第 35 卷第 1 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 35 No. 1
2012 年 3 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Mar,2012

L-模糊集与变基幂集线性算子的有界性刻画

毛铭桦

(南京师范大学泰州学院数学系,江苏 泰州 225300)

[摘要] 探讨了 L-模糊有界集与变基幂集线性算子的有界性并给出了它们的一种刻画. 这些结果是经典的赋范线性空间与模糊赋范线性空间中的相应结论的推广.

[关键词] L-模糊赋范空间,L-模糊集,变基幂集线性算子

[中图分类号] O189.13 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)01-0029-05

A Characterization About Boundedness of L-Fuzzy Set and Variable Basis Powerset Linear Operator

Mao Minghua

(Department of Mathematics, Nanjing Normal University Taizhou College, Taizhou 225300, China)

Abstract: A characterization of the L-fuzzy bounded set and the boundedness of the variable basis powerset linear operator have been given. These results generalize the corresponding conclusions of fuzzy normed linear spaces and classical normed linear spaces.

Key words: L-fuzzy normed linear space, L-fuzzy bounded set, the variable basis powerset linear operator

Katsaras[1],吴从炘与方锦暄[2]于 1984 年分别引进模糊赋范空间的概念,随后很多学者展开了模糊赋范线性空间的研究[2-5]. 作为模糊赋范空间的推广,严从华和方锦暄[6]引进了 L-模糊赋范线性空间并且给出 L-模糊拓扑向量空间可 L-模糊赋范化的一个充分必要条件. 本文对 L-模糊有界集与变基幂集线性算子的有界性给予了讨论,所得的结论是经典赋范线性空间与模糊赋范线性空间中相应结论的推广.

1 预备知识和引理

本文中,L 表示一个模糊格. L 中的非零元 λ 称作不可约元,如果满足 $\lambda=\alpha\vee\beta$,则有 $\lambda=\alpha$ 或者 $\lambda=\beta$,其中 $\alpha,\beta\in L$(见[7]). $M(L)$ 表示 L 中的所有不可约元的集合,$M(L)$ 中的元素也称作分子[7]. L 称为是正则的,如果 L 中任意一对非零元的交仍然是非零元. 显然如果 L 是正则的,则 $1\in M(L)$. 本文假设 L,L_1,L_2 是正则的模糊格,$M^*(L^X)$ 表示 L^X 中的所有不可约元. 易知 $M^*(L^X)=\{x_\lambda:x\in X,\lambda\in M(L)\}$.

定义 1[6] 设 X 是 K 上的向量空间,一个从 $M^*(L^X)$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的映射 $\|\cdot\|$ 称为一个 L-模糊范数,如果它满足以下条件:

(LFN-1) $\|x_1\|=0$ 可推出 $x=\theta$;

(LFN-2) $\|kx_\lambda\|=|k|\,\|x_\lambda\|$,$\forall k\in K$;

(LFN-3) $\|x_\lambda+y_\lambda\|\leqslant\|x_\lambda\|+\|y_\lambda\|$,$\forall x_\lambda,y_\lambda\in M^*(L^X)$;

(LFN-4) $\|x_\lambda\|=\bigwedge_{\mu\in\beta^*(\lambda)}\|x_\mu\|$.

如果 $\|\cdot\|$ 是 X 上的 L-模糊范数,则序对 $(L^X,\|\cdot\|)$ 称为 L-模糊赋范空间.

收稿日期:2011-05-31.

基金项目:国家自然科学基金(10671094).

通讯联系人:毛铭桦,讲师,研究方向:模糊数学. E-mail:mhmao307@163.com

注1 由定义1,易见L-模糊赋范空间$(L^X,\|\cdot\|)$具有下面的性质:

(a) 对任意的$\lambda\in M(L)$,$\|\theta\|(\lambda)=0$;

(b) 如果$\lambda,\mu\in M(L)$且$\lambda\leqslant\mu$,那么对任意的$x\in X$有$\|x_\mu\|\leqslant\|x_\lambda\|$成立;

(c) 对每个$\lambda\in M(L)$,定义$\|\cdot\|(\lambda):X\to\mathbf{R}^+$如下:$\|x\|(\lambda)=\|x_\lambda\|$,那么$(X,\|\cdot\|(\lambda))$是一个赋范空间.

证明 (a)与(c)的结论是显然的.我们只需证明(b).由(LFN-4),对任意$\varepsilon>0$,存在$\alpha\in\beta^*(\lambda)$使得$\|x_\alpha\|<\|x_\lambda\|+\varepsilon$.注意到$\lambda\leqslant\mu\Rightarrow\beta^*(\lambda)\subset\beta^*(\mu)$,于是有$\|x_\mu\|\leqslant\|x_\alpha\|<\|x_\lambda\|+\varepsilon$,由$\varepsilon$的任意性我们有$\|x_\mu\|\leqslant\|x_\lambda\|$.

注2 文[2]中的模糊赋范空间是一种特殊的L-模糊赋范空间,其中$L=[0,1]$.

定义2[3] 设X是数域K($\mathbf{R}$或者$\mathbf{C}$)上的向量空间,映射$F:L_1^X\to L_2^Y$称为是一个L-模糊线性序同态,如果它是一个从L_1^X到L_2^Y的序同态,并且满足:

$$F(\alpha A+\beta B)=\alpha F(A)+\beta F(B),\forall A,B\in L^X,\alpha,\beta\in K.$$

定义3[3] 设$T:X\to Y$和$\varphi:L_1\to L_2$是两个映射,通过T和φ定义一个映射$F:L_1^X\to L_2^Y$如下:

$$F(A)(y)=\vee\{\varphi(A(x)):T(x)=y\},\forall A\in L_1^X,y\in Y.$$

特别,对每个$x_\lambda\in Pt(L_1^X)$,$F(x_\lambda)=(Tx)_{\varphi(\lambda)}$.映射$F$称为是由$T$和$\varphi$双诱导的映射.

引理1[7] 设$f:L_1\to L_2$是一个序同态,则

(1) $\forall a\in L_1,a\leqslant f^{-1}f(a)$;$\forall b\in L_2,ff^{-1}(b)\leqslant b$;

(2) $f(a)\leqslant b\Leftrightarrow a\leqslant f^{-1}(b)$,其中$a\in L_1,b\in L_2$;

(3) $f(a)\in M(L_2)$对任意$a\in M(L_1)$;

(4) f^{-1}既保并又保交.

引理2[8] 映射$F:L_1^X\to L_2^Y$是一个L-模糊线性序同态当且仅当存在一个线性算子$T:X\to Y$和一个保有限交的序同态$\varphi:L_1\to L_2$,使得F是由T和φ双诱导的映射.

注3 为方便计,我们用$(T,\varphi)^{\to}$代替L-模糊线性序同态F.根据引理2,如果采用Rodabaugh的术语,这个L-模糊线性序同态$(T,\varphi)^{\to}$也称作变基幂集线性算子.

定义4[6] 一个集合X上的L-拓扑是X上的一族L-模糊子集δ,如果满足下面的条件:

(1) $\underline{\alpha}\in\delta$对所有的$\alpha\in L$;

(2) δ关于任意并是封闭的;

(3) δ关于有限交是封闭的;

则称序对(L^X,δ)为L-拓扑空间(简记为,$L-ts$),δ中的元素称为开的L-模糊子集.当$A\in\delta$,A'称为闭的L-模糊集.我们记$\delta'=\{A'\mid A\in\delta\}$.

定义5[7] 设(L^X,δ)是一个$L-ts$,X上的L-模糊集族Ω称为x_λ的远域基,如果$\Omega\subset\eta(x_\lambda)$并且对于任意的$W\in\eta(x_\lambda)$存在$P\in\Omega$使得$W\subset P$.

引理3[6] 设$(L^X,\|\cdot\|)$是一个L-模糊赋范空间,对任意$t>0$,定义X上的L-模糊集P_t如下:

$$P_t(x)=\vee\{\alpha:\alpha\in M(L),\|x_\alpha\|\geqslant t\},\forall x\in X. \tag{1}$$

则有如下结论:

(P-1) 对任意$y_\mu\in M^*(L^X)$,$y_\mu\in P_t$当且仅当$\|y_\mu\|\geqslant t$;

(P-2) 对任意$\lambda\in M(L)$与$t>0$,$\theta_\lambda\notin P_t$;

(P-3) $P_t=\bigwedge_{s<t}P_s,\forall t>0$;

(P-4) $tP_1=P_t,\forall t>0$;

(P-5) $P'_s+P'_{t-s}\leqslant P'_t,\forall s\in(0,t)$.

定义6[3] 设(L^X,δ)是一个$L-ts$且$\lambda\in M(L)$.设一个X上的L-模糊集A,如果对于(L^X,δ)中θ_λ的每个远域Q,存在$t>0$及$r\in L$,$r\not\leqslant\lambda'$使得$A\wedge\underline{r}\subset tQ'$,则$A$称为是$\lambda$-有界的;如果对于每个$\lambda\in M(L)$,$A$是$\lambda$-有界的,则$A$称为$L$-模糊有界的.

在研究L-模糊集的有界性和变基幂集线性算子的有界性之前,引入下面的相关概念.

定义 7 L 中两个元素 λ 与 μ 称为是可比较的，如果有 $\lambda \leqslant \mu$ 或者 $\mu \leqslant \lambda$，记作 $\lambda \curlyvee \mu$. 如果 λ 与 μ 称为不可比较则我们记作 $\lambda \not\curlyvee \mu$.

定义 8 格 L 称作是伪全序格，如果 $\lambda \in L$，$L[\lambda] = \{\mu \mid \mu \in L, \mu \not\curlyvee \lambda\}$ 是一个有限集.

定义 9 设 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$，$(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 是两个 L-模糊赋范空间. 变基幂集线性算子 $(T,\varphi)^{\rightarrow}: L_1^X \rightarrow L_2^Y$ 称为是有界的，如果对每个 $\lambda \in M(L_1)$，存在 $m = m(\lambda) > 0$ 使得

$$\|Tx\|_2(\varphi(\mu)) \leqslant m\|x\|_1(\mu), \forall x \in X, \mu \geqslant \lambda.$$

注 4 在上述定义里面，我们能够将“对每个 $\lambda \in M(L_1)$”替换为“对每个 $\lambda \in L_1 \backslash \{0\}$”. 换言之，一个 L-模糊线性序同态 $(T,\varphi)^{\rightarrow}: (L_1^X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 是 L-模糊有界的当且仅当对每个 $\alpha \in L_1 \backslash \{0\}$，存在 $m = m(\alpha) > 0$，使得

$$\|Tx\|_2(\varphi(\mu)) \leqslant m\|x\|_1(\mu), \forall x \in X, \mu \geqslant \alpha.$$

事实上，我们仅需证明必要性. 对每个 $\alpha \in L_1 \backslash \{0\}$ 以及每个 $\lambda \in \beta^*(\alpha)$. 由 $(T,\varphi)^{\rightarrow}$ 的有界性知，存在 $m_\lambda > 0$ 使得当 $\sigma \geqslant \lambda$ 以及 $x \in X$，有 $\|(T,\varphi)^{\rightarrow}(x_\sigma)\|_2 \leqslant m_\lambda \|x_\sigma\|_1$. 注意到 $\alpha \geqslant \lambda$，则 $\mu \geqslant \alpha$ 蕴含 $\mu \geqslant \lambda$，从而

$$\|(T,\varphi)^{\rightarrow}(x_\mu)\|_2 \leqslant m_\lambda \|x_\mu\|_1 \leqslant (m_\lambda + 1)\|x_\mu\|_1, \text{当 } \mu \geqslant \alpha, x \in X.$$

设 $m = \inf\{m_\lambda + 1 \mid \lambda \in \beta^*(\alpha)\}$，则有

$$\|(T,\varphi)^{\rightarrow}(x_\mu)\|_2 \leqslant m\|x_\mu\|_1, \text{当 } \mu \geqslant \alpha, x \in X.$$

2 主要结论

定理 1 设 $(L^X, \|\cdot\|)$ 是一个 L-模糊赋范空间，$A \in L^X$.

(1) 若 A 有界，则对每个 $\lambda \in M(L)$，集合 $\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \geqslant \lambda\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中有界.

(2) 如果每个 $\lambda \in M(L)$，集合 $\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \not\leqslant \lambda\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中有界，则 A 有界.

证明 (1) 对每个 $\lambda \in M(L)$，选取 $\mu \in L$ 并且 $\lambda \not\leqslant \mu$，那么不难验证 $Q_1 \vee \underline{\mu}$ 是 θ_λ 的一个远域，其中 Q_1 按式(1)定义. 因为 A 在 $(L^X, \|\cdot\|)$ 中有界，故存在 $s > 0$ 以及 $r \in L$ 且 $\lambda \not\leqslant r'$ 使得 $A \wedge \underline{r} \subset s(Q_1 \vee \underline{\mu})'$，于是

$$Q_s \vee \underline{\mu} = s(Q_1 \vee \underline{\mu}) \subset A' \vee \underline{r}'. \tag{2}$$

根据式(2)，$x_\alpha \notin A'$ 与 $\alpha \geqslant \lambda$ 可以推出 $\|x_\alpha\| < s$.

事实上由 $\alpha \geqslant \lambda$ 且 $\lambda \not\leqslant r'$ 可推出 $\alpha \not\leqslant r'$. 又 $x_\alpha \notin A'$，故 $x_\alpha \notin A' \vee r'$. 由式(2)可知 $x_\alpha \notin Q_s \vee \underline{\mu}$，因此 $x_\alpha \notin Q_s$. 由引理 3，我们有 $\|x_\alpha\| < s$，因此集合 $\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \geqslant \lambda\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中有界.

(2) 假设 A 在 $(L^X, \|\cdot\|)$ 中无界，那么存在 $\lambda \in M(L)$ 以及 θ_λ 的一个远域 $Q_{t_0} \vee \underline{\mu_0}$（其中 $t_0 > 0$，$\mu_0 \in M(L)$ 并且 $\lambda \not\leqslant \mu_0$），使得

$$A \wedge \underline{r} \not\subset n(Q'_{t_0} \wedge \underline{\mu'_0}), \forall n \in \mathbf{N}, r \in L \text{ 且 } r \not\leqslant \lambda'. \tag{3}$$

令 $r_0 = \mu_0'$. 注意到 $r_0 = \vee \beta^*(r_0)$ 并且 $\lambda \not\leqslant r_0'$，因此存在 $\mu \in \beta^*(r_0)$ 使得 $\mu \not\leqslant \lambda'$. 于是由式(3)可知

$$A \wedge \underline{\mu} \not\subset n(Q'_{t_0} \wedge \underline{r_0}), n = 1, 2, \cdots$$

即 $n(Q_{t_0} \vee \underline{r_0}') \not\subset A' \vee \underline{\mu}'$，$n = 1, 2, \cdots$. 因此存在 $x_{\lambda_n}^{(n)} \in n(Q_{t_0} \vee \underline{r_0}')$，但是 $x_{\lambda_n}^{(n)} \notin A' \vee \underline{\mu}'$. 注意到 $r_0' \leqslant \mu'$ 并且 $x_{\lambda_n}^{(n)} \notin \underline{\mu}'$，因此 $x_{\lambda_n}^{(n)} \notin \underline{r_0}'$. 于是我们有 $x_{\lambda_n}^{(n)} \in nQ_{t_0}$ 而且 $x_{\lambda_n}^{(n)} \notin A'$. 另一方面 $\lambda_n \not\leqslant r_0'$，即 $\lambda_n \not\leqslant \mu_0$. 再根据 $x_{\lambda_n}^{(n)} \in nQ_{t_0}$，可推得 $\|x_{\lambda_n}^{(n)}\| \geqslant nt_0$，因此集合 $\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \not\leqslant \mu_0\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中无界，这与条件(2)矛盾.

定理 2 $(L^X, \|\cdot\|)$ 是 L-模糊赋范空间并且 $A \in L^X$. 如果 L 是伪全序格，那么 A 在 $(L^X, \|\cdot\|)$ 中有界当且仅当对每个 $\lambda \in M(L)$)，$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \geqslant \lambda\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中有界集.

证明 根据定理 1(1)，我们只需要证明充分性.

假设每个 $\lambda \in M(L)$，集合 $\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \geqslant \lambda\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中有界. 注意到

$$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha \geqslant \lambda\} = \{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A', \alpha > \lambda\} \cup \{\|x_\lambda\| \mid x_\lambda \notin A'\},$$

因此对每个 $\lambda \in M(L)$,集合$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A',\alpha > \lambda\}$与集合$\{\|x_\lambda\| \mid x_\lambda \notin A'\}$都是 **R** 中的有界集,而 L 是伪全序格,由其定义可知,集合 $L[\lambda] = \{\alpha \mid \alpha \in L,\alpha \not\leq \lambda\}$ 是一个有限集. 对任意 $x_\alpha \notin A'$,存在 $\nu \in \beta^*(\alpha)$ 使得 $x_\nu \notin A'$. 注意到 $\|x_\alpha\| = \bigwedge\limits_{\lambda \in \beta^*(\alpha)} \|x_\lambda\| \leq \|x_\nu\|$,这意味着 $\|x_\alpha\|$ 在 **R** 中有界. 于是

$$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A',\alpha \not\leq \lambda\} = \bigcup_{\alpha \in L[\lambda]} \{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A'\}$$

在 **R** 中有界. 因此由

$$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \not\leq A',\alpha \not\leq \lambda\} = \{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A',\alpha > \lambda\} \cup \{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A',\alpha \not\leq \lambda\}$$

可以推得$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \notin A',\alpha \not\leq \lambda\}$在 **R** 中有界,于是由定理1(2)可得 A 在$(L^X,\|\cdot\|)$中有界.

推论1　设$(L^X,\|\cdot\|)$是 L-模糊赋范空间,则对任意的 $t > 0$,Q_t' 是 X 上一个 L-模糊有界集,其中 Q_t 按(1)定义.

证明　对每个 $\lambda \in M(L)$,令 $\alpha \in L$ 且满足 $\alpha \not\leq \lambda$ 以及 $x_\alpha \not\leq Q_t$,由引理3(P-1)可知 $\|x_\alpha\| < t$. 于是$\{\|x_\alpha\| \mid x_\alpha \not\leq (Q_t')',\alpha\lambda\}$在 **R** 中有界. 因此由定理1(2),可知 Q_t' 是 L-模糊有界集.

引理4　设$(T,\varphi)^\to: L_1^X \to L_2^Y$是一个变基幂集线性算子,$x_\mu \in M^*(L_1^X)$以及 $A \in L_1^X$. 那么 $x_\mu \not\leq A'$ 蕴含$(T,\varphi)^\to(x_\mu) \not\leq [(T,\varphi)^\to(A)]'$.

证明　我们只需证明$(T,\varphi)^\to(x_\mu) \leq [(T,\varphi)^\to(A)]'$蕴含 $x_\mu \leq A'$. 因为

$$(T,\varphi)^\to(x_\mu) \leq [(T,\varphi)^\to(A)]' \text{以及} A \leq (T,\varphi)^\leftarrow((T,\varphi)^\to(A)),$$

故 $x_\mu \leq (T,\varphi)^\leftarrow([(T,\varphi)^\to(A)]') = [(T,\varphi)^\leftarrow((T,\varphi)^\to(A))]' \leq A'$.

定理3　设$(L_1^X,\|\cdot\|_1)$,$(L_2^Y,\|\cdot\|_2)$是两个 L-模糊赋范空间. 设$(T,\varphi)^\to: L_1^X \to L_2^Y$是变基幂集线性算子.

(1) 如果$(T,\varphi)^\to$是 L-模糊有界的,L_2 是伪全序格并且对任意 λ,其中 $\lambda \neq 0$ 且 $\varphi^{-1}(\lambda) \neq 0$,那么$(T,\varphi)^\to$ 将$(L_1^X,\|\cdot\|_1)$中 L-模糊有界集映成$(L_2^Y,\|\cdot\|_2)$中 L-模糊有界集.

(2) 如果$(T,\varphi)^\to$将$(L_1^X,\|\cdot\|_1)$中 L-模糊有界集映成$(L_2^Y,\|\cdot\|_2)$中 L-模糊有界集,则$(T,\varphi)^\to$是 L-模糊有界的.

证明　(1) 设 A 是$(L_1^X,\|\cdot\|_1(\cdot))$中 L-模糊有界集. 只要证明$(T,\varphi)^\to(A)$是$(L_2^Y,\|\cdot\|_2)$中 L-模糊有界集. 因为 A 是$(L_1^X,\|\cdot\|_1(\cdot))$中 L-模糊有界集,由定理1,我们知道对每个 $r \in M(L_1)$,集合$\{\|x\|_1(\mu) \mid x_\mu \notin A',\mu \geq r\}$在 **R** 中有界,从而存在常数 $m_1 = m_1(r) > 0$ 使得

$$x_\mu \notin A' \text{与} \mu \geq r \Rightarrow \|x\|_1(\mu) = \|x_\mu\|_1 \leq m_1. \tag{4}$$

我们现证明$(T,\varphi)^\to(A)$是$(L_2^Y,\|\cdot\|_2(\cdot))$中的 L-模糊有界集. 注意到 L_2 是伪全序格,由定理2,只需证明对每个 $\lambda \in M(L_2)$,集合$\{\|y_\alpha\|_2 \mid y_\alpha \notin ((T,\varphi)^\to(A))',\alpha \geq \lambda\}$是 **R** 中有界集. 设 $y_\alpha \notin ((T,\varphi)^\to(A))'$ 且 $\alpha \geq \lambda$,则有 $\alpha \not\leq ((T,\varphi)^\to(A))'(y)$,即$(T,\varphi)^\to(A)(y) \not\leq \alpha'$. 注意到$(T,\varphi)^\to(A)(y) = \bigvee\limits_{Tx=y} \varphi(A(x))$,因此存在 $x \in X$ 且 $Tx = y$ 使得 $\varphi(A)(x) \not\leq \alpha'$,于是我们有 $\varphi^{-1}(\alpha) \not\leq A'(x)$. 令 $\mu = \varphi^{-1}(\alpha)$,那么 $\mu \not\leq A'(x)$,即 $x_\mu \notin A'$. 另一方面,由 $\alpha \geq \lambda$ 可推知 $\mu = \varphi^{-1}(\alpha) \geq \varphi^{-1}(\lambda)$. 因为 $\varphi^{-1}(\lambda) \neq 0$,故存在 $r \in M(L_1)$ 使得 $\mu \geq \varphi^{-1}(\lambda) \geq r$. 因而由式(4)可知

$$\|x\|_1(\mu) \leq m_1. \tag{5}$$

因为$(T,\varphi)^\to$是有界的,对上述 $r \in M(L_1)$ 存在一个常数 $m_2 = m_2(r)$ 使得当 $x \in X$ 且 $\nu \geq r$ 时,有 $\|T(x)\|_2(\varphi(\nu)) \leq m_2\|x\|_1(\nu)$. 特别地,

$$\|T(x)\|_2(\varphi(\mu)) \leq m_2\|x\|_1(\mu). \tag{6}$$

注意到 $Tx = y$ 以及 $\varphi(\mu) = \varphi\varphi^{-1}(\alpha) \leq \alpha$,我们由式(5)、式(6)以及注1可以得到

$$\|y_\alpha\|_2 = \|y\|_2(\alpha) \leq \|T(x)\|_2(\varphi(\mu)) \leq m_2 \cdot m_1, \forall y_\alpha \notin ((T,\varphi)^\to(A))',\alpha \geq \lambda.$$

这就意味着对每个 $\lambda \in M(L_2)$,集合$\{\|y_\alpha\|_2 \mid y_\alpha \notin ((T,\varphi)^\to(A))',\alpha \geq \lambda\}$是 **R** 中有界集.

(2) 取 $t \geq 1$,我们知道 Q_t' 在$(L_1^X,\|\cdot\|_1(\cdot))$中是一个 L-模糊有界集. 由假设可知,$(T,\varphi)^\to(Q_t')$是$(L_2^Y,\|\cdot\|_2(\cdot))$中 L-模糊有界集. 注意到对每个 $\lambda \in M(L_1)$,都有 $\varphi(\lambda) \in M(L_2)$,依据定理2,$\{\|y_\mu\|_2 \mid y_\mu \notin ((T,\varphi)^\to(Q_t'))',\mu \geq \varphi(\lambda)\}$是 **R** 中的有界集. 因此存在常数 $m = m(\lambda) > 0$,使得下式成立

$$y_\mu \notin [(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_t)]',\mu \geqslant \varphi(\lambda) \Rightarrow \|y\|_2(\mu) = \|y_\mu\|_2 \leqslant m. \tag{7}$$

当 $x \in X, x \neq \theta, r \geqslant \lambda$ 以及任意的 $\varepsilon > 0$,我们有 $\left\|\dfrac{x_r}{\|x_r\|_1 + \varepsilon}\right\|_1 < 1 \leqslant t$. 由引理 3 可知 $\dfrac{x_r}{\|x_r\|_1 + \varepsilon} \not\leqslant Q_t$,则根据引理 4 有 $(T,\varphi)^{\rightarrow}\left(\dfrac{x_r}{\|x_r\|_1 + \varepsilon}\right) \not\leqslant [(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_t)]'$ 成立,也即 $\left(\dfrac{Tx}{\|x\|_1(r) + \varepsilon}\right)_{\varphi(r)} \not\leqslant [(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_t)]'$.

再注意到 $\varphi(r) \geqslant \varphi(\lambda)$,由式(7)可以推得 $\left\|\dfrac{Tx}{\|x\|_1(r) + \varepsilon}\right\|_2(\varphi(r)) \leqslant m$. 因此我们可以得到 $\|Tx\|_2(\varphi(r)) \leqslant m(\|x\|_1(r) + \varepsilon)$ 对所有的 $x \in X, r \geqslant \lambda$ 都成立. 令 $\varepsilon \to 0$,则当 $x \in X, r \geqslant \lambda$,有 $\|Tx\|_2(\varphi(r)) \leqslant m\|x_r\|_1$ 成立,从而 $(T,\varphi)^{\rightarrow}$ 是 L-模糊有界的.

显然,从上面的定理可以得到下面的推论:

推论 2 设 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$,$(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 是两个 L-模糊赋范空间并且 $(T,\varphi)^{\rightarrow}: L_1^X \to L_2^Y$ 是变基幂集线性算子. 如果 L_2 是伪全序格并且当 $\lambda \in M(L_2)$ 有 $\varphi^{-1}(\lambda) \neq 0$,那么 $(T,\varphi)^{\rightarrow}$ 是有界的当且仅当 $(T,\varphi)^{\rightarrow}$ 将 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$ 中每个 L-模糊有界集映成 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中 L-模糊有界集.

推论 3 设 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$,$(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 是两个 L-模糊赋范空间并且 $(T,\varphi)^{\rightarrow}: L_1^X \to L_2^Y$ 是变基幂集线性算子. 如果 L_2 是全序格并且 φ 是双射,则 $(T,\varphi)^{\rightarrow}$ 有界当且仅当 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_1')$ 是 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中的 L-模糊有界集,其中 Q_1 按式(1)定义.

证明 由推论 1,Q_1' 是 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$ 中一个 L-模糊有界集,因此必要性是显然的.

下面给出充分性的证明. 设 A 是 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$ 中一个 L-模糊有界集,由推论 2,只需证明 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(A)$ 是 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中一个 L-模糊有界集.

因为 φ 是双射,对每个 $\lambda \in M(L_2)$,我们有 $\mu = \varphi^{-1}(\lambda) \in M(L_1)$. 注意到 Q_1 是 $(L_1^X, \|\cdot\|_1)$ 中 θ_μ 的远域,因此存在 $t > 0$ 以及 $r \not\leqslant \mu'$,即 $r > \mu'$,使得 $A \wedge \underline{r} \subset tQ_1'$,从而 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(A) \wedge \underline{\varphi(r)} \subset t(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_1')$.

由充分性的条件,$(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_1')$ 是 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中的一个 L-模糊有界集. 因此对每个 $\lambda \in M(L_2)$ 及 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中 θ_λ 的任一远域 W,存在 $s > 0$ 与 $\alpha > \lambda'$ 使得 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_1') \wedge \underline{\alpha} \subset sW$. 于是 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(A) \wedge \underline{\varphi(r) \wedge \alpha} \subset t(T,\varphi)^{\rightarrow}(Q_1') \wedge \underline{\alpha} \subset (st)W$.

由于 L_2 是全序格并且 φ 是双射,故 $\varphi(r) > \varphi(\mu') = \varphi \circ \varphi^{-1}(\lambda') = \lambda'$,从而 $\varphi(r) \wedge \alpha > \lambda'$. 由定义 6 可知 $(T,\varphi)^{\rightarrow}(A)$ 是 $(L_2^Y, \|\cdot\|_2)$ 中的 L-模糊有界集,得证.

[参考文献]

[1] Katsaras A K. Fuzzy topological vector spaces II [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 143-154.

[2] 吴从炘,方锦暄. Kolmogoroff 定理的 fuzzy 推广 [J]. 哈尔滨工业大学报, 1984, 16(1): 4-10.

[3] Fang Jinxuan. Fuzzy norm of a linear operator and fuzzy bounded linear operators [J]. J Fuzzy Math, 1999, 7(3): 755-764.

[4] Krishna S V, Sarma K K K. Separations of fuzzy normed linear spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 63(2): 207-217.

[5] 吴从炘,马明. 模糊分析学基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.

[6] Yan Conghua, Fang Jinxuan. Generalization of Kolmogoroff's theorem to L-topological spaces [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 125(2): 177-183.

[7] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.

[8] Fang Jinxuan. The continuity of fuzzy linear order-homorphism [J]. J Fuzzy Math, 1997, 5(4): 829-838.

[责任编辑:丁 蓉]