

# 横场中各向异性 XY 模型的部分熵和量子互熵

翟孝月 李延标 马书云

(中国人民解放军理工大学理学院, 江苏 南京 211101)

[摘要] 研究在一维各向异性 XY 模型中的热纠缠的熵的行为,发现在有限温度时,两子系统的部分熵不相等,同时给出部分熵随温度和最近邻相互作用的变化规律.然后引入量子互熵的概念来研究系统的熵,发现量子互熵随着温度的增加呈指数衰减趋势,同时也给出了量子互熵随温度和最近邻相互作用的变化规律.

[关键词] 热纠缠,部分熵,量子互熵,各向异性,XY 模型,最近邻相互作用

[中图分类号] O469 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2012)03-0048-04

## Partial Entropy and Mutual Entropy of Thermal Entanglement in Anisotropic XY Model in a Transverse Field

Zhai Xiaoyue, Li Yanbiao, Ma Shuyun

(Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

**Abstract:** By using the concept of partial entropy, we study the behaviors of the partial entropy of thermal entanglement in anisotropic XY model in a transverse field. It is found that the partial entropy of one subsystem isn't equivalent to that of the other subsystem. We give the plots of partial entropy as function of temperature and the nearest neighbor interaction. Then we introduce the concept of mutual entropy. We study the mutual entropy of this model and find that the mutual entropy decays exponential with increased temperature. We also give the plots of mutual entropy as function of temperature and the nearest neighbor interaction.

**Key words:** thermal entanglement, partial entropy, mutual entropy, anisotropic, XY model, the nearest neighbor interaction

量子纠缠作为一种重要的资源已广泛地应用于量子信息处理和量子通信,著名的量子态远程传输<sup>[1,2]</sup>、量子密码术<sup>[3]</sup>、量子纠错<sup>[4]</sup>、量子计算<sup>[5]</sup>等本质上都是利用了量子纠缠这一资源.量子纠缠的重要性使得对量子纠缠的定性和定量描述显得尤为重要.近年来,在有限温度下的热纠缠引起了人们的广泛兴趣,XY 模型是一个重要的基本模型,也是量子纠缠研究的重要对象,本文利用部分熵纠缠度和量子互熵来研究横场中各向异性 XY 模型的热纠缠的熵的行为.

### 1 模型和计算方法

在横场中的各向异性 XY 模型的哈密顿量为<sup>[6,7]</sup>:

$$H = - \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\lambda}{2} [(1 + \gamma) \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + (1 - \gamma) \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y] + \sigma_i^z \right\}, \quad (1)$$

式中  $\lambda$  代表两自旋间的相互作用,  $\gamma$  是各向异性参数,  $\sigma^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) 为泡利矩阵,  $N$  为自旋数目  $N = 3$ .

选择一组标准基:

$$\{|1\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |3\rangle = |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |5\rangle = |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |7\rangle = |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |2\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |4\rangle = |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |6\rangle = |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |8\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\}.$$

收稿日期: 2011-10-25.

基金项目: 中国人民解放军理工大学理学院青年科研基金(QN-SL-2010-10).

通讯联系人: 翟孝月, 讲师, 研究方向: 凝聚态物理. E-mail: zhuyue81@sina.com

其中  $|\uparrow\rangle$  和  $|\downarrow\rangle$  分别是自旋算符  $S^z$  的本征函数.

在这一组基下, 哈密顿量可表示为:

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -\lambda\gamma & 0 & -\lambda\gamma & -\lambda\gamma & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\lambda\gamma \\ 0 & -\lambda & 3 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\lambda\gamma \\ -\lambda\gamma & 0 & 0 & 3 & 0 & -\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda & 0 & 3 & 0 & 0 & -\lambda\gamma \\ -\lambda\gamma & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 3 & -\lambda & 0 \\ -\lambda\gamma & 0 & 0 & -\lambda & 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -\lambda\gamma & -\lambda\gamma & 0 & -\lambda\gamma & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

在热平衡条件下, 系统的密度矩阵为:

$$\rho(T) = \frac{\exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)}{Z}, \quad (3)$$

$$Z = \text{Tr}\left(\exp\left(-\frac{H}{k_B T}\right)\right), \quad (4)$$

式中  $k_B$  是玻尔兹曼常数, 在本文中, 取  $k_B = 1$ .

将该三自旋链分成  $PQ$  两部分,  $P$  部分包含 2 个自旋,  $Q$  部分包含一个自旋. 则  $P$  部分的部分熵<sup>[8]</sup> 为:

$$S(2) = -\text{Tr}\rho_P \log_2 \rho_P. \quad (5)$$

$Q$  部分的部分熵为:

$$S(1) = -\text{Tr}\rho_Q \log_2 \rho_Q. \quad (6)$$

整个系统的熵为:

$$S(3) = -\text{Tr}\rho_{PQ} \log_2 \rho_{PQ}. \quad (7)$$

其中  $\rho_P, \rho_Q$  分别为子系统的约化密度矩阵,  $\rho_{PQ}$  为整个体系的约化密度矩阵.

$$\rho_P = \text{Tr}_Q \rho_{PQ}, \quad \rho_Q = \text{Tr}_P \rho_{PQ}. \quad (8)$$

$\text{Tr}_i(I = P, Q)$  表示对子系统的变量作求迹操作. 量子互熵<sup>[9]</sup> 的定义为:  $S(P:Q) = S(\rho_P) + S(\rho_Q) - S(\rho_{PQ})$ , 其物理意义就是表示系统  $P, Q$  共有的信息.

## 2 计算结果及分析

由图 1 和 2 可以清楚地看到, 对于同样的温度  $T$  或者最近邻相互作用  $\lambda$ ,  $P$  和  $Q$  2 个子系统的部分熵不相等, 即  $S(\rho_P) \neq S(\rho_Q)$ , 这与零温时  $S(\rho_P) = S(\rho_Q)$  不同. 比较两子链的熵之和与整条链的熵, 发现  $S(\rho_{PQ}) \neq S(\rho_P) + S(\rho_Q)$ , 如图 3. 这时整个系统的熵小于各部分熵之和, 这是因为信息可以编码在两部分

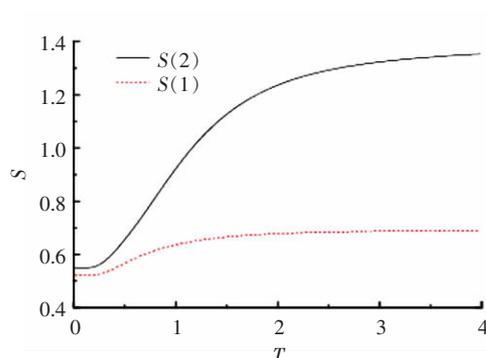


图 1 部分熵随温度  $T$  变化的示意图,  $S(2)$  和  $S(1)$  分别表示  $P$  和  $Q$  的部分熵. 这里  $\gamma=1, \lambda=1$

Fig.1 The plot of partial entropy as function of temperature  $T$  at given parameters  $\gamma=1, \lambda=1$ .  $S(2)$  and  $S(1)$  denote the partial entropy of subsystem  $P$  and  $Q$  respectively

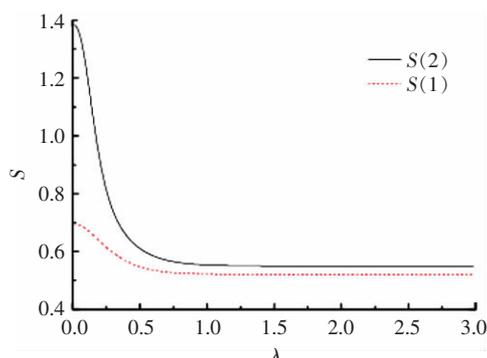


图 2 部分熵随最近邻相互作用  $\lambda$  变化的示意图,  $S(2)$  和  $S(1)$  分别表示  $P$  和  $Q$  的部分熵. 这里  $\gamma=1, T=0.2$

Fig.2 The plot of partial entropy as function of the nearest neighbor interaction  $\lambda$  at given parameters  $\gamma=1, T=0.2$ .  $S(2)$  and  $S(1)$  denote the partial entropy of subsystem  $P$  and  $Q$  respectively

的纠缠中. 即非定域的量子关联中,任何局部操作都不能提取编码在其中的信息,这是量子信息不同于经典信息的一个显著特征. 图 4 和图 5 给出部分熵  $S(\rho_P)$  和  $S(\rho_Q)$  同时随着温度  $T$  和最近邻相互作用  $\lambda$  的变化关系.

接下来研究该系统的量子互熵,其定义为:

$$S(P:Q) = S(2) + S(1) - S(3), \quad (10)$$

量子互熵  $S(P:Q)$  的物理意义就是表示系统  $P, Q$  共有的信息. 如图 6 所示,随着温度的增加,量子互熵呈指数衰减趋势  $S(P:Q) \sim \exp[-T/\alpha(\lambda)]$ .

量子互熵随最近邻相互作用的变化关系如图 7 所示,随着最近邻相互作用的增加,量子互熵起初先增加,然后达到一稳定的值. 图 8 给出量子互熵同时随着温度和最近邻相互作用的变化关系.

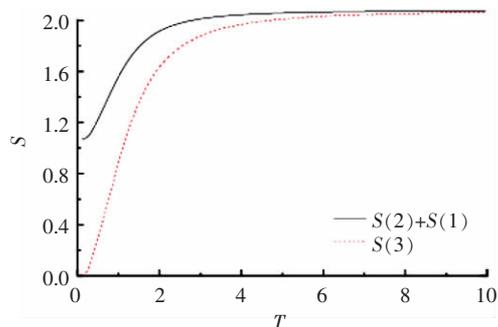


图 3 部分熵随温度  $T$  变化的示意图,  $S(2)+S(1)$  表示子链  $P$  和  $Q$  的部分熵之和,  $S(3)$  表示整条链的 Von Neumann 熵. 这里  $\gamma=1, \lambda=1$

Fig.3 The plot of partial entropy as function of temperature  $T$  at given parameters  $\gamma=1, \lambda=1$ .  $S(2) + S(1)$  denotes the sum of partial entropy for subsystem  $P$  and  $Q$ .  $S(3)$  denotes the Von Neumann entropy of the chain

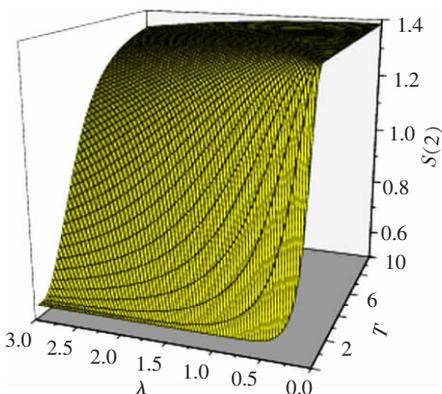


图 4 子系统  $P$  的部分熵  $S(2)$  同时随温度  $T$  和最近邻相互作用  $\lambda$  的变化示意图, 这里  $\gamma=1$

Fig.4 The plot of partial entropy  $S(2)$  of subsystem  $P$  as function of temperature  $T$  and the nearest neighbor interaction  $\lambda$  at given anisotropy parameter  $\gamma=1$

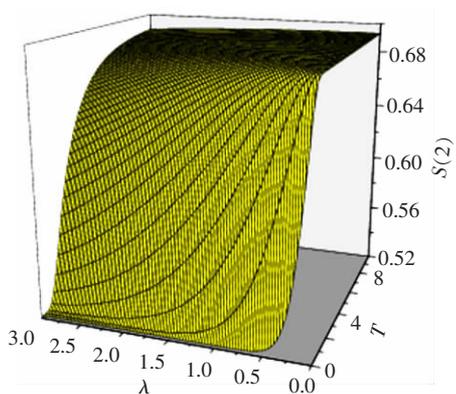


图 5 子系统  $Q$  的部分熵  $S(1)$  同时随温度  $T$  和最近邻相互作用  $\lambda$  的变化示意图, 这里  $\gamma=1$

Fig.5 The plot of partial entropy  $S(1)$  of subsystem  $Q$  as function of temperature  $T$  and the nearest neighbor interaction  $\lambda$  at given anisotropy parameter  $\gamma=1$

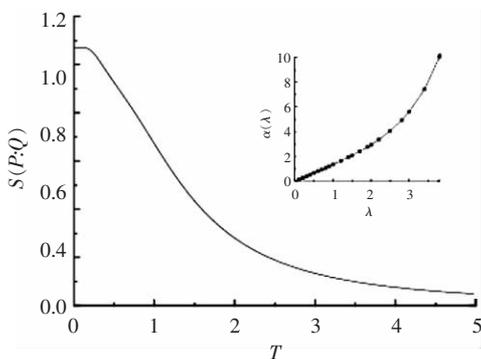


图 6 量子互熵  $S(P:Q)$  随温度  $T$  的变化示意图, 随着温度的增加,  $S(P:Q)$  呈指数衰减  $S(P:Q) \sim \exp(-T/1.514)$ , 这里  $\gamma=1, \lambda=1$ . 插图给出了  $\alpha(\lambda)$  随  $\lambda$  的变化关系

Fig.6 The plot of mutual entropy  $S(P:Q)$  as function of temperature  $T$  at given parameters  $\gamma=1, \lambda=1$ .  $S(P:Q)$  decays exponentially [ $S(P:Q) \sim \exp(-T/1.514)$ ] with increasing temperature. Insert shows the dependence of  $\alpha(\lambda)$  on  $\lambda$

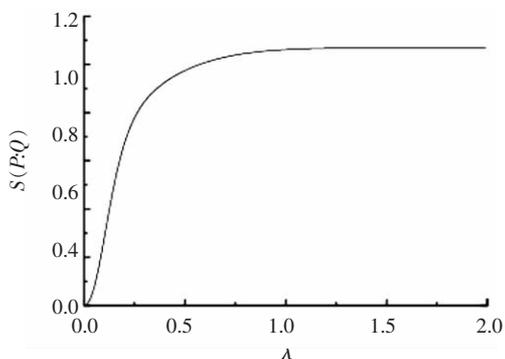


图 7 量子互熵  $S(P:Q)$  随最近邻相互作用  $\lambda$  变化的示意图, 这里  $\gamma=1, T=0.2$

Fig.7 The plot of mutual entropy  $S(P:Q)$  as function of the nearest neighbor interaction  $\lambda$  at given parameters  $\gamma=1, T=0.2$

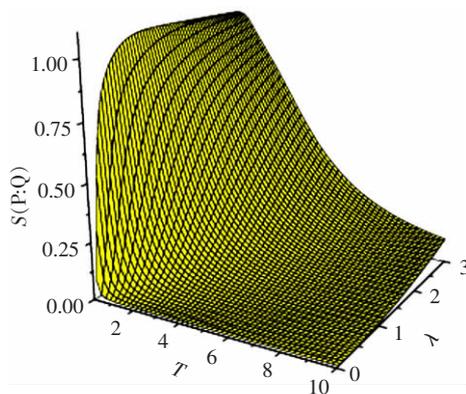


图8 量子互熵  $S(P;Q)$  同时随温度  $T$  和最近邻相互作用  $\lambda$  的变化示意图, 这里  $\gamma=1$

Fig.8 The plot of partial entropy  $S(2)$  of subsystem  $P$  as function of temperature  $T$  and the nearest neighbor interaction  $\lambda$  at given anisotropy parameter  $\gamma=1$

### 3 结论

综上所述, 研究了在一维各向异性 XY 模型中的热纠缠的熵的行为, 发现在有限温度时, 两子系统的部分熵不相等, 同时给出部分熵随温度和最近邻相互作用的变化规律. 然后引入了量子互熵的概念来研究系统的熵, 发现量子互熵随着温度的增加呈指数衰减趋势. 同时, 我们也给出了量子互熵随温度和最近邻相互作用的变化规律.

#### [参考文献]

- [1] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and einstein-podolsky-rosen channels [J]. Physical Review Letters, 1993, 70(13): 1895-1899.
- [2] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K M, et al. Experimental quantum teleportation [J]. Nature, 1997, 390(6660): 575-579.
- [3] Deutsch D, Ekert A, Jozsa R, et al. Quantum privacy amplification and the security of quantum cryptography over noisy channels [J]. Physical Review Letters, 1996, 77(13): 2818-2821.
- [4] Shor P W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory [J]. Physical Review A, 1995, 52(4): 2493-2496.
- [5] Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack [J]. Physical Review Letters, 1997, 79(2): 325-328.
- [6] Zhang L F, Tong P Q. Entanglement of periodic anisotropic XY chains [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2005, 38(33): 1-12.
- [7] Zhai X Y, Tong P Q. Thermal entanglement of anisotropic XY chains in a transverse field [J]. Chinese Physics Letters, 2007, 24(9): 2474-2478.
- [8] Bennett C H, Bernstein H J, Popescu S, et al. Concentrating partial entanglement by local operations [J]. Physical Review A, 1996, 53(4): 2046-2052.
- [9] Cerf N J, Adami C. Negative entropy and information in quantum mechanics [J]. Physical Review Letters, 1997, 79(26): 5194-5197.

[责任编辑: 顾晓天]