群余分次代数量子群变形的对偶

周 璇[1],杨 涛[2],陈菊珍[3]

(1. 江苏教育学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)
(2. 南京农业大学数学系,江苏 南京 210095)
(3. 南京林业大学理学院,江苏 南京 210037)

[摘要] 设 G 是群,G-余分次代数量子群是带有积分的正则的 G-余分次乘子 Hopf 代数. 本文主要讨论了 G-余分次代数量子群的变形的对偶,这个对偶是满足一定条件的代数量子群. 若对此对偶再做一次镜面反射,便可得到一个 G-分次的代数量子群.

[关键词] 乘子 Hopf 代数,群余分次,对偶,代数量子群
[中图分类号] O153.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)03-0006-05

Duality of Deformation of a Group-Cograded Algebraic Quantum Group

Zhou Xuan[1],Yang Tao[2],Chen Juzhen[3]

(1. School of Mathematics and Information Technology, Jiangsu Institute of Education, Nanjing 210013, China)
(2. Department of Mathematics, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)
(3. College of Science, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract: Let G be a group, a G-cograded algebraic quantum group is a regular G-cograded multiplier Hopf algebra with integrals. In this paper, we mainly consider the duality of the deformation of a G-cograded algebraic quantum group, and obtain the duality is an algebraic quantum group satisfying some certain conditions. Furthermore, using the mirror reflection on this duality, we get a G-graded algebraic quantum group.

Key words: multiplier Hopf algebra, group-cograded, duality, algebraic quantum group

众所周知,无限维代数的对偶不是余代数,因此用通常的方法(如文献[1])去构造无限维 Hopf 代数的对偶是非常困难的. 而文献[2]给出了一个运用积分去处理无限维情形的方法. 本文运用这个方法去构造 G-余分次代数量子群变形的对偶,且利用此对偶得到了一个 G-分次代数量子群. 利用此方法同样可以证明 G-余分次代数量子群的对偶是 G-分次的.

具体地,本文回顾了 G-余分次代数量子群的定义及其变形,并给出它们的性质. 主要讨论了 G-余分次代数量子群($A=\oplus_{p\in G}A_p,\Delta$)变形的对偶,给出($\hat{\hat{A}},\hat{\hat{\Delta}}$)的乘子 Hopf 代数结构. 得到了 G-余分次代数量子群变形的对偶是满足特定条件的代数量子群,并应用类似的方法讨论了 G-余分次代数量子群的对偶.

1 预备知识

首先,我们做如下约定. 本文所考虑的代数均为固定域(比如复数域 C)上的结合代数,可以有或没有单位元,但均有非退化的乘法. 设 A 为代数,乘子代数 $M(A)$ 是带有单位元的包含 A 作为稠密双边理想的最大代数. 关于乘子代数的具体概念请参考文献[3].

设 $\Delta: A\to M(A\otimes A)$ 为代数同态,$T_1^A,T_2^A: A\otimes A\to A\otimes A$ 为线性映射,如果对任意的 $a,b\in A$,$T_1^A(a\otimes b)=\Delta(a)(1\otimes b)$ 和 $T_2^A(a\otimes b)=(a\otimes 1)\Delta(b)$ 均为 $A\otimes A$ 中元素,且满足

收稿日期: 2011-12-28.
基金项目: 国家自然科学基金(10871042)、江苏省高校自然科学基金(12KJD110003、11KJB110004).
通讯联系人: 杨 涛,博士,讲师,研究方向: Hopf 代数. E-mail: tao.yang@njau.edu.cn

$$(T_2^A\otimes\iota)\circ(\iota\otimes T_1^A)=(\iota\otimes T_1^A)\circ(T_2^A\otimes\iota),$$

其中 ι 表示恒等映射，则称 Δ 为 A 的余乘.

设 A 为带有非退化乘法的代数，Δ 为 A 上的余乘，如果 T_1^A 和 T_2^A 是双射，则称 (A,Δ) 为乘子 Hopf 代数[3].

回顾文献[4,5]，设 (A,Δ) 是乘子 Hopf 代数，$(A_p)_{p\in G}$ 是 A 的一簇非平凡的子代数，且满足

(1) $A=\oplus_{p\in G}A_p$，且 $A_pA_q=0$，当 $p,q\in G,p\neq q$.

(2) 对任意的 $p,q\in G$，有 $\Delta(A_{pq})(1\otimes A_q)=A_p\otimes A_q$ 和 $(A_p\otimes 1)\Delta(A_{pq})=A_p\otimes A_q$ 成立，

则称 (A,Δ) 为 G-余分次乘子 Hopf 代数. 它是 Hopf 群余代数概念的推广[6].

如果余乘 Δ 满足 $\Delta(A_{pq})(A_p\otimes 1)=A_p\otimes A_q$ 和 $(1\otimes A_q)\Delta(A_{pq})=A_p\otimes A_q$，则称 (A,Δ) 为正则 G-余分次乘子 Hopf 代数. 如果 (A,Δ) 有非零积分，则称 (A,Δ) 为 G-余分次代数量子群[4,7].

命题 1([8]，引理 2.2.1)　设 φ 是 A 的左积分，ψ 是 A 的右积分. 则对任意的 $a,b\in A$，有

$$\sum\varphi(ab_{(2)})b_{(1)}=\sum\varphi(a_{(2)}b)S(a_{(1)}),$$

$$\sum\psi(b_{(1)}a)b_{(2)}=\sum\psi(ba_{(1)})S(a_{(2)}).$$

命题 2　设 A 是 G-余分次的，φ 是 A 的左积分，ψ 是 A 的右积分. 则对任意的 $a_p\in A_p,b_{qp}\in A_{qp},c_q\in A_q$ 和 $p,q\in G$，我们有

$$(\iota\otimes\varphi)((1\otimes a_p)\Delta_{q,p}(b_{qp}))=S(\iota\otimes\varphi)(\Delta_{q^{-1},qp}(a_p)(1\otimes b_{qp})),$$

$$(\psi\otimes\iota)(\Delta_{q,p}(b_{qp})(c_q\otimes 1))=S(\psi\otimes\iota)((b_{qp}\otimes 1)\Delta_{qp,p^{-1}}(c_q)).$$

设 (B,Δ) 是 G-余分次乘子 Hopf 代数，则 $B=\oplus_{p\in G}B_p$. 设 $Aut(B)$ 为 B 的 Hopf 自同态群，群 G 在 B 上的作用是群同态 $\pi:G\to Aut(B)$，对任意的 $p\in G$，满足

(1) π_p 保持 B 的余乘，即对任意的 $b\in B$，$\Delta(\pi_p(b))=(\pi_p\otimes\pi_p)\Delta(b)$.

如果存在 π 到自身的作用 ρ，使得如下条件(2)和(3)成立，则称此作用为允许的.

(2) $\pi_p(B_q)=B_{\rho_p(q)}$，这里的 ρ 为 π 到自身的作用，

(3) $\pi_{\rho_p(q)}=\pi_{pqp^{-1}}$，$p,q\in G$.

如果对任意的 $p,q\in G$，有 $\pi_p(B_q)=B_{pqp^{-1}}$，则称此作用为交叉的.

由文献[4]中引理 2.3，可得 $\varepsilon\pi_p=\varepsilon$ 和 $S\pi_p=\pi_pS$.

设 B 是 G-余分次乘子 Hopf 代数，π 是 G 在 B 上的作用，且为允许的. 由如下方法，可得 B 的变形乘子 Hopf 代数 $(\tilde{B},\tilde{\Delta})$. 作为代数，$\tilde{B}=B$. $\tilde{B}$ 上的余乘 $\tilde{\Delta}$ 定义为

$$\tilde{\Delta}(b)(1\otimes b')=(\pi_{q^{-1}}\otimes\iota)\Delta(b)(1\otimes b'),$$

其中 $b\in B,b'\in B_q$. 余单位 $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon$. 对极 $\tilde{S}(b)=\pi_{q^{-1}}S(b)$，$b\in B_q$.

如果 φ 是 (B,Δ) 的左积分，则 φ 也是 $(\tilde{B},\tilde{\Delta})$ 的左积分. 如果 ψ 是 B 的右积分，则 $(\tilde{B},\tilde{\Delta})$ 的右积分定义为 $\tilde{\psi}(b)=\psi(\pi_{p^{-1}}(b))$，$b\in B_p$（见文献[9]中定理 3.11）. $(\tilde{B},\tilde{\Delta})$ 就称为代数量子群 (B,Δ) 的变形.

由命题 2 可得，对极 $\tilde{S}$ 和积分 $\varphi,\tilde{\psi}$ 的关系如下：

命题 3　设 $(\tilde{B},\tilde{\Delta})$ 是代数量子群 (B,Δ) 的变形，$\varphi(\tilde{\psi})$ 是 $\tilde{B}$ 的左(右)积分，则对任意的 $p,q\in G$，有

$$\tilde{S}(\iota\otimes\varphi)(\tilde{\Delta}_{p,q}(b_{pq})(1\otimes b'_q))=(\iota\otimes\varphi)((1\otimes b_{pq})\tilde{\Delta}_{p^{-1},pq}(b'_q)),$$

$$\tilde{S}(\tilde{\psi}\otimes\iota)((b_{q^{-1}pq}\otimes 1)\tilde{\Delta}_{p,q}(b'_{pq}))=(\tilde{\psi}\otimes\iota)(\tilde{\Delta}_{q^{-1}pqq,q^{-1}}(b_{q^{-1}pq})(b'_{pq}\otimes 1)).$$

2　$(\hat{\tilde{A}},\hat{\tilde{\Delta}})$ 的乘子 *Hopf* 代数结构

设 $(A=\oplus_{p\in G}A_p,\Delta)$ 是 G-余分次代数量子群，类似文献[4]，本节将构造 $(\hat{\tilde{A}},\hat{\tilde{\Delta}})$，并证明它为正则的乘子 Hopf 代数.

定义 1　设 $(A=\oplus_{p\in G}A_p,\Delta,\varphi,\psi)$ 是 G-余分次代数量子群，则它的变形 $(\tilde{A},\tilde{\Delta},\varphi,\tilde{\psi})$ 也是代数量子群. 定义 $\hat{\tilde{A}}$ 为 $\tilde{A}$ 中所有形为 $\varphi(\cdot a)$ 的线性映射构成的空间，其中 $a\in\tilde{A}$. 显然，$\hat{\tilde{A}}=\oplus_{p\in G}\hat{\tilde{A}}_p$，$\varphi(\cdot a_p)\in\hat{\tilde{A}}_p$，$\varphi(a'_qa_p)=0$，$p\neq q$.

命题4　对 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w'_q \in \hat{\hat{A}}_q$,定义乘法为 $(w_p w'_q)(x_{qp}) = (w_p \otimes w'_q)\tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})$, $\forall x_{qp} \in A_{qp}$, $\forall p, q \in G$,则乘法是结合的和非退化的.

命题5　如果 $a_p \in A_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q, \forall p, q \in G$,则

(1) $w_q\varphi(\cdot a_p) = \varphi(\cdot b_{pq})$, $b_{pq} = (w_q \circ \tilde{S}^{-1} \otimes \iota)\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(a_q)$;

(2) $w_q\varphi(a_p \cdot) = \varphi(c_{pq} \cdot)$, $c_{pq} = (w_q \circ \tilde{S} \otimes \iota)\tilde{\Delta}_{pq^{-1}p^{-1},pq}(a_p)$;

(3) $\tilde{\psi}(\cdot a_p)w_q = \tilde{\psi}(\cdot d_{qp})$, $d_{pq} = (\iota \otimes w_q \circ \tilde{S})\tilde{\Delta}_{pq,q^{-1}}(a_p)$;

(4) $\tilde{\psi}(a_p \cdot)w_q = \tilde{\psi}(e_{qp} \cdot)$, $e_{pq} = (\iota \otimes w_q \circ \tilde{S}^{-1})\tilde{\Delta}_{pq,q^{-1}}(a_p)$.

运用上述公式可得乘积 $f_p w_q$ 和 $w_q f_p$, $f_p \in A'_p$, $w_q \in \hat{\hat{A}}_q$. 设 $A' = \prod_{p \in G} A'_p$,易知 A' 是 $\hat{\hat{A}}$ - 双模.

定义2　设 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$,定义

$$\langle (w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q), x_{qp} \otimes y_q\rangle = \langle w_p \otimes w_q, \tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(1 \otimes y_q)\rangle,$$

$$\langle \hat{\hat{\Delta}}(w_p)(1 \otimes w_q), z_p \otimes x_{qp}\rangle = \langle w_p \otimes w_q, (z_p \otimes 1)\tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})\rangle.$$

事实上,如果 $\varepsilon \in \hat{\hat{A}}_e$,则

$$\langle \hat{\hat{\Delta}}(w_p), x_p \otimes y_p\rangle = \langle w_p, x_p y_p\rangle.$$

引理1　如果 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$,则 $(w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q) \in \hat{\hat{A}}_{qp} \otimes \hat{\hat{A}}_q$, $\hat{\hat{\Delta}}(w_p)(1 \otimes w_q) \in \hat{\hat{A}}_p \otimes \hat{\hat{A}}_{qp}$. 且等式 $(\hat{\hat{A}}_p \otimes \iota)\hat{\hat{\Delta}}(\hat{\hat{A}}_q) = \hat{\hat{A}}_{qp} \otimes \hat{\hat{A}}_q$ 和 $\hat{\hat{\Delta}}(\hat{\hat{A}}_p)(1 \otimes \hat{\hat{A}}_q) = \hat{\hat{A}}_p \otimes \hat{\hat{A}}_{qp}$ 成立.

命题6　映射 $\hat{\hat{\Delta}}: \hat{\hat{A}} \to M(\hat{\hat{A}} \otimes \hat{\hat{A}})$ 是 $\hat{\hat{A}}$ 上的正则的余乘.

证明　易证映射 $\hat{\hat{\Delta}}: \hat{\hat{A}}_p \to M(\hat{\hat{A}} \otimes \hat{\hat{A}})$ 是代数同态. 设 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q, w_r \in \hat{\hat{A}}_r, x_{qp} \in A_{qp}, y_q \in A_q, z_{rq} \in A_{rq}$,则有

$$\langle (w_p \otimes 1 \otimes 1)(\hat{\hat{\Delta}} \otimes \iota)(\hat{\hat{\Delta}}(w_q)(1 \otimes w_r)), x_{qp} \otimes y_q \otimes z_{rq}\rangle =$$
$$\langle w_p \otimes (\hat{\hat{\Delta}}(w_q)(1 \otimes w_r)), \tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(1 \otimes y_q) \otimes z_{rq}\rangle =$$
$$\langle w_p \otimes w_q \otimes w_r, \tilde{\Delta}^{12}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(1 \otimes y_q \otimes 1)\tilde{\Delta}^{23}_{rqr^{-1},r}(z_{rq})\rangle =$$
$$\langle (w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q) \otimes w_r, x_{qp} \otimes (y_q \otimes 1)\tilde{\Delta}_{rqr^{-1},r}(z_{rq})\rangle =$$
$$\langle (\iota \otimes \hat{\hat{\Delta}})((w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q))(1 \otimes 1 \otimes w_r), x_{qp} \otimes y_q \otimes z_{rq}\rangle.$$

于是,余乘 $\hat{\hat{\Delta}}$ 是余结合的. 为证余乘是正则的,只需证明元素 $\hat{\hat{\Delta}}(w_p)(w_q \otimes 1) \in \hat{\hat{A}}_{qp} \otimes \hat{\hat{A}}_p$ 和 $(1 \otimes w_p)\hat{\hat{\Delta}}(w_q) \in \hat{\hat{A}}_q \otimes \hat{\hat{A}}_{pq}$,其中 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$. 事实上,对 $x_{qp} \in A_{qp}, y_q \in A_q$,有

$$\langle \hat{\hat{\Delta}}(w_p)(w_q \otimes 1), x_{qp} \otimes y_p\rangle = \langle \hat{\hat{\Delta}}(w_p), (\iota \otimes w_q)\tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp}) \otimes y_p\rangle =$$
$$\langle w_p, (\iota \otimes w_q)(\tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(y_p \otimes 1))\rangle = \langle w_p \otimes w_q, \tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(y_p \otimes 1)\rangle.$$

如果 $w_p = \varphi(a_p \cdot)$, $w_q = \varphi(\cdot b_q)$,有

$$\langle \hat{\hat{\Delta}}(w_p)(w_q \otimes 1), x_{qp} \otimes y_p\rangle = \langle w_p \otimes w_q, \tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(y_p \otimes 1)\rangle =$$
$$w_p(((\iota \otimes \varphi)(\tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(x_{qp})(1 \otimes b_q)))y_p) = w_p(\tilde{S}^{-1}(\iota \otimes \varphi)((1 \otimes x_{qp})\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(b_q))y_p) =$$
$$\varphi(a_p(\tilde{S}^{-1}(\iota \otimes \varphi)((1 \otimes x_{qp})\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(b_q)))y_p) =$$
$$\varphi(((\iota \otimes \varphi)(1 \otimes x_{qp})(\tilde{S}^{-1} \otimes \iota)(\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(b_q)(\tilde{S}(a_p \otimes 1))))y_p) =$$
$$\langle \varphi \otimes \varphi, (1 \otimes x_{qp})(\tilde{S}^{-1} \otimes \iota)(\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(b_q)(\tilde{S}(a_p) \otimes 1))(y_p \otimes 1)\rangle.$$

记 $(\tilde{S}^{-1} \otimes \iota)(\tilde{\Delta}_{qp^{-1}q^{-1},qp}(b_q)(\tilde{S}(a_p) \otimes 1) = \Sigma_i p_i \otimes q_i \in A_p \otimes A_{qp}$,可证得 $\hat{\hat{\Delta}}(w_p)(w_q \otimes 1) = \Sigma_i \varphi(\cdot q_i)$

$\otimes \varphi(p_i \cdot)$. 第 2 个类似可证.

定义 3　设 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, \forall p \in G, w_p = \varphi(\cdot a_p), a_p \in \tilde{A}_p$. 定义 $\hat{\varepsilon}(w_p) = \varphi(a_p)$.

如果 $w_p = \varphi(a_p \cdot) = \varphi(\cdot b_p) = \tilde{\psi}(c_p \cdot) = \tilde{\psi}(\cdot d_p)$，其中 a_p, b_p, c_p, d_p 在 A_p 中惟一决定，则可得 $\hat{\varepsilon}(w_p) = \varphi(a_p) = \varphi(b_p) = \tilde{\psi}(c_p) = \tilde{\psi}(d_p)$.

由下面命题可知 $\hat{\varepsilon}$ 是 $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 中余单位.

命题 7　$\hat{\varepsilon}: \hat{\hat{A}} \to C$ 是代数同态，且对任意的 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$，满足

(1) $(\iota \otimes \hat{\varepsilon})((w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q)) = w_p w_q$，

(2) $(\hat{\varepsilon} \otimes \iota)(\hat{\hat{\Delta}}(w_p)(w_q \otimes 1)) = w_p w_q$.

定理 1　如果对极 $\hat{\hat{S}}$ 与 $\tilde{S}$ 对偶，则 $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 是正则的乘子 Hopf 代数.

证明　由文献 [2] 中命题 4.7 类似可得.

3　$(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 的代数量子群结构

本节我们将证明 $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 是代数量子群. 首先定义 $\hat{\hat{A}}$ 的左积分.

定义 4　设 $\tilde{\psi}$ 是 $\tilde{A}$ 上右积分. 对 $w_p = \tilde{\psi}(a_p \cdot)$，令

$$\hat{\varphi}(w_p) = \begin{cases} \varepsilon(a_p), & p = e; \\ 0, & p \neq e. \end{cases}$$

定理 2　设 $(A = \oplus_{p \in G} A_p, \Delta = \{\Delta_{p,q}\}_{p,q \in G})$ 是 G-余分次代数量子群，$(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 见上节定义，则 $(\hat{\hat{A}}, \hat{\hat{\Delta}})$ 是满足如下条件的代数量子群：

(1) $\hat{\hat{A}} = \oplus_{p \in G} \varphi(\cdot \tilde{A}_p)$ 且 $\hat{\hat{A}}_q \hat{\hat{A}}_p = \hat{\hat{A}}_{pq}$.

乘法定义为 $\langle \varphi(\cdot a_p)\varphi(\cdot a'_q), b_{qp} \rangle = \langle \varphi(\cdot a_p) \otimes \varphi(\cdot a'_q), \tilde{\Delta}_{qpq^{-1},q}(b_{qp}) \rangle$.

(2) $\langle \hat{\hat{A}}_q, A_p \rangle = 0, p \neq q$.

(3) $\langle \Delta(\hat{\hat{A}}_q), A_p \otimes A_r \rangle = 0, q \neq p$ 或 $q \neq r$.

证明　前面已证 $\hat{\hat{A}}$ 是带有非退化乘法的代数，$\hat{\hat{\Delta}}$ 是 $\hat{\hat{A}}$ 的正则余乘，且有余单位 $\hat{\varepsilon}$. 下证 $\hat{\varphi}$ 为左积分. 显然 $\hat{\varphi}$ 非零. 对任意的 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$，计算 $(\iota \otimes \hat{\varphi})((w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q))$. 设 $w_p = \tilde{\psi}(a_p \cdot), w_q = \tilde{\psi}(b_q \cdot)$，则

$\langle (w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q), x_{qp} \otimes y_q \rangle = (\tilde{\psi} \otimes \tilde{\psi})((\iota \otimes \tilde{S}^{-1})(\tilde{\Delta}_{pq,q^{-1}}(a_p)(1 \otimes \tilde{S}(b_q)))(x_{qp} \otimes y_q))$，$x_{qp} \in A_{qp}$，$y_q \in A_q$.

因此，

$$(\iota \otimes \hat{\varphi})((w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q)) = \begin{cases} \hat{\varphi}(w_q) w_p, & q = e; \\ 0, & q \neq e. \end{cases}$$

于是可得，$(\iota \otimes \hat{\varphi})((w_p \otimes 1)\hat{\hat{\Delta}}(w_q)) = \hat{\varphi}(w_q) w_p$.

注意到 $\hat{\varepsilon}$ 是对极作用下的不变量，则由以上计算可知，$(\iota \otimes \hat{\varphi})\hat{\hat{\Delta}}(w_q)$ 和 $\hat{\varphi}(w_q)1_p$ 作为右乘子是相等的. 因此，作为 $M(\hat{\hat{A}})$ 中乘子它们也是相等的. 这就证明了 $\hat{\varphi}$ 是 $\hat{\hat{A}}$ 的左积分.

再证 $\hat{\varphi}$ 是忠实的. 如果 $w_p \in \hat{\hat{A}}_p, w_q \in \hat{\hat{A}}_q$，设 $w_p = \tilde{\psi}(a_p \cdot), a_p \in A_p$，则 $w_p w_q = \tilde{\psi}((\iota \otimes w_q)(\iota \otimes \tilde{S}^{-1})\tilde{\Delta}_{pq,q^{-1}}(a_p) \cdot)$. 因此，

$$\hat{\varphi}(w_p w_q) = \begin{cases} w_q(\tilde{S}^{-1}(a_p)), & pq = e; \\ 0, & pq \neq e. \end{cases}$$

如果对任意的 a_p 上式为0,则 $w_q = 0$. 如果对任意的 w_q 上式为0,则 $a_p = 0$. 证毕.

记 $B_p = \hat{\hat{A}}_{p^{-1}}$,且继承 $\hat{\hat{A}}$ 的乘法,余乘,余单位,对极和积分(这个变换亦称为"镜面反射"),则可得

命题8　$B = \oplus_{p \in G} B_p$ 是 G-分次代数量子群.

由上述构造方法,可得如下命题.

命题9　设($A = \oplus_{p \in G} A_p$,$\Delta := \{\Delta_{p,q}\}_{p,q \in G}$) 是 G-余分次代数量子群,则对偶($\hat{A}$,$\hat{\Delta}$) 是 G-分次代数量子群.

此命题亦可看作文献[9]中命题3.1的推论.

[参考文献]

[1] Zhou X, Wang S H. The duality theorem for weak Hopf algebra (co) actions[J]. Communications in Algebras, 2010, 38(12): 4 613-4 632.

[2] Van Daele A. An algebraic framework for group duality[J]. Advance in Mathematics, 1998, 140(2): 323-366.

[3] Van Daele A. Multiplier Hopf algebras[J]. Transaction of the American Mathematical Society, 1994, 342(2): 917-932.

[4] Abd El-hafez A T, Delvaux L, Van Daele A. Group-cograded multiplier Hopf (* -) algebra[J]. Algebras and Representation Theory, 2007, 10(1): 77-95.

[5] Yang T, Wang S H. A lot of quasitriangular group-cograded multiplier Hopf algebras[J]. Algebras and Representation Theory, 2011, 14(5): 959-976.

[6] Turaev V G. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories[EB/OL]. [2000-05-31]. http://arxiv.org/abs/math/0005291.

[7] Delvaux L, Van Daele A, Wang S H. Quasitriangular (G-cograded) multiplier Hopf algebras[J]. Journal of Algebra, 2005, 289(2): 484-514.

[8] Delvaux L, Van Daele A. The Drinfel'd double versus the Heisenberg double for an algebraic quantum group[J]. Journal of Pure and Applied Algbera, 2004, 190(1/3): 59-84.

[9] Delvaux L, Van Daele A. The Drinfel'd double for group-cograded multiplier Hopf algebra[J]. Algebras and Representation Theory, 2007, 10(3): 197-221.

[责任编辑: 丁　蓉]