

一维实余弦信号模型振幅的两步 M 估计

赵媛媛¹, 明瑞星²

(1. 南京师范大学数学科学学院, 江苏 南京 210046)
(2. 中国科学技术大学统计与金融系, 安徽 合肥 230026)

[摘要] 在一维实余弦信号模型中, 对振幅采用两步 M 估计, 即从频率的一个相合估计出发对振幅采用 M 估计. 两步法得到的振幅估计是相合的. 数据模拟表明该估计和最小二乘估计相比更加稳健.

[关键词] 信号模型, 两步 M 估计

[中图分类号] O212.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012) 01-0012-04

Two-Step M Estimators for Parameter Amplitudes in One Dimensional Cosine Model

Zhao Yuanyuan¹, Ming Ruixing²

(1. School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, China)
(2. Department of Statistics and Finance, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: In one dimensional signal processing model, we present robust estimates for parameter amplitudes via constructing a two-step estimation procedure. For certain pre-specified consistent estimators of frequencies, we plug them into the M estimation equations in step one. Subsequently, we obtain M estimators for parameter amplitudes, which are consistent. Simulation studies show that the two-step estimator performs better than the traditional least squares estimator.

Key words: signal processing, two-step M estimator

阵列信号处理是空域信号分析和处理的一种重要手段, 是信号处理领域内的一个重要研究分支. 在最近几十年里, 阵列信号处理得到了迅猛的发展, 并被广泛应用在雷达、通信、声呐、生物医学及地震学等各种领域. 本文考察一维阵列信号模型的一个重要特例, 即一维实余弦信号模型:

$$Y_n = \sum_{k=1}^p A_k \cos(n\mu_k) + e_n, n = 1, \dots, N, \quad (1)$$

其中 Y_n 是接收到的信号, 未知参数 $A_k, \mu_k \in (0, \pi)$ 分别是信号的实振幅和频率, e_n 是均值为零、方差为 σ^2 的噪声. 在模型 (1) 中, 假设模型阶数 p 已知, 令 $A = (A_1, \dots, A_p), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p), \theta = (A, \mu)$, 未知参数 θ 的真实值为 $\theta^0 = (A_1^0, \dots, A_p^0, \mu_1^0, \dots, \mu_p^0)$. 设模型 (1) 中未知参数 θ 的最小二乘估计为 $\hat{\theta}^L = (\hat{A}_1^L, \dots, \hat{A}_p^L, \hat{\mu}_1^L, \dots, \hat{\mu}_p^L)$, 这里 $\hat{\theta}^L$ 满足

$$Q(\hat{\theta}^L) = \min_{\theta} Q(\theta), \quad (2)$$

其中

$$Q(\theta) = \sum_{n=1}^N (Y_n - \sum_{k=1}^p A_k \cos(n\mu_k))^2. \quad (3)$$

显然最小二乘估计 $\hat{\theta}^L$ 是未知参数 θ 的强相合估计, 但是最小二乘估计容易受异常数据的影响, 所以本文要考虑信号模型参数的 M 估计. 我们先简单介绍 M 估计的相关概念, 再给出一维实余弦信号模型振幅的两步 M 估计, 最后给出数据模拟用以说明两步 M 估计比最小二乘估计更加稳健.

收稿日期: 2011-09-06.

通讯联系人: 赵媛媛, 博士, 讲师, 研究方向: 数理统计. E-mail: yyz@mail.ustc.edu.cn

— 12 —

文[1]中,Huber在估计位置参数时首次提出了M估计,文[2]又将其推广到一般的线性模型:

$$Y_n = x_n^T \beta + e_n, n = 1, \cdots, N, \quad (4)$$

其中 β 是未知的 p 维回归参数列向量, e_n 是随机误差.给定一个定义于 $(-\infty, \infty)$ 上的非单调凸函数 ρ ,设线性回归模型(4)中未知参数向量 β 的M估计为 $\hat{\beta}_M$,其满足

$$S_\rho(\hat{\beta}_M) = \min_{\beta} S_\rho(\beta), \quad (5)$$

其中

$$S_\rho(\beta) = \sum_{n=1}^N \rho(Y_n - x_n^T \beta). \quad (6)$$

对于模型(1),未知参数 θ 的M估计记为 $\hat{\theta}^M = (\hat{A}^M, \hat{\mu}^M)$, $\hat{A}^M = (\hat{A}_1^M, \cdots, \hat{A}_p^M)$, $\hat{\mu}^M = (\hat{\mu}_1^M, \cdots, \hat{\mu}_p^M)$,这里 $\hat{\theta}^M$ 满足

$$K_\rho(\hat{\theta}^M) = \min_{\theta} K_\rho(\theta), \quad (7)$$

其中

$$K_\rho(\theta) = \sum_{n=1}^N \rho(Y_n - \sum_{k=1}^p A_k \cos(n\mu_k)). \quad (8)$$

注意到函数(8)中余弦函数为周期非单调函数,因此求解(7)较为困难,本文建议在估计振幅 A 时采用两步M估计.第一步给出频率 μ 的一个相合估计 $\tilde{\mu}^C$,比如可以采用最小二乘估计,第二步从相合估计 $\tilde{\mu}^C$ 出发给出振幅 A 的M估计 \tilde{A}^M ,下面给出 A 的两步M估计的具体实施过程.设 $\{Y_1, \cdots, Y_{n_1}, Y_{n_1+1}, \cdots, Y_{n_1+n_2}\}$ 是一组简单随机样本,样本容量 $N = n_1 + n_2$.

step 1 由 $\{Y_1, \cdots, Y_{n_1}\}$ 得到频率 μ 的一个相合估计 $\tilde{\mu}^C = (\tilde{\mu}_1^C, \cdots, \tilde{\mu}_p^C)$;

step 2 由 $\{Y_{n_1+1}, \cdots, Y_{n_1+n_2}\}$ 以及 $\tilde{\mu}^C$ 得到振幅 A 的两步M估计 \tilde{A}^M ,这里 $\tilde{A}^M = (\tilde{A}_1^M, \cdots, \tilde{A}_p^M)$ 满足

$$H_\rho(\tilde{A}^M, \tilde{\mu}^C) = \min_A H_\rho(A, \tilde{\mu}^C), \quad (9)$$

其中

$$H_\rho(\theta) = \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \rho(Y_n - \sum_{k=1}^p A_k \cos(n\mu_k)). \quad (10)$$

2 主要结果和证明

关于线性模型(4)未知参数M估计的相合性,文[3]提出了一个形式简单且很弱的充分条件,为此对函数 ψ 作如下假设:

(i) $\rho(\cdot)$ 是 \mathbf{R} 上的非单调凸函数,具有左、右导函数 $\psi_-(\cdot)$ 和 $\psi_+(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的一个函数,对所有 $u \in \mathbf{R}$ 均有 $\psi_-(u) \leq \psi(u) \leq \psi_+(u)$;

(ii) $E\psi(e_1) = 0$;

(iii) 存在常数 $c_0 > 0$, $\Delta > 0$,使 $|E\psi(e_1 + u)| \geq c_0 |u|$, $|u| < \Delta$;

(iv) 存在常数 $\Delta > 0$,使 $E\psi^2(e_1 \pm \Delta) < c_1 < \infty$.

引理 1 在模型(4)中随机误差 e_1, \cdots, e_N 独立同分布,存在函数 ψ 满足假设(i) ~ (iv).令 $S_N =$

$\sum_{n=1}^N X_n X_n^T$,那么当 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{-1} = 0$ 时,由(5)式所定义的 $\hat{\beta}_M$ 是 β 的相合估计.

证明 见文[3].

定理 1 在模型(1)中随机误差 e_1, \cdots, e_N 独立同分布,设 $\tilde{\mu}^C$ 是参数 μ 的一个相合估计,又存在函数 ψ 满足条件(i) ~ (iv),则由(9)所定义的两步M估计 \tilde{A}^M 是参数 A 的相合估计.

证明 由两步M估计的构造过程可见 \tilde{A}^M 相当于线性模型

$$Y_n = X_n^T A + e_n, n = n_1 + 1, \cdots, n_1 + n_2 \quad (11)$$

中参数向量 $A = (A_1, \cdots, A_p)$ 的M估计,其中 $X_n^T = (\cos(n\tilde{\mu}_1^C), \cdots, \cos(n\tilde{\mu}_p^C))$.注意到 $\tilde{\mu}^C$ 是随机向量,因

此模型(11)是自变量为随机情形下的线性模型.记 $\tilde{S}_{n_2} = \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} X_n X_n^T$,根据引理1只需验证

$$\lim_{\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty} \tilde{S}_{n_2}^{-1} = 0 \text{ a. s. },$$

再加上条件(i) ~ (iv) 即可保证 \tilde{A}^M 的相合性.

设参数 μ 的真实值为 μ^0 因此当 $n_1 \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{\mu}^C \rightarrow \mu^0$ a. s. 则当 $n_1 \rightarrow \infty$ 时有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n_2} &= \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} X_n X_n^T = \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \begin{pmatrix} (\cos(\tilde{n\mu}_1^C))^2 & \cos(\tilde{n\mu}_1^C) \cos(\tilde{n\mu}_2^C) & \cdots & \cos(\tilde{n\mu}_1^C) \cos(\tilde{n\mu}_p^C) \\ \cos(\tilde{n\mu}_2^C) \cos(\tilde{n\mu}_1^C) & (\cos(\tilde{n\mu}_2^C))^2 & \cdots & \cos(\tilde{n\mu}_2^C) \cos(\tilde{n\mu}_p^C) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\tilde{n\mu}_p^C) \cos(\tilde{n\mu}_1^C) & \cos(\tilde{n\mu}_p^C) \cos(\tilde{n\mu}_2^C) & \cdots & (\cos(\tilde{n\mu}_p^C))^2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{a. s.}}{=} \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \begin{pmatrix} (\cos(n\mu_1^0))^2 & \cos(n\mu_1^0) \cos(n\mu_2^0) & \cdots & \cos(n\mu_1^0) \cos(n\mu_p^0) \\ \cos(n\mu_2^0) \cos(n\mu_1^0) & (\cos(n\mu_2^0))^2 & \cdots & \cos(n\mu_2^0) \cos(n\mu_p^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(n\mu_p^0) \cos(n\mu_1^0) & \cos(n\mu_p^0) \cos(n\mu_2^0) & \cdots & (\cos(n\mu_p^0))^2 \end{pmatrix} = S_{n_2}. \end{aligned}$$

$\forall j, l = 1, \cdots, p$, 矩阵 S_{n_2} 的第 j 行第 l 列元素为

$$(S_{n_2})_{jl} = \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \cos(n\mu_j^0) \cos(n\mu_l^0) = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \cos(n(\mu_j^0 - \mu_l^0)) - \sum_{n=n_1+1}^{n_1+n_2} \cos(n(\mu_j^0 + \mu_l^0)) \right],$$

易知

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{(S_{n_2})_{jl}}{n_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = l; \\ 0, & j \neq l, \end{cases}$$

即

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{S_{n_2}}{n_2} = \frac{1}{2} I_p \geq 0,$$

故

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} S_{n_2}^{-1} = 0.$$

所以

$$\lim_{\min(n_1, n_2) \rightarrow \infty} \tilde{S}_{n_2}^{-1} = 0 \text{ a. s. .}$$

定理1证毕.

3 数值模拟

本节我们将通过数据模拟来验证前面提出的两步估计在保证相合性的同时比一般的最小二乘估计更加稳健. 定理1表明, 在模型(1)中只要 $\hat{\mu}^C$ 是 μ 的相合估计, 在条件(i) ~ (iv) 下(9)式所定义的两步 M 估计 \hat{A}^M 必定是 A 的相合估计. 文[4]证明了

引理2 模型(1)中, 随机误差 e_1, \cdots, e_N 独立同分布且均值为零. 若对于某个 $0 < \delta < 1$, 有 $E|e_1|^{1+\delta} < \infty$, 则(2)所定义的 $\hat{\theta}^L$ 是 θ 的强相合估计.

因此, 在满足引理2的条件下, 我们可以从最小二乘估计 $\hat{\mu}^L$ 出发构造振幅的两步 M 估计.

为了方便起见, 我们考察下面的一维实信号模型:

$$Y_n = 3 \cos n + e_n, \quad n = 1, \cdots, N, \quad (12)$$

这是模型(1)中 $p = 1$, 参数真实值 $\theta^0 = (A^0, \mu^0) = (3, 1)$ 的特殊情况. 取一组简单样本 e_1, \cdots, e_N , 其总体分布分别为 $N(0, 3)$, $t(3)$ 以及混合分布 $80\% N(0, 3) + 20\% t(3)$. 将随机产生的噪声 $\{e_n; n = 1, \cdots, N\}$ 代入模型(12)得到 $\{y_n; n = 1, \cdots, N\}$, 由 $\{y_n; n = 1, \cdots, [N/2]\}$ 以及(2)可得参数 μ 的最小二乘估计值 $\hat{\mu}^L$, 再由 $\{y_n; n = [N/2] + 1, \cdots, N\}$ 以及 $\hat{\mu}^L$ 根据(9)得到振幅 A 的两步 M 估计 \hat{A}^M 的一个估计值. 此处 ρ 取为 Huber 函数 $\rho_c(u)$:

$$\rho_c(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}u^2, & |u| \leq c; \\ c|u| - \frac{1}{2}c^2, & |u| > c. \end{cases}$$

显然 c 越小所得到的 M 估计越稳健 $c \rightarrow 0$ 和 $c \rightarrow \infty$ 对应的极限情形分别就是最小绝对偏差估计和最小二乘估计. 这里 c 分别取 $10^{-6}, 0.5, 1.345, 5, 50$, 随机模拟分别在样本容量 $N = 100, 200, 400$ 的情形下进行. 重复上面的过程 1 000 次, 振幅的 1 000 个最小二乘估计和两步估计的均值和标准差列在表 1 中.

表 1 振幅的两步 M 估计和最小二乘估计

Table 1 Two-step M estimators and least squares estimators for amplitudes							
c	N	$N(0, 3)$		mixture		$t(3)$	
		LS	two-step	LS	two-step	LS	two-step
10^{-6}	100	3.052 (0.358)	2.969 (0.348)	3.027 (0.345)	2.990 (0.339)	3.037 (0.335)	2.983 (0.285)
	200	3.006 (0.248)	2.978 (0.240)	3.007 (0.255)	2.990 (0.235)	3.011 (0.244)	2.983 (0.177)
	400	3.005 (0.175)	3.000 (0.172)	3.009 (0.176)	2.991 (0.170)	3.001 (0.172)	2.991 (0.130)
0.5	100	3.052 (0.358)	2.968 (0.351)	3.027 (0.345)	2.989 (0.340)	3.037 (0.335)	2.983 (0.281)
	200	3.006 (0.248)	2.979 (0.241)	3.007 (0.255)	2.989 (0.235)	3.011 (0.244)	2.983 (0.175)
	400	3.005 (0.175)	3.000 (0.172)	3.009 (0.176)	2.991 (0.171)	3.001 (0.172)	2.991 (0.129)
1.345	100	3.052 (0.358)	2.969 (0.353)	3.027 (0.345)	2.990 (0.339)	3.037 (0.335)	2.982 (0.281)
	200	3.006 (0.248)	2.978 (0.241)	3.007 (0.255)	2.989 (0.235)	3.011 (0.244)	2.983 (0.176)
	400	3.005 (0.175)	3.000 (0.172)	3.009 (0.176)	2.991 (0.170)	3.001 (0.172)	2.991 (0.130)
5	100	3.052 (0.358)	2.969 (0.352)	3.027 (0.345)	2.990 (0.340)	3.037 (0.335)	2.983 (0.290)
	200	3.006 (0.248)	2.978 (0.241)	3.007 (0.255)	2.990 (0.235)	3.011 (0.244)	2.983 (0.183)
	400	3.005 (0.175)	3.000 (0.172)	3.009 (0.176)	2.991 (0.170)	3.001 (0.172)	2.990 (0.134)
50	100	3.052 (0.358)	2.969 (0.352)	3.027 (0.345)	2.990 (0.340)	3.037 (0.335)	2.983 (0.291)
	200	3.006 (0.248)	2.978 (0.241)	3.007 (0.255)	2.990 (0.235)	3.01 (0.244)	2.983 (0.184)
	400	3.005 (0.175)	3.000 (0.172)	3.009 (0.176)	2.990 (0.170)	3.001 (0.172)	2.990 (0.135)

对于正态噪声,如我们所期望的一样,两步 M 估计和最小二乘估计表现出同样的估计效果;但对于非正态噪声,两步 M 估计 \tilde{A}^M 的表现明显更好,一方面 \tilde{A}^M 和参数的真实值非常接近,随着样本容量 N 的增大,估计值的偏差越来越小. 另一方面两步 M 估计 \tilde{A}^M 的标准差要小于 \hat{A}^L 的标准差. 由此可见,两步 M 估计 \hat{A}^M 既保证了无偏性,又比最小二乘估计更加稳健.

[参考文献]

[1] Huber P J. Robust estimation of a location parameter [J]. Ann Math Statist, 1964, 35: 73-401.
[2] Huber P J. Robust regression [J]. Ann Statist, 1973, 1: 799-821.
[3] Zhao L C, Rao C R, Chen X R. A note on the consistency of M -estimates in linear models [M]// Stochastic Process, A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur. New York: Springer-Verlag, 1993: 359-367.
[4] Nandi S, Iyer S K, Kundu D. Estimation of frequencies in presence of heavy tail errors [J]. Statistics Probability Letters, 2002, 58: 265-282.

[责任编辑:丁 蓉]