两类三次微分系统的中心焦点问题

桑 波

(聊城大学数学科学学院,山东 聊城 252059)

[摘要] 本文在奇点量方法的基础上,以 Gröbner 基为工具,提出了焦点量序列的约化算法;作为应用,讨论了两类三次系统的中心焦点问题,给出了系统具有中心的若干非平凡条件.

[关键词] 奇点量,焦点量,三次系统,中心条件

[中图分类号] O175.12 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)02-0016-06

The Center-Focus Problems for Two Classes of Cubic Systems

Sang Bo

(School of Mathematics Sciences, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

Abstract: A full-reduction algorithm using Gröbner Basis is proposed for the sequence of focal values based on the method of singular point values. As applications, the center-focus problems of two classes of cubic systems are considered and several non-trivial center conditions are obtained.

Key words: singular point value, focal value, cubic systems, center conditions

中心焦点问题是常微分方程定性理论中的经典课题,它与希尔伯特第十六问题的第二部分紧密相关. Bautin 完整解决了二次系统的中心焦点判定问题,对于三次及以上系统,还没有彻底的结论. 一般来讲,中心焦点问题的最终解决依赖于焦点量的计算,但当计算量过大时,有必要用间接方法推导中心条件. 刘一戎等[1]定义基本李不变量,给出了广义对称原理. Lloyd N 等[2]以 Gröbner 基为工具,寻找双线性变换将一类多项式系统化为时间可逆系统,从而确定非平凡的中心条件.

焦点量是确定细焦点的稳定性和其扰动极限环的稳定性的判定量. 形式级数法和后继函数法是计算焦点量的两类经典方法[3,4]. 为了解决中心焦点问题,奇点量方法[1,5]、复算法[6]、标准形算法[7]和摄动算法[8]相继出现. 然而所有这些方法生成的判定量序列通常都是非常复杂的. 国内外一些学者利用广义除法[9]和结式[10]进行焦点量序列的约化,但这些方法无法保证约化后的焦点量序列是最简的;而 Gröbner 基约化理论可以使得焦点量序列中焦点量相对于前面诸阶焦点量是最简的,从而有利于焦点量序列的零点分解,因此探讨焦点量的自动约化算法是非常必要的.

1 焦点量序列的约化算法

考虑在原点的某个邻域内解析的实微分系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + \sum\limits_{k+j=2}^{\infty} A_{k,j}x^k y^j \equiv -y + X(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \sum\limits_{k+j=2}^{\infty} B_{k,j}x^k y^j \equiv x + Y(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

通过变换 $z = x + iy, w = x - iy, T = it, i = \sqrt{-1}$,系统(1)变为复解析微分系统

收稿日期: 2012-02-03.

基金项目: 国家自然科学基金(10871214).

通讯联系人: 桑 波,博士,副教授,研究方向: 常微分方程定性理论和符号计算. E-mail: sangbopress@126.com

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}T}=z+\sum\limits_{k+j=2}^{\infty}a_{k,j}z^{k}w^{j}\equiv Z(z,w),\\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}T}=-w-\sum\limits_{k+j=2}^{\infty}b_{k,j}w^{k}z^{j}\equiv -W(z,w),\end{cases}\tag{2}$$

考虑到系统(1)为实系统，系统(2)的系数满足下面的共轭条件：

$$a_{k,j}=\overline{b_{k,j}},\quad k,j\geqslant 0,k+j\geqslant 2.$$

为了描述焦点量的约化算法，我们先简单介绍奇点量和焦点量的关系.

引理1[1]　通过形式变换

$$\begin{cases}\varphi(z,w)=z+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty}A^{*}_{\alpha,\beta}z^{\alpha}w^{\beta},\\ \psi(z,w)=w+\sum\limits_{\alpha+\beta=2}^{\infty}B^{*}_{\alpha,\beta}w^{\alpha}z^{\beta},\end{cases}\tag{3}$$

系统(2)可化为标准形

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}T}=\varphi\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_{k}(\varphi\cdot\psi)^{k},\\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}T}=-\psi\sum\limits_{k=0}^{\infty}q_{k}(\varphi\cdot\psi)^{k},\end{cases}\tag{4}$$

其中 $A^{*}_{k+1,k}=B^{*}_{k+1,k}=0,p_0=q_0=0$.

定义1[1]　(i)在引理1的记号下，令 $\mu_0=0,\mu_k=p_k-q_k,k=1,2,3,\cdots$，称 μ_k 为系统(2)在原点的第 k 阶奇点量.

(ii)若 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_{k-1}=0,\mu_k\neq 0$，则称系统(2)以原点为 k 阶细奇点.

(iii)若系统(2)在原点的所有奇点量均为零，则称系统(2)以原点为广义中心.

引理2[1]　系统(1)的第 k 阶焦点量 W_k 与系统(2)的第 k 阶奇点量 μ_k 存在关系：

$$W_k=i\mu_k,\quad k=1,2,3,\cdots\tag{5}$$

引理3[5]　系统(2)的第 m 阶奇点量 μ_m 由下面的递推公式确定：

$$\mu_m=\sum_{k+j=3}^{2m+4}[(m-k+2)a_{k,j-1}-(m-j+2)b_{j,k-1}]C_{m-k+2,m-j+2},\tag{6}$$

其中

$$C_{1,1}=1,\quad C_{2,0}=C_{0,2}=C_{k,k}=0,\ k=2,3,\cdots,$$

$$C_{\alpha,\beta}=\frac{1}{\beta-\alpha}\sum_{k+j=3}^{\alpha+\beta+2}[(\alpha-k+1)a_{k,j-1}-(\beta-j+1)b_{j,k-1}]C_{\alpha-k+1,\beta-j+1},\ \alpha\neq\beta,$$

且当 $k<0$ 或 $j<0$ 时，

$$a_{k,j}=b_{k,j}=C_{k,j}=0.$$

Gröbner基方法是由Buchberger B发现的. 该方法能从任意多项式理想的一组初始生成元得到另一组性质良好的生成元，称为该理想的Gröbner基. Gröbner基与初始生成元具有相同的零点集. Gröbner基的意义不仅在于它具有良好的性质，而且在于它是可计算的，其中符号计算软件Maple 11以上版本引入了高效的Gröbner基计算引擎FGb软件包. 由于多项式微分系统的焦点量通常比较复杂，因此需要用Gröbner基约化理论进行简化.

对于实解析系统(1)，下面的算法利用Gröbner基约化技术实现了焦点量序列的约化，即使得第 j 阶焦点量 W_j 相对于前面各阶焦点量 $W_1,W_2,\cdots,W_{j-1}$ 的Gröbner基是约化的，这里 $j=2,3,\cdots,m$. 由Gröbner基约化理论，约化后的焦点量序列与初始焦点量序列具有相同的零点集. 在下面的算法中，为了显著地提高Gröbner基的运算效率，我们使用了重新参数化的技巧.

算法1　第一步：计算前 $m-1$ 阶约化焦点量 $W_1,W_2,\cdots,W_{m-1}$.

第二步：利用公式(5)～(6)计算第 m 阶焦点量 W_m.

第三步：对上面得到的前 m 阶焦点量重新参数化，即 $A_{l,s}\to A_{l,s}^{l+s-1},B_{l,s}\to B_{l,s}^{l+s-1}$，使得各焦点量成为新参

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

数下的齐次多项式 $V_1,V_2,\cdots,V_m$,这里 $A_{l,s},B_{l,s}$ 为实解析系统(1)中的系数.

第四步:在数学软件 Maple™ 推荐项序 tord 下,求 V_m 关于 Gröbner 基

$$\mathrm{Basis}([V_1,V_2,\cdots,V_{m-1}],\mathrm{tord})$$

的范式,并将其赋予 V_m. 然后将 V_m 在重新参数化前的原像赋予 W_m.

第五步:返回约化焦点量序列 $W_1,W_2,\cdots,W_m$.

2　一类含有 5 个实参数的三次系统

考虑一类具有 5 个实参数的三次微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-2d_3xy-(87d_5+d_1)x^3-(3d_2+229d_4+3)x^2y+\\ \qquad (229d_5-d_1)xy^2+(d_2+87d_4-3)y^3,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+(3+d_3)x^2+(3-d_3)y^2+(d_2+87d_4+3)x^3-(229d_5+d_1)x^2y-\\ \qquad (3d_2+229d_4-3)xy^2+(87d_5-d_1)y^3.\end{cases}\tag{7}$$

对于系统(7),我们通过计算机推导出系统的前 6 阶约化焦点量公式,并得到系统具有中心的充要条件.

系统(7)的前 6 阶焦点量依次为

$$W_1=-2d_1,$$
$$W_2=2(1264d_4+8d_2+213d_3-1422)d_5,$$
$$W_3=-3(71d_3-474)(d_3-9)(d_3-10)d_5,$$
$$\begin{aligned}W_4={}&508656d_3d_4d_5-573680d_3d_5^3-573680d_3d_4^2d_5+1654740d_3d_5-51688d_3^2d_4d_5+\\&\frac{80656}{3}d_3^2d_5^3+\frac{80656}{3}d_3^2d_4^2d_5-\frac{229827}{2}d_3^2d_5+2631648d_4^2d_5-1092096d_4d_5-\\&5925474d_5+2631648d_5^3,\end{aligned}$$
$$W_5=-\frac{9}{662}d_5(71d_3-474)(d_3-9)(29509d_4-27759),$$
$$\begin{aligned}W_6={}&\frac{9019399445666127910929 6}{261898730264803}d_3d_5-\frac{5117561856}{4489}d_3d_5^3-\frac{625781860704}{300763}d_3d_4d_5-\\&\frac{343960166088393639640848}{261898730264803}d_5+\frac{4177754957376}{300763}d_4d_5-\\&\frac{579272148423902130051 6}{261898730264803}d_3^2d_5+\frac{34165131264}{4489}d_5^3.\end{aligned}$$

在给出系统(7)以原点为中心的充要条件之前,先给一个引理.

引理 4[2]　对于系统(1),如果存在连续可微函数 $R:U\to R$,使得在 U 内有

$$\frac{\partial}{\partial x}(RX)+\frac{\partial}{\partial y}(RY)\equiv 0,$$

其中 $U\subseteq R^2$ 是以原点为中心的某个空心邻域,且当 $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ 时,

$$\int_0^{2\pi}(RX\cos\theta+RY\sin\theta)\,d\theta=O(1),$$

这里 $\cos\theta=\dfrac{x}{r},\sin\theta=\dfrac{y}{r}$,则系统(1)以原点为中心.

定理 1　系统(7)以原点为中心的充要条件是下列条件之一成立:

(i) $d_1=d_5=0$;

(ii) $d_1=0,d_2=-158d_4,d_3=\dfrac{474}{71}$.

证　**必要性**　只需求解多项式方程组 $\{W_j=0:j=1,2,\cdots,6\}$,得到两组条件(i)~(ii).

充分性　当条件(i)成立时,系统(7)关于 x 轴时间可逆,因此由 Poincaré 对称原理,系统(7)

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

以原点为中心; 当条件(ii) 成立时,系统(7) 在以原点为中心的某个开邻域内具有积分因子

$$R(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{245}{87}},$$

由引理4,系统(7) 以原点为中心.

推论1 系统(7) 至多以原点为6阶细焦点.

根据上面的定理和推论,文[5] 关于系统(7) 的结果是错误的.

3 一类含有6个实参数的三次微分系统

我们讨论一类含有6个实参数的三次微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -y-2d_3xy+(71d_5-d_1)x^3-(3d_2+229d_4+3)x^2y- \\ \qquad (ad_5+d_1)xy^2+(d_2+87d_4-3)y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x+(3+d_3)x^2+(3-d_3)y^2+(d_2+87d_4+3)x^3+(ad_5-d_1)x^2y- \\ \qquad (3d_2+229d_4-3)xy^2-(71d_5+d_1)y^3.\end{cases} \tag{8}$$

对于该系统,当 $a=245$ 时的情形已被文[5] 解决. 根据王东明的焦点量算法[4],我们求得系统(8) 前8阶焦点量,然后通过第二部分的算法进行约化,这些约化后的焦点量顺次为:

$W_1 = -8/3d_1$,

$W_2 = 4/5d_5(71ad_4+ad_2-6ad_3+18a-213d_2-17395d_4+426d_3+1278)$,

$W_3 = \dfrac{96}{35}d_5(d_3-9)(d_3-10)(-71d_3+ad_3-3a-213)$,

$$\begin{aligned}W_4 = {}& 2304ad_5+\frac{3489792}{7}d_4d_5-\frac{40328}{3}d_5{}^3a+\frac{88}{21}d_5{}^3a^3-\frac{2840}{3}d_5{}^3a^2+\frac{31496168}{21}d_3d_5{}^3- \\ & \frac{5726576}{63}d_3{}^2d_5{}^3-\frac{3347224}{63}d_3d_5{}^3a+\frac{11487232}{189}d_3{}^2d_4{}^2d_5-\frac{472576}{9}d_3{}^2d_5d_4+\frac{90112}{21}d_4{}^2d_5a+ \\ & \frac{9088000}{21}d_3d_5d_4+\frac{16}{189}d_3{}^2d_5{}^3a^3-\frac{5680}{189}d_3{}^2d_5{}^3a^2+\frac{40423424}{7}d_4{}^2d_5-\frac{1664}{21}d_3{}^2ad_5+ \\ & \frac{49152}{7}d_4d_5a-\frac{80992256}{63}d_3d_4{}^2d_5+\frac{72704}{21}d_2d_3d_5+\frac{118144}{21}d_3{}^2d_5+568d_3d_5{}^3a^2- \\ & \frac{3712}{7}d_3ad_5-\frac{36352}{63}d_2d_3{}^2d_5+\frac{499840}{7}d_3d_5+\frac{1454080}{21}d_2d_4d_5-\frac{104}{63}d_3d_5{}^3a^3+ \\ & \frac{80656}{27}d_3{}^2d_5{}^3a-\frac{145408}{9}d_2d_3d_5d_4+\frac{145408}{189}d_2d_3{}^2d_5d_4-\frac{106496}{63}d_3d_4{}^2d_5a- \\ & \frac{51200}{21}d_3d_4d_5a+\frac{16384}{189}d_3{}^2d_4{}^2d_5a+\frac{2048}{63}d_3{}^2d_4d_5a+\frac{37222744}{7}d_5{}^3+163584d_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_5 = {}& \frac{290682432}{1001}ad_5+\frac{231581942784}{1001}d_4d_5-\frac{2414840640}{1001}d_5{}^3a+\frac{2112960}{143}d_5{}^3a^2-\frac{53280063104}{1001}d_3d_5{}^3+ \\ & \frac{870439552}{91}d_3{}^2d_5{}^3-\frac{1363200}{77}d_2{}^2d_5-\frac{9088}{77}d_2{}^2d_5d_3{}^2+\frac{281728}{77}d_2{}^2d_5d_3+\frac{1778948736}{1001}d_3d_5{}^3a+ \\ & \frac{2685858432}{1001}d_3{}^2d_4{}^2d_5+\frac{4312292352}{1001}d_3{}^2d_5d_4-\frac{64249906176}{1001}d_3d_5d_4+\frac{613440}{1001}d_3{}^2d_5{}^3a^2+ \\ & \frac{50163306240}{1001}d_4{}^2d_5+\frac{10766016}{1001}d_3{}^2ad_5+\frac{120849408}{1001}d_4d_5a-\frac{23840486784}{1001}d_3d_4{}^2d_5- \\ & \frac{789783552}{1001}d_2d_3d_5-\frac{764387136}{1001}d_3{}^2d_5-\frac{6770560}{1001}d_3d_5{}^3a^2-\frac{129192192}{1001}d_3ad_5+ \\ & \frac{53219328}{1001}d_2d_3{}^2d_5+\frac{4586322816}{1001}d_3d_5-\frac{765027840}{1001}d_2d_4d_5-\frac{25487296}{143}d_3{}^2d_5{}^3a+ \\ & \frac{21902080}{1001}d_2d_3d_5d_4+\frac{1872128}{91}d_2d_3{}^2d_5d_4-\frac{53710848}{1001}d_3d_4d_5a+\frac{4475904}{1001}d_3{}^2d_4d_5a-\end{aligned}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{246013704960}{1001}d_5^{\ 3}+\frac{20638452672}{1001}d_5+\frac{2822805504}{1001}d_2d_5,$$

$\cdots,$

$$\begin{aligned}W_8=&-\frac{29431990260208691352576}{1848539267575}d_2^{\ 2}d_3d_5d_4-\frac{22411027181661807013632}{1176343170275}d_2^{\ 2}d_5d_3+\\&\frac{17659194156125214811545 6}{1848539267575}d_2^{\ 2}d_4d_5+\frac{13446616308997084208179 2}{1176343170275}d_2^{\ 2}d_5-\\&\frac{94182368832667812328243 2}{1848539267575}d_2d_3d_5d_4^{\ 3}-\frac{67192970908749411953124864}{12939774873025}d_2d_3d_5d_4-\\&\frac{59394664523310165935806464}{12939774873025}d_2d_3d_4^{\ 2}d_5-\frac{60509773390486878936806 4}{1176343170275}d_2d_3d_5+\\&\frac{56509421299600687396945 92}{1848539267575}d_2d_5d_4^{\ 3}+\frac{39132480310057903761555148 8}{12939774873025}d_2d_4d_5+\\&\frac{31498076219311897756397568}{1176343170275}d_2d_4^{\ 2}d_5+\frac{36305864034292127362083 84}{1176343170275}d_2d_5-\\&\frac{81938660884420996725571584}{1848539267575}d_3d_5d_4^{\ 4}-\frac{52643502849723584675021568}{1176343170275}d_3d_5d_4-\\&\frac{795973751388643689954775296}{2587954974605}d_3d_4^{\ 2}d_5-\frac{721588134714269468496325632}{2587954974605}d_3d_5d_4^{\ 3}+\\&\frac{446424428266845430435872768}{1848539267575}d_5d_4^{\ 4}+\frac{286816325870907806160462336}{1176343170275}d_4d_5+\\&\frac{4336684576531231138374292992}{2587954974605}d_4^{\ 2}d_5+\frac{3931411216719123311117912064}{2587954974605}d_5d_4^{\ 3},\end{aligned}$$

其中 W_6,W_7 的项数分别为 71,43.

我们首先计算系统(8)的前8阶焦点量的约化 Gröbner 基 G,然后使用带分解的 Buchberger 算法对 G 进行零点分解,总共得到系统(8)以原点为中心的5组独立的必要条件:

(1) $d_1=d_5=0$;

(2) $d_1=0,d_3=3\dfrac{71+a}{-71+a},d_4=-\dfrac{1}{71}\dfrac{d_2(a-213)}{a-245}$;

(3) $a=245,d_1=0,d_2=0,d_3=\dfrac{158}{29}$;

(4) $d_1=0,d_2=1/4\dfrac{-258582a+25351189+641a^2}{-426a+a^2+45369},d_3=9,d_4=-1/4\dfrac{-1207+7a}{a-213}$,

$d_5=-4\dfrac{\sqrt{-10366a+11a^2+1386275}}{(a-213)^2}$;

(5) $d_1=0,d_2=1/4\dfrac{-258582a+25351189+641a^2}{-426a+a^2+45369},d_3=9,d_4=-1/4\dfrac{-1207+7a}{a-213}$,

$d_5=4\dfrac{\sqrt{-10366a+11a^2+1386275}}{(a-213)^2}$.

当条件(1)成立时,系统(8)的向量场关于 x 轴时间可逆,由 Poincaré 对称原理,原点为中心. 条件(3)所对应的情形见文[9]. 条件(4)~(5)是可疑的中心条件. 当条件(2)成立时的情形见下面的定理2.

定理2 系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-6\dfrac{(71+a)xy}{-71+a}+71d_5x^3+\left(-3d_2+\dfrac{229}{71}\dfrac{d_2(a-213)}{a-245}-3\right)yx^2-\\\qquad ad_5y^2x+\left(d_2-\dfrac{87}{71}\dfrac{d_2(a-213)}{a-245}-3\right)y^3,\\\dfrac{dy}{dt}=x+\left(3+3\dfrac{71+a}{-71+a}\right)x^2+\left(3-3\dfrac{71+a}{-71+a}\right)y^2+\left(d_2-\dfrac{87}{71}\dfrac{d_2(a-213)}{a-245}+3\right)x^3+\\\qquad ad_5yx^2+\left(-3d_2+\dfrac{229}{71}\dfrac{d_2(a-213)}{a-245}+3\right)y^2x-71d_5y^3\end{cases}\tag{9}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

以原点为中心.

证　系统(9) 以

$$R(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{142}a-3/2}$$

为积分因子,由引理4,原点为中心.

[参考文献]

[1] Liu Y R, Li J B. Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems [J]. Science in China A, 1990,33(1): 10-23.

[2] Lloyd N G, Pearson J M. Symmetry in planar dynamical systems [J]. Journal of Symbolic Computation,2002,33(3):357-366.

[3] 罗定军,张祥,董梅芳. 动力系统的定性与分支理论 [M]. 北京: 科学出版社,2001.

[4] Wang D M. Mechanical manipulation for a class of differential systems [J]. Journal of Symbolic Computation,1991,12(2):233-254.

[5] Chen H B, Liu Y R. Linear recursion formulas of quantities of singular point and applications [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004,148(1):163-171.

[6] 王铎,毛锐. 计算 Lyapunov 量的复算法 [J]. 自然科学进展,1995,5(6):754-757.

[7] Wang D. A recursive formula and its application to computations of normal forms and focal values [C] // S-T Liao. Dynamical Systems. Singapore: World Sci Publ, 1993:238-247.

[8] Yu P. Computation of normal forms via a perturbation technique [J]. J Sound & Vib, 1998,211(1):19-38.

[9] 陈海波. 平面多项式微分系统中心焦点判定与赤道极限环分支 [D]. 长沙: 中南大学数学科学与计算技术学院, 2003.

[10] Chavarriga J, Gacía I A, Giné J. On integrability of differential equations defined by the sum of homogeneous vector fields with degenerate infinity [J]. Int J Bifur Chaos Appl Sci Eng,2001,11(3):711-722.

[责任编辑: 丁　蓉]

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net