*\|f\|_{M\dot{K}_{p,q_1}^{\alpha,\lambda}(X)},$$

其中 $0 \leqslant \lambda < \infty$,$0 < p < \infty$,$q_1 > 1$,$1/q_2 = 1/q_1 - l/n$ 且 $-1/q_2 + \lambda < \alpha < 1 - 1/q_1$.

定理 2 的证明 对任意 $f \in MK_{p,q_1}^{\alpha,\lambda}(X)$,我们有如下分解,

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x)\chi_j(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x),$$

故有

$$\begin{aligned}
\|T_{lb}f\|_{MK_{p,q_2}^{\alpha,\lambda}}(X) &= C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_{k_0})^{\alpha p}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|(T_{lb}f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(X)}\right)^p\right\}^{1/p} \leqslant \\
&C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_{k_0})^{\alpha p}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}\|(T_{lb}f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(X)}\right)^p\right\}^{1/p} + \\
&C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_{k_0})^{\alpha p}\left(\sum_{j=k-K_0+1}^{k+K_0-1}\|(T_{lb}f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(X)}\right)^p\right\}^{1/p} + \\
&C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_{k_0})^{\alpha p}\left(\sum_{j=k+K_0}^{\infty}\|(T_{lb}f_j)\chi_k\|_{L^{q_2}(X)}\right)^p\right\}^{1/p} = C(E_1+E_2+E_3).
\end{aligned}$$

首先,我们估计 E_1,令 $\lambda_i = (b_i)_{B_j}$,$i = 1,2,\cdots,m$. 由 $x \in A_k$,$j \leqslant k - K_0$,我们有

$$\frac{1}{\mu(B(x_0),d(x_0,x))} \leqslant \frac{C}{\mu(B(x_0,a^{k-1}))} \leqslant \frac{C}{\mu(B_k)}.$$

根据尺寸条件 a) 和 Jhon-Nirenberg 定理得,

$$\begin{aligned}
\|\chi_k T_{lb}(f_j)\|_{L^{q_2}(X)} &\leqslant C\mu(B_k)^{-(n-l)/n}\left\{\int_{A_k}\left[\int_{A_j}\prod_{i=1}^m|b_i(x)-b_i(y)\|f_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q_2} \leqslant \\
&C\mu(B_k)^{-(n-l)/n}\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\left[\int_{A_k}|(\boldsymbol{b}(x)-\boldsymbol{\lambda})_\sigma|^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q_2}\times \\
&\left[\int_{A_j}|(\boldsymbol{b}(y)-\boldsymbol{\lambda})_{\sigma'}\|f_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right] \leqslant C\mu(B_k)^{-(n-l)/n}\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\left[\int_{A_k}|(\boldsymbol{b}(x)-\boldsymbol{\lambda})_\sigma|^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q_2}\times \\
&\left[\int_{A_j}|(\boldsymbol{b}(y)-\boldsymbol{\lambda})_{\sigma'}|^{q'_1}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q'_1}\left[\int_{A_j}|f_j(y)|^{q_1}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q_1} \leqslant \\
&C(k-j)^m\mu(B_k)^{-(n-l/n)}\mu(b_k)^{1/q_2}\mu(B_j)^{1/q'_1}\|\boldsymbol{b}\|_*\|f_j\|_{L^{q_1}}(X) \leqslant \\
&C(k-j)^m[\mu(B_k)/\mu(B_j)]^{1/q_1-1}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)} \leqslant C(k-j)^m a^{(j-k)(1-1/q_1)}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}.
\end{aligned}$$

由 $\alpha < 1 - 1/q_1$ 得,

$$E_1 \leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}(k-j)^m a^{(j-k)(1-1/q_1)}\mu(B_k)^{\alpha}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}\right)^p\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}(k-j)^m a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)}\mu(B_j)^{\alpha}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}\right)^p\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\begin{cases}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left[\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}\mu(B_j)^{\alpha p}(k-j)^{mp}a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right]\right\}, (0<p\leqslant 1)\\ \left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left[\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}\mu(B_j)^{\alpha p}a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)p/2}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right]\times\right.\\ \left.\left[\sum_{j=-\infty}^{k-K_0}(k-j)^{mp'}a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)p'/2}\right]^{p/p'}\right\}^{1/p}, (p>1)\end{cases}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\begin{cases}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k_0-K_0}\mu(B_j)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\sum_{k=j+K_0}^{k_0}(k-j)^{mp}a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)p}\right\}^{1/p}, (0<p\leqslant 1)\\ \left\{\sum_{j=-\infty}^{k_0-K_0}\mu(B_j)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\sum_{k=j+K_0}^{k_0}(k-j)^{mp}a^{(j-k)(1-1/q_1-\alpha)p/2}\right\}^{1/p}, (p>1)\end{cases}\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}(X)}.$$

由 T_{lb} 是 $L^{q_1}(X)$ 到 $L^{q_2}(X)$ 有界的,故有,

$$E_2 = C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_K)^{\alpha p}\left(\sum_{j=k-K_0+1}^{k+K_0-1}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right)\right\}^{1/p} = C\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}.$$

下证 E_3,根据条件尺寸 b),Hölder 不等式以及 $j\geqslant k+K_0$ 得,

$$\|\chi_k T_{lb}(f_j)\|_{L^{q_2}(X)} \leqslant C\mu(B_k)^{-(n-l)/n}\left\{\int_{A_k}\left[\int_{A_j}\prod_{i=1}^m|b_i(x)-b_i(y)\|f_j(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right]^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right\}^{1/q_2}\leqslant$$

$$C\mu(B_k)^{-(n-l)/n}\sum_{j=0}^m\sum_{\sigma\in C_j^m}\left[\int_{A_k}|(\boldsymbol{b}(x)-\boldsymbol{\lambda})_\sigma|^{q_2}\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/q_2}\times$$

$$\left[\int_{A_j}|(\boldsymbol{b}(y)-\boldsymbol{\lambda})_{\sigma'}|^{q'_1}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q'_1}\left[\int_{A_j}|f_j(y)|^{q_1}\mathrm{d}\mu(y)\right]^{1/q_1}\leqslant$$

$$C(j-k)^m[\mu(B_k)/\mu(B_j)]^{1/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}\leqslant C(j-k)^m a^{(k-j)/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}.$$

故

$$E_3 \leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_k)^{\alpha p}\left(\sum_{j=k+K_0}^{\infty}(j-k)^m a^{(k-j)/q_2}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}\right)^p\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k+K_0}^{\infty}\mu(B_j)^{\alpha}(j-k)^m a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}\right)^p\right\}^{1/p}.$$

下面我们分两种情况来给予证明.

情况 Ⅰ　当 $0<p<1$. 由著名不等式 $(\sum\|a_i\|)^p\leqslant\sum\|a_i\|^p$ 有,

$$E_3 \leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k+K_0}^{k_0}\mu(B_j)^{\alpha p}(j-k)^{mp}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right)\right\}^{1/p}+$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\mu(B_j)^{\alpha p}(j-k)^{mp}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right)\right\}^{1/p} = C(K_1+K_2).$$

对 K_1,简单计算得,

$$K_1 \leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k_0}\mu(B_j)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\times\sum_{k=-\infty}^{j-K_0}(j-k)^{mp}a^{(pk-j)(\alpha+1/q_2)}\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X).$$

对 K_2,根据 $\|f_j\|_{L^{q_1}(X)^p}\leqslant\mu(B_j)^{-\alpha p}\sum_{l=-\infty}^{j}\mu(B_l)^{\alpha p}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)^p}$,得

$$K_2 \leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\mu(B_j)^{\lambda p}(j-k)^{mp}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p}\times\right.$$

$$\left.\mu(B_j)^{-\lambda p}\sum_{l=-\infty}^{j}\mu(B_l)^{\alpha p}\|f_l\|^p_{L^{q_1}(X)}\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\mu(B_k)^{\lambda p}\sum_{j=k+1}^{\infty}(j-k)^{mp}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2-\lambda)p}\|f\|^p_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X)\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X).$$

情况 Ⅱ　$1<p<\infty$，运用 Minkowski 不等式得，

$$E_3\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k+K_0}^{k_0}\mu(B_j)^{\alpha}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}(j-k)^m a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p}\right)\right\}^{1/p}+$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\mu(B_j)^{\alpha}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)}(j-k)^m a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p}\right)\right\}^{1/p}\leqslant(D_1+D_2),$$

由 Hölder 不等式，我们有，

$$D_1\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k+K_0}^{k_0}\mu(B_j)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p/2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\sum_{j=k+K_0}^{k_0}(j-k)^{mp'}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p'/2}\right)^{p/p'}\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X).$$

根据 Hölder 不等式，$\alpha>\lambda-1/q_2$，以及：

$$\|f_j\|_{L^{q_1}(X)^p}\leqslant\mu(B_j)^{-\alpha p}\sum_{l=-\infty}^{j}\mu(B_l)^{\alpha p}\|f_j\|_{L^{q_1}(X)^p},$$

我们对 D_2 有如下估计：

$$D_2\leqslant C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\mu(B_j)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p/2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}(j-k)^{mp'}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2)p'/2}\right)^{p/p'}\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$C\sup_{k_0\in\mathbf{Z}}\mu(B_{k_0})^{-\lambda}\left\{\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\mu(B_j)^{\lambda p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}a^{(k-j)(\alpha+1/q_2-\lambda)p/2}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(\sum_{j=k_0+1}^{\infty}\left(\mu(B_j)^{-\lambda}\left(\sum_{l=\infty}^{j}\mu(B_l)^{\alpha p}\|f_j\|^p_{L^{q_1}(X)}\right)^{1/p}\right)^p\right)\right\}^{1/p}\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X).$$

由上述两种情况得，

$$E_3\leqslant C(D_1+D_2)\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X).$$

综合 E_1,E_2,E_3 的估计，我们得到，

$$\|T_{\mu b}f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_2}}(X)\leqslant C\|f\|_{MK^{\alpha,\lambda}_{p,q_1}}(X),$$

因而完成了定理 2 的证明.

类似的方法可以得到交换子在齐次 Herz-Morrey 空间中的有界性，在此略去.

[参考文献]

[1] Pan Wenjie. Fractional integral and weighted inequalities of maximum functions on spaces of homogeneous type [J]. Journal of Beijing University: Natural Science Edition, 1990, 26(5): 543-553.

[2] Calderón A P. Inequalities for the maximal function realted to a metric [J]. Studia Math, 1972(62): 297-306.

[3] Coifman R R, Rochberg R, Weiss G. Fractorization theorems for Hardy spaces in several variables [J]. Ann of Math, 1976, 103(2): 611-635.

[4] Chanillo S. A note on commutators [J]. Indiana Univ Math J, 1982, 31: 7-16.

[5] Lu Shanzhen, Yang Dachun. The continuity of commutators on Herz-type spaces [J]. Michigan Math J, 1997, 44: 255-281.

[6] Perez C. Sharp estimates for commutators of singular integrals viaiterations of Hardy-Littlewood maximal function [J]. Four Anal Appl, 1997, 3: 743-756.

[7] Perez C, Trujillo-Gonealee R. Sharp weighted estimates for multilinear commutators [J]. J London Math Soc, 2002, 65(2): 672-692.

[8] 周伟军，马柏林，徐景实. 分数次多线性交换子在 Herz 空间上的有界性 [J]. J Sys Sci & Math Scis, 2005, 25(2): 160-169.

[责任编辑：丁　蓉]