一类非 C^2 扰动泛函的 Duffing 方程组边值问题解的研究

江正仙, 黄文华

(江南大学理学院, 江苏 无锡 214122)

[摘要]　研究了 Duffing 方程组的边值问题, 利用黄文华和沈祖和 2005 年在 Nonlinear Analysis TMA 中证明的 minimax 定理研究这一问题的惟一解的存在性, 给出了一个存在惟一性定理.

[关键词]　Hilbert 空间, 解的存在惟一性, minimax 定理, Duffing 方程组, 谱

[中图分类号]　O175　[文献标志码]　A　[文章编号]　1001-4616(2012)03-0025-06

Study on the Solutions of the Boundary Value Problems of a Class of Duffing Systems With Non-C^2 Perturbation Functional

Jiang Zhengxian, Huang Wenhua

(School of Sciences, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: This paper deals with a boundary value problem for Duffing system. The existence of unique solution for the problem is studied by using a minimax theorem proved by Huang Wenhua and Shen Zuhe in Nonlinear Analysis TMA (2005). An existence and uniqueness result was presented.

Key words: Hilbert space, existence and uniqueness solution, minimax theorem, Duffing system, spectrum

Minimax 原理是研究微分方程和微分方程组的有力工具, 许多人利用这一原理研究微分方程和微分方程组并取得了很多有价值的成果[1-12]. 这一领域的研究, 起始于利用 Minimax 原理研究带 C^2 扰动泛函的微分方程和微分方程组的解的存在惟一性. 1986 年, Stepan A Tersian 证明了几个关于非 C^2 泛函的 Minimax 定理, 利用这些定理[7] 获得了几个带非 C^2 扰动泛函的微分方程和微分方程组的定理. 20 多年来, 这一领域的研究成果丰硕[7-12], 2005 年及 2006 年, 黄文华和沈祖和推广了 Tersian 的 minimax 定理[8-10]. 稍后, 在文 [9] 中, 黄文华在比文 [7] 中更弱的条件下证明了方程 $u''+f(t,u(t))+e(t)=0$ 的一个存在惟一性定理. 本文利用 [8] 中的定理 3.1 研究一类带非 C^2 扰动泛函的 Duffing 方程组的解, 获得了一个存在惟一性定理.

1　预备知识

设 H 是一个实 Hilbert 空间, 其内积和范数分别为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$, X 和 Y 是 H 的两个满足 $H=X\oplus Y$ 的正交闭子空间, 记 $Q: H\to X$, $R: H\to Y$ 为从 H 到 X 及 H 到 Y 的投影. 考虑边值问题

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}''(t)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{u}(t)+\nabla G(t,\boldsymbol{u}(t))=\boldsymbol{h}(t), & t\in(0,2\pi), \\ \boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{a}, & \boldsymbol{u}(2\pi)=\boldsymbol{b}, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$: $[0,2\pi]\to\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{P}$ 是对称实常数 $n\times n$ 矩阵, 其特征值为 $\mu_k(k=1,2,\cdots,n)$, G: $[0,2\pi]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一泛函, 其 Gâteaux 导数 ∇G: $[0,2\pi]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 处处有定义的半连续的, $\boldsymbol{h}$: $[0,2\pi]\to\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$.

令 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{\omega}(t)$, $\boldsymbol{\omega}(t)=\dfrac{\boldsymbol{a}(2\pi-t)+\boldsymbol{b}t}{2\pi}$, $t\in[0,2\pi]$, (1) 可变形为

收稿日期: 2011-01-05.

基金项目: 江南大学青年基金(2009LQN09)、中央高校基本科研业务费专项资金(JUSRP211A21).

通讯联系人: 黄文华, 教授, 研究方向: 非线性微分方程边值问题. E-mail: hpjiangyue@163.com

$$\begin{cases} v''(t)+Pv(t)+\nabla G^*(t,v(t))=h^*(t), & t\in(0,2\pi),\\ v(0)=v(2\pi)=0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $G^*(t,v(t))=G(t,v(t)+\omega(t))$，$h^*(t)=h(t)-P\omega(t)$. 显然，如果 v_0 是(2)的一个解，$u_0=v_0+\omega$ 就是(1)的一个解.

熟知，$L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$ 是 Hilbert 空间，其上的内积

$$[u,v]=\int_0^{2\pi}(u(t),v(t))\,dt=\sum_{i=1}^n\int_0^{2\pi}u_i(t)v_i(t)\,dt,\ (u,v\in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n))$$

和范数 $\|u\|=\sqrt{[u,u]}=\left(\sum_{i=1}^n\int_0^{2\pi}u_i^2(t)\,dt\right)^{1/2}$，这里 $(u,v)=\sum_{i=1}^n u_i(t)v_i(t)$，$|u|=\sqrt{(u,u)}=\left(\sum_{i=1}^n u_i^2(t)\right)^{1/2}$ 分别为 Euclidean 内积和 Euclidean 范数. 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x;\ \cdots;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ \cdots$$

是 $L^2[0,2\pi]$ 中的正交函数系. 每一 $v\in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$ 可展开成 Fourier 级数

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\int_0^{2\pi}v(t)\cos kt\,dt\right)\cos kt+\left(\int_0^{2\pi}v(t)\sin kt\,dt\right)\sin kt\right].$$

定义线性算子 $L=-\frac{d^2}{dt^2}:\mathscr{D}^*(L)\subset L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)\to L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$，

$$\mathscr{D}^*(L)=\Big\{v\in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)\mid v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(t)\,dt+$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\int_0^{2\pi}v(t)\cos kt\,dt\right)\cos kt+\left(\int_0^{2\pi}v(t)\sin kt\,dt\right)\sin kt\right],$$
$$\sum_{i=1}^n\sum_{k=0}^{\infty}k^4\left[\left(\int_0^{2\pi}v_i(t)\cos kt\,dt\right)^2+\left(\int_0^{2\pi}v_i(t)\sin kt\,dt\right)^2\right]<+\infty,$$
$$v(0)=v(2\pi)=\mathbf{0}\Big\}\subset L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n),$$

$$Lv=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left[\left(\int_0^{2\pi}v(t)\cos kt\,dt\right)\cos kt+\left(\int_0^{2\pi}v(t)\sin kt\,dt\right)\sin kt\right],$$
$$\sigma(L)=\{k^2\mid k\in\mathbf{N}\}.$$

记

$\mathscr{D}(L)=\{u\mid u(t)=v(t)+\omega(t),v\in\mathscr{D}^*(L),\omega(t)=(a(2\pi-t)+bt)/2\pi,t\in[0,2\pi]\}$.

令 $\tilde L=L-P$，则 $\mathscr{D}^*(\tilde L)=\mathscr{D}^*(L-P)=\mathscr{D}^*(L)$，$\mathscr{D}(\tilde L)=\mathscr{D}(L)$. 因 $L=-\frac{d^2}{dt^2}$ 是自共轭算子，所以 $\tilde L$ 也是自共轭算子，且

$$\sigma(\tilde L)=\{k^2-\mu_i,k=0,\pm1,\pm2,\cdots;\mu_i\in\sigma(P),i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathscr{D}^*(\tilde L)=\mathscr{D}^*(L)$ 按内积

$$\langle u,v\rangle=\int_0^{2\pi}[(u'(t),v'(t))+(u(t),v(t))]\,dt,\ u,v\in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$$

是一个 Hilbert 空间，由这一内积诱导的 $\mathscr{D}^*(L)$ 中的范数是 $\|v\|^2=\int_0^{2\pi}(|v'|^2+|v|^2)\,dt$.

定义泛函 $f:\mathscr{D}(\tilde L)\subset L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}$，

$$f(u)=\frac{1}{2}\langle\tilde Lu,u\rangle-G(t,u)+\langle h(t),u\rangle, \tag{3}$$

其中 G 和 $h(t)$ 满足(1). 记

$$f^*(v)=\frac{1}{2}\langle\tilde L(v+\omega),v+\omega\rangle-G(t,v+\omega)+\langle h(t),v+\omega\rangle=$$
$$\frac{1}{2}\langle\tilde Lv,v\rangle-G^*(t,v)+\langle h^*(t),v\rangle+\langle h^*(t)+\frac{1}{2}P\omega,\omega\rangle, \tag{4}$$

其中 G^* 和 $\boldsymbol{h}^*(t)$ 由(2)定义. 由(3)和(4)容易算得

$$\nabla f(\boldsymbol{u}) = \tilde{L}\boldsymbol{u} - \nabla G(t,\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{h}(t), \tag{5}$$

$$\nabla f^*(\boldsymbol{v}) = \nabla f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}) = \tilde{L}\boldsymbol{v} - \nabla G(t,\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{h}(t) - \boldsymbol{P\omega} = \tilde{L}\boldsymbol{v} - \nabla G^*(t,\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{h}^*(t). \tag{6}$$

易见,$\boldsymbol{v}_0 \in \mathscr{D}^*(\tilde{L})$ 是 f^* 的一个临界点当且仅当 $\boldsymbol{v}_0$ 是方程 $\tilde{L}\boldsymbol{v} - \nabla G^*(t,\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{h}^*(t)$ 的一个解,从而是问题(2)的一个解,于是 $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}$ 是(1)的一个解.

假设存在一个对称实有界 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\tilde{L}))$,其特征值 $\lambda_1(t,\boldsymbol{u}) \leqslant \lambda_2(t,\boldsymbol{u}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(t,\boldsymbol{u})(\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\tilde{L}))$ 满足

$$\nabla G(t,\boldsymbol{u}_2) - \nabla G(t,\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1), \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2 \in \mathscr{D}(\tilde{L}). \tag{7}$$

如果 G 是 C^2 的,那么 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1) = \int_0^1 D^2G(t,\boldsymbol{u}_1+s(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1))(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)\,\mathrm{d}s$,其中 D^2G 是 G 的 Hessian 矩阵.

(7)等价于

$$\nabla G^*(t,\boldsymbol{v}_2) - \nabla G^*(t,\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in \mathscr{D}^*(L). \tag{8}$$

$\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})$ 的特征值是 $\lambda_1^*(t,\boldsymbol{v}) \leqslant \lambda_2^*(t,\boldsymbol{v}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^*(t,\boldsymbol{v})$,这里每一特征值按其重数重复. 显然,$\lambda_i^*(t,\boldsymbol{v}) = \lambda_i(t,\boldsymbol{v}+\omega) = \lambda_i(t,\boldsymbol{u})(i=1,2,\cdots,n)$.

假设对 $\boldsymbol{u}\in\mathscr{D}(\tilde{L})$,

$$N_i^2 < \lambda_i(t,\boldsymbol{u}) + \mu_i < (N_i+1)^2, N_i \in N, (i=1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

(9)等价于

$$N_i^2 < \lambda_i^*(t,\boldsymbol{v}) + \mu_i < (N_i+1)^2, \boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L), N_i\in N, (i=1,2,\cdots,n). \tag{10}$$

对 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L)$,定义

$$\xi^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|) = \min_{\|\boldsymbol{v}\|\leqslant\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\min_{t\in[0,2\pi]}\lambda_i^*(t,\boldsymbol{v}) + \mu_i - N_i^2 > 0\}, \tag{11}$$

$$\eta^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|) = \min_{\|\boldsymbol{v}\|\leqslant\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{(N_i+1)^2 - \mu_i - \max_{t\in[0,2\pi]}\lambda_i^*(t,\boldsymbol{v}) > 0\}. \tag{12}$$

(11)和(12)等价于,对 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\mathscr{D}(L)$,

$$\xi(\|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\|) = \min_{\|\boldsymbol{u}\|\leqslant\|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\|}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\min_{t\in[0,2\pi]}\lambda_i(t,\boldsymbol{u}) + \mu_i - N_i^2 > 0\}, \tag{13}$$

$$\eta(\|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\|) = \min_{\|\boldsymbol{u}\|\leqslant\|\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1\|}\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{(N_i+1)^2 - \mu_i - \max_{t\in[0,2\pi]}\lambda_i(t,\boldsymbol{u}) > 0\}. \tag{14}$$

对任固定的 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L)$,令$\{\boldsymbol{e}_k: k=1,2,\cdots,n\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的正交基,使

$$\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_k = \lambda_k^*(t,\boldsymbol{v})\boldsymbol{e}_k, (\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_m) = \delta_{km} = \begin{cases}1, & k=m,\\ 0, & k\neq m,\end{cases} \quad (k,m=1,2,\cdots,n).$$

那么 $\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})$ 有谱分解

$$\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})\xi = \sum_{k=1}^n \lambda_k^*(t,\boldsymbol{v})(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n.$$

定义乘法算子 $B(\boldsymbol{v}): \mathscr{D}^*(L) \to \mathscr{D}^*(L)$,

$$(B(\boldsymbol{v})\boldsymbol{w})(t) = \boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v}(t))\boldsymbol{w}(t), \qquad \boldsymbol{w}(t)\in\mathscr{D}^*(L), t\in[0,2\pi].$$

显然,对固定的 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L)$,$\sigma(B(\boldsymbol{v})) = \sigma_p(B(\boldsymbol{v})) = \sigma(\boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{v}))$(其中 $\sigma(\cdot)$ 记谱,$\sigma_p(\cdot)$ 记点谱),即 $\lambda_i^*(\boldsymbol{v}) = \lambda_i^*(t,\boldsymbol{v})(i=1,2,\cdots,n)$,这里 $\lambda_i^*(\boldsymbol{v})$ 是 $B(\boldsymbol{v})$ 的特征值.

设 Q_k 为到 $B(\boldsymbol{v})$ 的特征空间 $M_k(\boldsymbol{v}) = \ker(B(\boldsymbol{v}) - \lambda_k^*(\boldsymbol{v})I)$ 上的正交投影算子,其中 I 是恒等算子. 显然,Q_k 是由投影 $q_k: \mathbf{R}^n \to R\boldsymbol{e}_k, q_k\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{e}_k$ 诱导的乘积算子. 于是

$$B(\boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^*(\boldsymbol{v})Q_k.$$

对 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L)$,定义 $Q(\boldsymbol{v})$ 和 $R(\boldsymbol{v})$,

$$Q(\boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^n E(-\infty,\lambda_k^*(\boldsymbol{v}))\circ Q_k, R(\boldsymbol{v}) = \sum_{k=1}^n E(\lambda_k^*(\boldsymbol{v}),+\infty)\circ Q_k. \tag{15}$$

再令

$$X = Q(\boldsymbol{v})\mathscr{D}^*(L), Y = R(\boldsymbol{v})\mathscr{D}^*(L). \tag{16}$$

由(10)可知 $\sigma_p(B(v)) \cap \sigma(\tilde{L}) = \varnothing, v \in \mathscr{D}^*(L)$. 在(10)和(16)的条件下可得

$$E(-\infty, \lambda_k^*(v)) = I - E(\lambda_k^*(v), +\infty),$$

于是 $R(v) = I - Q(v)$ 且

$$\mathscr{D}^*(L) = X \oplus Y, X \text{ 和 } Y \text{ 正交}.$$

本文主要定理的证明还需如下定理.

定理 1[8]　设 H 是实 Hilbert 空间,$f: H \to \mathbf{R}$ 是一个处处有定义的其 Gâteaux 导数 $\nabla f: H \to H$ 处处有定义且半连续的泛函. 假设存在两个满足 $H = X \oplus Y$ 的闭子空间 X 和 Y 以及两个非增函数 $\alpha: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\beta: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 满足

$$s \cdot \alpha(s) \to +\infty, s \cdot \beta(s) \to +\infty, (s \to +\infty), \tag{17}$$

且对一切 $x_1, x_2 \in X, y \in Y$,和一切 $y_1, y_2 \in Y, x \in X$,

$$\langle \nabla f(x_1 + y) - \nabla f(x_2 + y), x_1 - x_2 \rangle \leqslant -\alpha(\| x_1 - x_2 \|) \| x_1 - x_2 \|^2,$$
$$\langle \nabla f(x + y_1) - \nabla f(x + y_2), y_1 - y_2 \rangle \geqslant \beta(\| y_1 - y_2 \|) \| y_1 - y_2 \|^2, \tag{18}$$

那么

(a) f 有惟一的临界点 $v_0 \in H$ 使得 $\nabla f(v_0) = 0$;

(b) $f(v_0) = \max\limits_{x \in X} \min\limits_{y \in Y} f(x + y) = \min\limits_{y \in Y} \max\limits_{x \in X} f(x + y)$.

特别,如果 $f: L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ 是 C^2 泛函,$D^2 f(u)$ 是 f 在 $u \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$ 的 Hessian 矩阵,可得到上述定理的一个有用推论.

推论 1　设 X 和 Y 是 $L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$ 的满足 $L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n) = X \oplus Y$ 的正交向量闭子空间,$f: L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ 是 C^2 泛函. 假设存在两个满足(17)的连续的非增函数 $\alpha: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\beta: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 且对一切 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \boldsymbol{y} \in Y$,和一切 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in Y, \boldsymbol{x} \in X$,

$$\left\langle \int_0^1 D^2 f(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2))(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \mathrm{d}\theta, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \right\rangle \leqslant -\alpha(\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|) \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|^2,$$

$$\left\langle \int_0^1 D^2 f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2 + \theta(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2))(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2) \mathrm{d}\theta, \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \right\rangle \geqslant \beta(\| \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \|) \| \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \|^2,$$

那么

(a) f 有惟一的临界点 $\boldsymbol{v}_0 \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$ 使得 $\nabla f(\boldsymbol{v}_0) = 0$;

(b) $f(\boldsymbol{v}_0) = \max\limits_{\boldsymbol{x} \in X} \min\limits_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \min\limits_{\boldsymbol{y} \in Y} \max\limits_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.

证明　因 f 是 C^2,由中值定理并注意到(18),对 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y} \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y} \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X, \boldsymbol{y} \in Y$,有

$$\langle \nabla f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}) - \nabla f(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \rangle =$$
$$\left\langle \int_0^1 D^2 f(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y} + \theta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2))(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) \mathrm{d}\theta, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \right\rangle \leqslant -\alpha(\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|) \| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \|^2,$$

对 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_1 \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2 \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in Y$,有

$$\langle \nabla f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_1) - \nabla f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2), \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \rangle =$$
$$\left\langle \int_0^1 D^2 f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2 + \theta(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2))(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2) \mathrm{d}\theta, \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \right\rangle \geqslant \beta(\| \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \|) \| \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 \|^2.$$

使用上述定理 1 即得本推论.

2　主要结果

现在我们给出并证明关于问题(1)的主要结果.

定理 2　设 $G: L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ 是一个具有处处有定义的半连续的 Gâteaux 导数 $\nabla G: L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n) \to L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n)$ 的泛函,$\boldsymbol{P}$ 是一个对称的实常数 $n \times n$ 矩阵. 假设存在一个有界的实对称 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{b}(t, \boldsymbol{u})$ $(\boldsymbol{u} \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n))$,其特征值 $\lambda_1(t, \boldsymbol{u}) \leqslant \lambda_2(t, \boldsymbol{u}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(t, \boldsymbol{u})$ $(\boldsymbol{u} \in L^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^n))$ 满足(7)和(9)且与算子 $\tilde{L} = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \boldsymbol{P}$ 可交换. 如果(13)和(14)定义的函数 ξ 和 η 满足

$$\xi:[0,+\infty)\to(0,+\infty),\eta:[0,+\infty)\to(0,+\infty),s\cdot\xi(s)\to+\infty,s\cdot\eta(s)\to+\infty,(s\to+\infty), \tag{19}$$

那么,问题(1)恰有一解 $u_0\in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$ 满足

$$\nabla f(\boldsymbol{u}_0)=0 \text{ 且 } f(\boldsymbol{u}_0)=\max_{\boldsymbol{x}\in X}\min_{\boldsymbol{y}\in Y}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\omega})=\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\max_{\boldsymbol{x}\in X}f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{\omega}), \tag{20}$$

其中 f 是由(3)定义的泛函,而 $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\boldsymbol{a}(2\pi-t)+\boldsymbol{b}t}{2\pi},t\in[0,2\pi],\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$.

证明　注意到 $\tilde{L}$ 是自共轭算子具有按右连续谱族 $\{E_{\tilde{\lambda}}:\tilde{\lambda}\in\mathbf{R}\}$ 的谱分解

$$\tilde{L}=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\lambda}\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}.$$

对一切 $\gamma,\zeta\in\rho(\tilde{L})\cap\{\pm\infty\}\gamma<\zeta$,令

$$E(\gamma,\zeta)=\int_{\gamma}^{\zeta}\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}.$$

因 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{u})$ 与 $\tilde{L}$ 可交换,所以 $\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})$ 与 $\tilde{L}$ 可交换,从而 $Q_k(k=1,2,\cdots,n)$ 与 $E_{\tilde{\lambda}},\tilde{\lambda}\in\mathbf{R}$ 可交换. 所以自共轭算子 $\tilde{L}-\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L))$ 有谱分解

$$\tilde{L}-\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v})=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k,\boldsymbol{v}\in\mathscr{D}^*(L). \tag{21}$$

由(21),(6),(8),(11)及(12),对 $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1\in\mathscr{D}^*(L),\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2\in\mathscr{D}^*(L),\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in X,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in Y$,我们有

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla f^*(\boldsymbol{v}_2)-\nabla f^*(\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\rangle=\langle(\tilde{L}-\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),Q(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\sum_{k=1}^{n}E(-\infty,\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\sum_{k=1}^{n}E(-\infty,\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}\|E_{\tilde{\lambda}}Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\|^2\leqslant-\xi^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|)\times\\
&\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}\mathrm{d}\|E_{\tilde{\lambda}}Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\|^2=-\xi^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|)\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|^2,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&\langle\nabla f^*(\boldsymbol{v}_2)-\nabla f^*(\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\rangle=\langle(\tilde{L}-\boldsymbol{b}^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),R(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\sum_{k=1}^{n}E(\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),+\infty)\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\langle\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}E_{\tilde{\lambda}}\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),\sum_{k=1}^{n}E(\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1),+\infty)\circ Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\rangle=\\
&\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}^{+\infty}(\tilde{\lambda}-\lambda_k^*(t,\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1))\,\mathrm{d}\|E_{\tilde{\lambda}}Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\|^2\geqslant\boldsymbol{\eta}^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|)\times\\
&\sum_{k=1}^{n}\int_{\lambda_k^*(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)}^{+\infty}\mathrm{d}\|E_{\tilde{\lambda}}Q_k(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)\|^2=\boldsymbol{\eta}^*(\|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\|)\|\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\|^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

对 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in X,\boldsymbol{y}\in Y$,在(22)中令 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}$,则有

$$\langle\nabla f^*(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y})-\nabla f^*(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\rangle\leqslant-\xi^*(\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|)\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|^2,$$

对 $\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in Y$,在(23)中令 $\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2$,有

$$\langle\nabla f^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_1)-\nabla f^*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}_2),\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\rangle\geqslant\boldsymbol{\eta}^*(\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|)\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2\|^2.$$

由(19)及定理1可知存在惟一的 $v_0 \in \mathscr{D}^*(L) \subset L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$ 使得 $\nabla f^*(v_0)=0$,即 v_0 是问题(2)的解,从而 $u_0 = v_0 + \omega$ 是(1)的满足(20)的解. 定理2证毕.

如果(1)中的 G 是 C^2 的,那么下述推论是显然的.

推论2 设 $G: L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ 是 C^2 泛函,P 是对称的实常数 $n \times n$ 矩阵. 假设 G 的 Hessian 矩阵 D^2G 与算子 $\tilde{L} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - P$ 可交换且满足(9). 如果由(13)和(14)定义的函数 ξ 与 η 满足(19),那么问题(1)恰有一个解 $u_0 \in L^2([0,2\pi],\mathbf{R}^n)$,$u_0$ 满足(20).

当 $n=1$,$P=0$ 时,方程组(1)变成单个方程

$$\begin{cases} u''(t) + g(t,u) = e(t), \\ u(0) = a, u(2\pi) = b, \end{cases} \tag{24}$$

其中 $u: [0,2\pi] \to \mathbf{R}$,$g: [0,2\pi] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个势 Carathéodory 函数,$e: [0,2\pi] \to \mathbf{R}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 中一个给定的函数. 周婷和黄文华研究了这一问题[12],他们得到的成果(即[12]中的问题(2.6)的主要结果)是本文结果的推论.

[参考文献]

[1] Lazer A C, Landesman E M, Meyer D R. On saddle point problems in the calculus of variations, the Ritz algorithm and monotone convergence [J]. J Math Anal Appl, 1975, 52(3): 594-614.

[2] Raul F Manasevich. A minimax theorem [J]. J Math Anal Appl, 1982, 90(1): 62-71.

[3] Raul F Manasevich. A nonvariational version of a max-min principle [J]. Nonlinear Anal TMA, 1983, 7(6): 565-570.

[4] Peter W Bates, Alfonso Castro. Existence and uniqueness for a variational hyperbolic system without resonance [J]. Nonlinear Anal TMA, 1980, 4(6): 1 151-1 156.

[5] Shen Zuhe. On the periodic solution to the Newtonian equation of motion [J]. Nonlinear Anal TMA, 1989, 13(2): 145-150.

[6] Shen Zuhe, Neumaier A, Eiermann M C. Solving minimax problems by interval methods [J]. BIT, 1990, 30(4): 742-751.

[7] Stepan A Tersian. A minimax theorem and applications to nonresonance problems for semilinear equations [J]. Nonlinear Anal TMA, 1986, 10(7): 651-668.

[8] Huang Wenhua, Shen Zuhe. Two minimax theorems and the solutions of semilinear equations under the asymptotic non-uniformity conditions [J]. Nonlinear Anal TMA, 2005, 63(8): 1 199-1 214.

[9] Huang Wenhua. Minimax theorems and applications to the existence and uniqueness of solutions of some differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(2): 629-644.

[10] Huang Wenhua. A minimax theorem for the quasi-convex functional and the solution of the nonlinear beam equation [J]. Nonlinear Anal TMA, 2006, 64(8): 1 747-1 756.

[11] Huang Wenhua, Shen Zuhe. A minimax theorem and the uniqueness of solution of a class of second order Hamilton systems [J]. Pure and Applied Mathematics, 2007, 23(4): 480-486.

[12] Zhou Ting, Huang Wenhua. The existence and uniqueness of solution of Duffing equations with non-C^2 perturbation functional at nonresonance [J]. Hindawi Publishing Corporation Boundary Value Problems, 2008, ID859461.

[责任编辑: 丁 蓉]