最小化损失概率的再保险和投资问题

张昕丽[1,2],孙文瑜[1]

(1. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)
(2. 聊城大学数学科学学院,山东 聊城 252000)

[摘要] 本文考虑保险公司的再保险和投资策略问题. 为了在降低风险的同时增加收益,保险公司会考虑在再保险的基础上将剩余财富投资到 m 种风险资产中. 资产中风险资产的价格波动服从几何布朗运动. 本文给出了考虑再保险和投资之后的财富模型,基于最小化损失概率的基础上求解其相应的 HJB 方程,从而给出保险公司的再保险和投资的最优策略.

[关键词] HJB 方程,损失概率,价值函数,交易费用

[中图分类号]O224;F224.9 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2013)01-0001-09

Optimal Proportional Reinsurance and Investment with Minimizing Ruin Probability

Zhang Xinli[1,2],Sun Wenyu[1]

(1. School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(2. School of Mathematical Sciences,Liaocheng University,Liaocheng 252000,China)

Abstract:In this paper,we consider a problem of optimal reinsurance and investment with multiple risky assets for an insurance company whose surplus is governed by a linear diffusion. The insurance company's risk can be reduced through reinsurance,while,in addition,the company invests its surplus in a financial market with one risk-free asset and m risky assets. The risky assets' prices are governed by geometric Brownian motions. We consider the optimization problem of minimizing the ruin probability and solve it by using the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)equation. Explicit expression for the optimal value function and the corresponding optimal strategies are obtained.

Key words:Hamilton-Jacobi-Bellman equation,ruin probability,value function,transaction costs

本文研究保险公司的再保险和投资问题. 随着投资在保险行业中日益重要,保险和投资模型也日渐成为学者的研究热点之一. 为了降低风险,引入了保险这一概念. 因此,近年来越来越多的学者致力于再保险和投资问题的研究.

许多再保险问题是通过最优化和随机控制技术来研究的[1~6]. 文[7]利用带偏离的布朗运动来刻画保险公司的财富,通过最大化终期财富的指数函数效用函数得到了最优投资策略. 同时也利用最小化损失概率得到最优投资策略. 文[8]也考虑了类似的优化问题,但其中的风险过程是用跳扩散过程来刻画的. 对于相同的扩散模型,文[9]在基于最优比例再保险和投资的基础上考虑了损失概率的最小化问题. 在文[5]中,作者在财富过程服从经典风险过程的基础上,考虑再保险和投资问题,给出了求解 HJB 方程的数值过程. 文[6]用扩散过程刻画保险公司的剩余,他们考虑了再保险但对投资行为却未加限制,所有的剩余均被投资到一种资产上. 文[10]在不允许卖空和借贷的条件下考虑了类似文[9]中的问题. 文[11]在无卖空的基础上考虑了再保险和投资的两类优化模型:最大化终期财富的预期指数效用和最小化损失概率.

收稿日期:2012-10-29.
基金项目:国家自然科学基金(11171159、11071122)、江苏省大规模复杂系统数值模拟重点实验室研究项目.
通讯联系人:张昕丽,博士后,讲师,研究方向:金融数学. E-mail:zhgylgp@gmail.com

在保险公司投资风险资产的过程中,势必会产生相应的交易费用.而在上述文章中没有考虑这一方面.在实际中,保险公司必须支付一定比例的投资数额给第三方从而促成自己的投资.交易费用的支付比例取决于不同的资产和资产的买进和卖出.通常情况下,交易费用是固定的数额,在交易之前支付.为了使得交易费用更合理化,本文假设交易费用是时间 t 的函数.

基于以上几个方面,本文假设保险公司可以将其剩余资产投资在一种无风险资产和 m 种风险资产中,并且产生的效益费用为时间 t 的函数.除了投资之外,假设保险公司会购买再保险而降低其潜在的风险.我们在 Black—Scholes 期权定价模式下考虑比例再保险问题,且允许投资组合的动态再调整.通过随机控制技术给出考虑交易费用的完整的最小化损失概率和最优控制策略体系.从结果中可以看出,外在参数和投资约束的改变将导致最优控制策略的显著改变.本文中采用的优化理论请参考文[12].

本文第一部分给出了考虑交易费用的再保险和投资的最优问题.第二部分给出了基于最小化损失概率的 HJB 方程以及求解方法.最后在第三部分给出了本文的结论.

1　再保险与投资问题

在不考虑再保险和投资的前提下,保险公司剩余财富的动态方程为:

$$\mathrm{d}R_t=\mu\mathrm{d}t+\sigma_0\mathrm{d}w_t^{(0)},\quad R_0=x,$$

其中 $w_t^{(0)}$ 是标准布朗运动.常数 $x>0$ 是最初的剩余财富,常数 $\mu>0$ 和 $\sigma_0>0$ 给定.比例再保险的水平依赖于 $(1-a)$ 取值的大小,其中,$0\leqslant a\leqslant 1$ 为保险公司的安全负荷.也就是说,分出公司将支付 100% 的赔偿比例而剩余的由分入公司即再保险公司承担.同时,分出公司将转移 $\lambda(1-a)$ 的保险费给分入公司,其中 $\lambda\geqslant\mu$.若 $\lambda=\mu$,则称该再保险合同为便宜的;若 $\lambda>\mu$,则称该再保险合同为非便宜的.

考虑再保险之后,分出公司剩余价值的扩散近似模型动态方程表示为:

$$\mathrm{d}R_t=[\mu-(1-a)\lambda]\mathrm{d}t+a\sigma_0\mathrm{d}w_t^{(1)},\quad R_0=x.$$

此外,我们利用 $\boldsymbol{\pi}_b,\boldsymbol{\pi}_s$ 来表示在风险资产上的买卖数量,其中 $\boldsymbol{\pi}_b=(\pi_b^{(1)},\pi_b^{(2)},\cdots,\pi_b^{(m)})$,$\boldsymbol{\pi}_s=(\pi_s^{(1)},\pi_s^{(2)},\cdots,\pi_s^{(m)})$.风险资产 i 的价格进程由传统的 Black-Scholes 动态方程来描述:

$$\mathrm{d}S_i(t)=S_i(t)\{r_{1i}\mathrm{d}t+\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}\mathrm{d}w^j(t)\},i=1,2,\cdots,m,$$

这里,$w^j,j=1,2,\cdots,m$ 是独立于 w^0 的标准的布朗运动过程,且 w^i 和 $w^j,i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j$ 也是相互独立的.其中 $\boldsymbol{r}_1>0$ 和 $\sigma_{ij}>0$ 是相关风险资产的外在因素.

买卖风险资产都会产生交易费用,令 $\boldsymbol{\theta}_b=[\theta_{b1},\theta_{b2},\cdots,\theta_{bm}]^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 和 $\boldsymbol{\theta}_s=[\theta_{s1},\theta_{s2},\cdots,\theta_{sm}]^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 分别为买卖股票所产生的单位交易费用.更确切地说,每买一单位的风险资产 i 将花费 $(1+\theta_{bi})$ 数量的无风险资产,而卖一单位的风险资产 i 将增加 $(1-\theta_{si})$ 数量的无风险资产.

因为不可能在同时对一种资产既买又卖,故

$$\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{\pi}_s^{\mathrm{T}}=0.$$

将安全负荷系数 a 和投资在风险资产上的剩余财富的数量向量 $\boldsymbol{\pi}_b,\boldsymbol{\pi}_s$ 作为控制变量.在任意时间 $t\geqslant 0$,保险公司将决策出相应的 $a=a(t,x)$ 和 $\boldsymbol{\pi}_b=\pi_b(t,x)$,$\boldsymbol{\pi}_s=\pi_s(t,x)$.令 $\boldsymbol{\pi}(\cdot,\cdot)=(a(\cdot,\cdot),\boldsymbol{\pi}_b(\cdot,\cdot),\boldsymbol{\pi}_s(\cdot,\cdot))$.剩余财富的 $(R_t-\sum_{i=1}^{m}\pi_b^{(i)}+\sum_{i=1}^{m}\pi_s^{(i)})$ 以增长率 $r_0>0$ 投资在无风险资产上,价格进程服从下面的动态方程:

$$\mathrm{d}B_t=r_0B_t\mathrm{d}t.$$

一旦决策 $\boldsymbol{\pi}(\cdot,\cdot)$ 选定,剩余价值的进程变为:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}R_t^{\pi}=&[\mu-(1-a(t))\lambda+r_0R_t^{\pi}+\boldsymbol{\pi}_b(t)(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\theta}_b)+\boldsymbol{\pi}_s(t)(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\theta}_s)]\mathrm{d}t+\\&a(t)\sigma_0\mathrm{d}w_t^{(0)}+(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}w_t^{(1)},\end{aligned}\tag{1}$$

$$R_0=x,$$

其中

$$
\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{21} & \cdots & \sigma_{m1}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{1m} & \sigma_{2m} & \cdots & \sigma_{mm}\end{bmatrix}.
$$

2 基于最小化风险概率的 HJB 方程

假定卖空和借贷都是允许的，也就是说投资在风险资产上的数量 $\boldsymbol{\pi}_b(t)$ 和 $\boldsymbol{\pi}_s(t)$ 可以取任意的数值，即：$-\infty<\boldsymbol{\pi}_b(t),\boldsymbol{\pi}_s(t)<\infty$；例如如果 $\boldsymbol{\pi}_b(t)>0$，代表保险公司购买相应的风险资产，而 $\boldsymbol{\pi}_b(t)<0$ 则表示买空. 与此类似，如果 $\boldsymbol{\pi}_s(t)>0$，表示保险公司卖掉相应的资产，而 $\boldsymbol{\pi}_s(t)<0$ 则表示卖空.

对每一个 $t\geqslant0$，$a(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{\pi}_b^{(i)}(\cdot),\boldsymbol{\pi}_s^{(i)}(\cdot)$，$i=1,2,\cdots,m$ 满足下列约束

(1) $0\leqslant a(t)\leqslant1$，　(2) $\boldsymbol{\pi}_b^{(i)}(\cdot),\boldsymbol{\pi}_s^{(i)}(\cdot)\in A=(-\infty,\infty)$.

一旦决策 π 给定，剩余时间由下式定义：

$$
\tau_\pi=\inf\{t>0:R_t^\pi\leqslant0\}. \tag{2}
$$

相应的效用函数为

$$
v_\pi(x)=P_x(\tau_\pi<\infty)=P(\tau_x<\infty\mid R_0=x). \tag{3}
$$

我们的目的是为了找到最优的效用函数

$$
v(x)=\inf_{\pi\in\Pi}v_\pi(x) \tag{4}
$$

和最优策略 π^* 使得

$$
v_{\pi^*}(x)=v(x). \tag{5}
$$

上面所论述的问题等价于无限时间水平的控制问题，可以利用动态规划技术去求解.

首先给出价值函数 v 的 HJB 方程.

定理 1　假设由(4)定义的 v 在 $(0,\infty)$ 是二次可微的. 其中 v 满足下面的 HJB 方程

$$
0=\inf_{0\leqslant a\leqslant1}\left\{[\mu-(1-a)\lambda+r_0x]v'(x)+\frac{1}{2}a^2\sigma_0^2v''(x)\right\}+\inf_{\pi_b,\pi_s\in A}\left\{(\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{B}_2)v'(x)+(\boldsymbol{\pi}_b+\boldsymbol{\pi}_s)\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b+\boldsymbol{\pi}_s)^{\mathrm T}v''(x)\right\}, \tag{6}
$$

其中

$$
\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\theta}_b=(r_{11}-r_0-\theta_{b1},r_{12}-r_0-\theta_{b2},\cdots,r_{1m}-r_0-\theta_{bm})^{\mathrm T},
$$

$$
\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{\theta}_s=(r_{11}+r_0-\theta_{s1},r_{12}+r_0-\theta_{s2},\cdots,r_{1m}+r_0-\theta_{sm})^{\mathrm T}.
$$

该定理的证明可参见文[13]. 接下来寻求方程(6)的一个递增的凸的二次可微的解，满足下面的边界条件

$$
v(0)=1,\quad v(\infty)=0. \tag{7}
$$

定理 2　令 $w\in C^2$ 是 HJB 方程(6)的递增的凸解，满足边界条件(7). 那么由(4)给出的效用函数 v 与 w 是等价的. 另外，令 $(a^*(x),\boldsymbol{\pi}_b^*(x),\boldsymbol{\pi}_s^*(x))$ 使得

$$
0=[\mu-(1-a^*(x))\lambda+r_0x]w'(x)+\frac{1}{2}(a^*(x))^2\sigma_0^2w''(x)+(\boldsymbol{\pi}_b^*(x)\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\pi}_s^*(x)\boldsymbol{B}_2)w'(x)+
$$

$$
\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_b^*(x)+\boldsymbol{\pi}_s^*(x))\boldsymbol{D}^{\mathrm T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b^*(x)+\boldsymbol{\pi}_s^*(x))^{\mathrm T} \tag{8}
$$

对所有的 $0\leqslant x<\infty$ 成立. 那么最优反馈形式 $\boldsymbol{\pi}^*(s)=(a^*(R_s^{\pi^*}),\boldsymbol{\pi}_b^*(R_s^{\pi^*}),\boldsymbol{\pi}_s^*(R_s^{\pi^*}))$ 的策略可以表示为 $\boldsymbol{\pi}^*(\cdot)$，其中 $R_s^{\pi^*}$ 是(1)的一个解，是一个最优的策略，即

$$
w(x)=v(x)=v_{\boldsymbol{\pi}^*}(x).
$$

该定理的证明与下述引理有关，具体的证明过程类似于文[6]中的引理 6.1.

引理 1[10]　令

$$\eta_\pi^N=\inf\{t>0:R_t^\pi\geqslant N\} \tag{9}$$

和

$$\tau_\pi^N=\min(\tau_\pi,\eta_\pi^N)\equiv\inf\{t>0:R_t^\pi\in[0,N]\}. \tag{10}$$

那么对所有的 $N>0$ 和所有的策略 $\boldsymbol{\pi}$ 有

$$P(\tau_\pi^N<\infty)=1. \tag{11}$$

说明　上述引理的给出是为了定理的证明. 否则,给出的模型在非零初始财富的前提下,其价值函数均可以为零. 例如,若 $\lambda=\mu$,令 $a=0$,$\boldsymbol{\pi}_b=\boldsymbol{\pi}_s=\boldsymbol{0}$,则 $\mathrm{d}R_t^\pi=0$. 也就是说对任意时刻 $t\geqslant0$,均有 $R_t^\pi=x$. 这意味着保险公司会保存初始财富 x 不变,而将所有的保险金都转移给再保险公司,此时他的损失概率为 0.

因为 $\boldsymbol{\pi}_b$ 和 $\boldsymbol{\pi}_s$ 可以取任意值,则相应的 HJB 方程可以写为

$$0=\inf_{0\leqslant a\leqslant1}\left[(\mu-(1-a)\lambda+r_0x)w'(x)+\frac{1}{2}a^2\sigma_0^2w''(x)\right]+$$

$$\inf_{-\infty<\pi_b,\pi_s<\infty}\left[(\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{B}_2)w'(x)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_b+\boldsymbol{\pi}_s)\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b+\boldsymbol{\pi}_s)^{\mathrm{T}}w''(x)\right]. \tag{12}$$

为了求解上面的 HJB 方程,首先需要给出几个引理如下. 令

$$x^*=\frac{\lambda-\mu}{r_0}. \tag{13}$$

引理 2　如果最初的剩余价值满足 $x\geqslant x^*$,那么 $w(x)=0$.

证明　将 $x^*=\dfrac{\lambda-\mu}{r_0}$代入到(12)的右侧,可以得到

$$[\mu-(1-a(t))\lambda+\lambda-\mu+\boldsymbol{\pi}_b(t)\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\pi}_s(t)\boldsymbol{B}_2]\mathrm{d}t+a(t)\sigma_0\mathrm{d}w_t^{(0)}+(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}w_t^{(1)}=$$

$$[a(t)\lambda+\boldsymbol{\pi}_b(t)\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{\pi}_s(t)\boldsymbol{B}_2]\mathrm{d}t+a(t)\sigma_0\mathrm{d}w_t^{(0)}+(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\pi}_b(t)+\boldsymbol{\pi}_s(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}w_t^{(1)}. \tag{14}$$

可以看到如果 $\boldsymbol{\pi}_b(t)=\boldsymbol{\pi}_s(t)=\boldsymbol{0}$ 和 $a(t)=0$,损失不会发生,也就是 $w(x)=0$.

这意味着如果一个保险公司拥有足够多的初始剩余财富,则依据投资所有剩余财富而得到的利润可以弥补财政赤字,这些赤字来自于费用和付给再保险单位的费用,因此,保险公司永远会有剩余财富.

下面,考虑 HJB 方程(6),希望可以找到一个凸的递增的二次连续可微的解,满足 $w(0)=1$ 和 $w(x^*)=0$,并且满足

$$\mathcal{O}=\{x:0<x<x^*\}. \tag{15}$$

引理 3[14]　$\boldsymbol{s}_1$ 定义为

$$s_1(\boldsymbol{z})\triangleq\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_1\|^2 \tag{16}$$

$\boldsymbol{z}\in[0,\infty)^m$. 那么 s_1 含有唯一的最小解 $\bar{z}_1\in[0,\infty)^m$,即

$$\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{z}_1+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_1\|^2\leqslant\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_1\|^2,\ \forall\boldsymbol{z}\in[0,\infty)^m. \tag{17}$$

在$[0,\infty)^m$ 内 s_1 的最小值满足的 KKT 条件使得拉格朗日乘子向量 $\bar{\boldsymbol{v}}_1\in[0,\infty)^m$ 满足 $\bar{\boldsymbol{v}}_1=\nabla s_1(\bar{z}_1)=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\bar{z}_1+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{B}_1$ 和 $\bar{z}_1\bar{\boldsymbol{v}}_1=0$.

引理 4[14]　s_2 定义为

$$s_2(\boldsymbol{z})\triangleq\frac{1}{2}\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_2\|^2, \tag{18}$$

$\boldsymbol{z}\in[0,\infty)^m$. 那么 s_2 有唯一的最小解 $\bar{z}_2\in[0,\infty)^m$,即

$$\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{z}_2+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_2\|^2\leqslant\|(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{z}+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_2\|^2,\ \forall\boldsymbol{z}\in[0,\infty)^m. \tag{19}$$

在$[0,\infty)^m$ 内 s_2 的最小值满足的 KKT 条件使得拉格朗日乘子向量 $\bar{\boldsymbol{v}}_2\in[0,\infty)^m$ 满足 $\bar{\boldsymbol{v}}_2=\nabla s_2(\bar{z}_2)=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\bar{z}_2+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{B}_2$ 和 $\bar{z}_2\bar{\boldsymbol{v}}_2=0$.

引理 5[14]　η_1 定义为

$$\eta_1(z)\triangleq\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}z-\kappa_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}z,\tag{20}$$

其中 $z\in[0,\infty)^m$,$\kappa_1\geqslant 0$. 那么 η_1 有唯一的最小解 $\kappa_1\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\in[0,\infty)^m$,其中,

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_1=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{z}_1+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_1,\tag{21}$$

此处的 $\bar{z}_1$ 是引理 3 中 $s_1(z)$ 的极小解. 此外,$\bar{z}_1'\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1=0$ 且

$$\eta_1(\kappa_1\bar{\boldsymbol{v}}_1)=\eta_1(\kappa_1\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1)=-\frac{1}{2}\kappa_1^2\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|.\tag{22}$$

引理 6[14]　η_2 定义为

$$\eta_2(z)\triangleq\frac{1}{2}z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}z-\kappa_2\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}z,\tag{23}$$

其中 $z\in[0,\infty)^m$,$\kappa_2\geqslant 0$. 那么 η_2 含有唯一的最小解 $\kappa_2\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\in[0,\infty)^m$,其中,

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}_2=(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{z}_2+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}_2,\tag{24}$$

此处 $\bar{z}_2$ 是引理 4 中 $s_2(z)$ 的极小解. 此外,$\bar{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2=0$ 且

$$\eta_2(\kappa_2\bar{\boldsymbol{v}}_2)=\eta_2(\kappa_2\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2)=-\frac{1}{2}\kappa_2^2\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|.\tag{25}$$

下面,我们考虑在满足边界条件(7)的基础上给出(6)的解. 假设存在 $W(t,x)$ 满足 $W_x>0$ 和 $W_{xx}<0$. 那么根据引理 3~6,有

$$\max_{\pi_b\geqslant 0}\left\{\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{B}_1W_x+\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_bD^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\pi}_b^{\mathrm{T}}W_{xx}\right\}=W_{xx}(t,x)\inf_{\pi_b\geqslant 0}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\pi}_b^{\mathrm{T}}+\frac{W_x}{W_{xx}}\boldsymbol{\pi}_b\boldsymbol{B}_1\right\}=-\frac{1}{2}\frac{W_x^2}{W_{xx}}\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2$$

和

$$\max_{\pi_s\geqslant 0}\left\{\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{B}_2W_x+\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\pi}_s^{\mathrm{T}}W_{xx}\right\}=W_{xx}(t,x)\inf_{\pi_s\geqslant 0}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\pi}_s^{\mathrm{T}}+\frac{W_x}{W_{xx}}\boldsymbol{\pi}_s\boldsymbol{B}_2\right\}=-\frac{1}{2}\frac{W_x^2}{W_{xx}}\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2,$$

其中 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_1$ 和 $\bar{\boldsymbol{\xi}}_2$ 分别由(21)和(24)给出,那么有

$$\boldsymbol{\pi}_b^*=-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\frac{W_x}{W_{xx}}\tag{26}$$

和

$$\boldsymbol{\pi}_s^*=-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\frac{W_x}{W_{xx}}.\tag{27}$$

HJB 方程(12)变为

$$0=\inf_{0\leqslant a\leqslant 1}\{[\mu-(1-a)\lambda+r_0x]w'(x)+\frac{1}{2}a^2\sigma_0^2w''(x)\}-\frac{1}{2}\frac{(w'(x))^2}{w''(x)}(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2).\tag{28}$$

对任意的 C^2 递增的凸函数 w,有

$$a_w(x)=-\frac{\lambda w'(x)}{\sigma_0^2w''(x)},\boldsymbol{\pi}_{bw}(x)=-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\frac{w'(x)}{w''(x)},\boldsymbol{\pi}_{sw}(x)=-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\frac{w'(x)}{w''(x)}.\tag{29}$$

类似于文[10],我们可以得到引理 7~9.

引理 7　假设 w 是 $\mathcal{O}$ 上递增的凸的二次连续可微的函数,令

$$\mathcal{O}_{w1}=\{0<x<x^*:a_w(x)<1\}.\tag{30}$$

如果 w 是下面方程的解,

$$-(\lambda-\mu-r_0x)\frac{w'(x)}{w''(x)}-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\sigma_0^2}+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2\right)\left(\frac{w'(x)}{w''(x)}\right)^2=0,\tag{31}$$

那么 w 就是在 $\mathcal{O}_{w1}$ 上 HJB 方程(12)的解,反之亦然.

类似地,可以得出:

引理 8　假设 w 是 $\mathcal{O}$ 上递增的凸的二次连续可微的函数,令

$$\mathcal{O}_{w2}=\{0<x<x^*:a_w(x)\geqslant 1\}. \tag{32}$$

如果 w 是下面方程的解,

$$\frac{1}{2}\sigma_0^2+(\mu+r_0x)\frac{w'(x)}{w''(x)}-\frac{1}{2}(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)\left(\frac{w'(x)}{w''(x)}\right)^2=0, \tag{33}$$

那么 w 是 $\mathcal{O}_{w2}$ 上 HJB 方程(12)的解,反之亦然.

利用上面的引理,我们可以推导基于极小化风险概率的 HJB 方程. 对 HJB 方程(12),我们考虑下面两种不同的情况:

(1)$\mu<\lambda<\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$;

(2)$\lambda\geqslant\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$.

(i)对于情形(1),$\mu<\lambda<\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$.

假设 w 是 HJB 方程(12)的解,那么在 $\mathcal{O}_{w1}$ 上,引理 7 表示

$$\frac{w'(x)}{w''(x)}=\frac{1}{g_1(x)}, \tag{34}$$

其中

$$g_1(x)=\frac{\frac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}{2(\mu-\lambda+r_0x)}. \tag{35}$$

从(29)可以得到

$$a_w(x)=-\frac{\lambda}{\sigma_0^2}\frac{w'(x)}{w''(x)}<1. \tag{36}$$

将(34)代入(36),有

$$-\frac{\lambda}{\sigma_0^2}\frac{2(\mu-\lambda+r_0x)}{\frac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}<1. \tag{37}$$

从(37)可以得到

$$2\lambda^2-2\lambda\mu-2\lambda r_0x<\lambda^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2), \tag{38}$$

则有

$$x>\frac{\lambda^2-2\lambda\mu-\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}{2\lambda r_0}. \tag{39}$$

令

$$x_0=\frac{\lambda^2-2\lambda\mu-\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}{2\lambda r_0}, \tag{40}$$

有 $x>x_0$. 由于 $\lambda<\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$ 时,$x_0<0$. 因此,$\mathcal{O}_{w1}=\mathcal{O}$. 注意 $\mathcal{O}_{w2}$ 是空的. 在边界条件 $w(0)=1$ 和 $w(x^*)=0$ 下求解(31). 上述推导可以得到下面的定理.

定理 3　如果 $\lambda<\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$,那么最小的损失函数可以表示为

$$w(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{\lambda-\mu-r_0x}{\lambda-\mu}\right]^{1+\frac{\lambda^2}{2r_0\sigma_0^2}+\frac{\|\bar{\xi}_1\|^2+\|\bar{\xi}_2\|^2}{2r_0}}, & 0<x<x^*,\\ 0, & x\geqslant x^*\end{cases} \tag{41}$$

是一个递增的凸 C^2 函数,除了点 x^*. 最优的风险暴露回馈函数由下式给出:

$$a^*(x)=\begin{cases}\dfrac{2\lambda(\lambda-\mu-r_0x)}{\lambda^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}, & 0<x<x^*,\\ 0, & x\geqslant x^*.\end{cases} \tag{42}$$

最优的投资反馈函数可以表示为

$$\boldsymbol{\pi}_{bw}^{*}(x)=\begin{cases}\dfrac{2(\lambda-\mu-r_0x)\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1}{\dfrac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}, & 0<x<x^*,\\ \boldsymbol{0}, & x\geqslant x^*;\end{cases}\tag{43}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{sw}^{*}(x)=\begin{cases}\dfrac{2(\lambda-\mu-r_0x)\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2}{\dfrac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}, & 0<x<x^*,\\ \boldsymbol{0}, & x\geqslant x^*.\end{cases}\tag{44}$$

(ii)对于情形(2)，$\lambda\geqslant\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$.

假设 w 是(31)的一个解，那么在 $\mathcal{O}_{w1}$ 上，条件 $a_w(x)<1$ 意味着 $x>x_0$，其中 x_0 是非负的且在 $\lambda\geqslant\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$ 范围内. 因此有 $\mathcal{O}_{w1}=\{x:x_0<x<x^*\}$. 那么(31)的满足边界条件 $v(x^*)=0$ 的一个解有下述形式：

$$w_1(x)=\mathrm{e}^{C_1}\int_x^{x^*}\mathrm{e}^{-\int_u^{x^*}g_1(v)\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}u,\tag{45}$$

其中 C_1 是一个常数.

将(31)重写为

$$(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)\left(\frac{w'(x)}{w''(x)}\right)^2-2(\mu+r_0x)\frac{w'(x)}{w''(x)}-\sigma_0^2=0.\tag{46}$$

当 $\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2\neq0$ 时，可以得到如下形式的 $\dfrac{w'(x)}{w''(x)}$：

$$\frac{w'(x)}{w''(x)}=\frac{2(\mu+r_0x)\pm\sqrt{4(\mu+r_0x)^2+4\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}=\frac{(\mu+r_0x)\pm\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}.$$

对 $w'(x)>0$ 和 $w''(x)<0$，令

$$\frac{w'(x)}{w''(x)}=\frac{(\mu+r_0x)-\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}.\tag{47}$$

当 $\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2=0$ 时，从(45)中得到

$$\frac{w'(x)}{w''(x)}=-\frac{\sigma_0^2}{2(\mu+r_0x)}.\tag{48}$$

接下来，我们求(28)的在 $\mathcal{O}_{w2}$ 范围内的解的表达式. 如果 w 可以求解(33)，那么通过引理 8，在 $\mathcal{O}_{w2}$ 范围上，w 满足 $\dfrac{w'(x)}{w''(x)}=\dfrac{1}{g_2(x)}$，其中，

$$g_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}{\mu+r_0x-\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}, & \|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2\neq0,\\ -\dfrac{2(\mu+r_0x)}{\sigma_0^2}, & \|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2=0.\end{cases}\tag{49}$$

因此 $a_w(x)\geqslant1$ 等同于 $x\leqslant x_0$，因此 $\mathcal{O}_{w2}=\{0<x<x_0\}$. (28)的在 $\mathcal{O}_{w2}$ 范围内满足边界条件 $v(0)=1$ 的解具有如下形式：

$$w_2(x)=1-\mathrm{e}^{C_2}\int_0^x\mathrm{e}^{\int_0^u g_2(v)\mathrm{d}v}\,\mathrm{d}u,\tag{50}$$

其中 C_2 是某个常数. 为了确定这个常数，考虑到所涉及函数在点 x_0 处是光滑的，令

$$w_1(x_0)=w_2(x_0);w_1'(x_0)=w_2'(x_0).$$

对 C_1 和 C_2 求解上面两个方程，得到

$$C_1=C_2+\int_0^{x_0} g_2(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x^*} g_1(x)\mathrm{d}x, \tag{51}$$

$$C_2=-\ln\left[\exp\left\{\int_0^{x_0} g_2(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{x^*} g_1(x)\mathrm{d}x\right\}\times\int_{x_0}^{x^*}\mathrm{e}^{-\int_u^{x^*} g_1(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u+\int_0^{x_0}\mathrm{e}^{\int_0^u g_2(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u\right]. \tag{52}$$

引理 9　$w_1''(x_0)=w_2''(x_0)$.

通过上面的推导,我们可以给出如下定理.

定理 4　如果 $\lambda\geqslant\mu+\sqrt{\mu^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}$,损失概率函数的最小值 w 由下式给出:

$$w(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{C_2}\int_0^x\mathrm{e}^{\int_0^u g_2(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u, & 0<x\leqslant x_0,\\ e^{C_1}\int_x^{x^*}\mathrm{e}^{-\int_u^{x^*} g_1(v)\mathrm{d}v}\mathrm{d}u, & x_0<x<x^*,\\ 0, & x\geqslant x^*\end{cases}$$

是 C^2 的递增的凸函数,除了点 x^*. 这里 x_0 由(40)给出,$g_1(x)$ 由(35)给出,$g_2(x)$ 由(49)给出,C_1 和 C_2 分别由(51)和(52)给出. 则最优的风险暴露回馈函数是

$$a^*(x)=\begin{cases}\dfrac{-\lambda(\mu+r_0x)+\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}, & 0<x\leqslant x_0,\\ \dfrac{2\lambda(\lambda-\mu-r_0x)}{\lambda^2+\dfrac{\sigma_0^2}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}}, & x_0<x<x^*,\\ 0, & x\geqslant x^*.\end{cases}$$

最优的投资回馈函数是

$$\boldsymbol{\pi}_{bw}^*(x)=\begin{cases}-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\dfrac{(\mu+r_0x)-\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}, & 0<x\leqslant x_0,\\ \dfrac{2\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_1(\lambda-\mu-r_0x)}{\dfrac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\dfrac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}}, & x_0<x<x^*,\\ \boldsymbol{0}, & x\geqslant x^*.\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{sw}^*(x)=\begin{cases}-\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\dfrac{(\mu+r_0x)-\sqrt{(\mu+r_0x)^2+\sigma_0^2(\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2)}}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}, & 0<x\leqslant x_0,\\ \dfrac{2\boldsymbol{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\xi}}_2(\lambda-\mu-r_0x)}{\dfrac{\lambda^2}{\sigma_0^2}+\dfrac{1}{\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_1\|^2+\|\bar{\boldsymbol{\xi}}_2\|^2}}, & x_0<x<x^*,\\ \boldsymbol{0}, & x\geqslant x^*.\end{cases}$$

定理 5　令 $w(x)$ 由定理 4 给出,那么 $w(x)=v(x)$. 另外,决策 $\boldsymbol{\pi}^*=(a^*(x^*),\boldsymbol{\pi}_b^*(x^*),\boldsymbol{\pi}_s^*(x^*))$ 是最优的,其中 x^* 为定理 4 中给出的策略 $\boldsymbol{\pi}^*$ 和 $(a^*(x),\boldsymbol{\pi}_b^*(x),\boldsymbol{\pi}_s^*(x))$ 下的投资组合.

3　结论

本文考虑了最优再保险和投资问题,基于最小化破产概率给出了相应的最优再保险和投资的策略. 为了降低其风险,保险公司会购买一定数量的比例再保险;为了增加收益,会将其剩余财富投资在一种无风险资产和 m 种风险资产中. 而在投资的过程中,交易费用是不可忽视的客观存在. 基于此,本文针对考虑交易费用的再保险和投资问题,给出了相应的 HJB 方程,得到了最小化破产概率的解析解.

[参考文献]

[1] Browne S. Survival and growth with liability:Optimal portfolio strategies in continuous time[J]. Mathematics of Operations Research,1997,22(2):468-492.

[2] Emanuel D C,Harrison J M,Taylor A J. A diffusion approximation for the ruin probability with compounding assets[J]. Scandinavian Actuarial Journal,1975(1):37-45.

[3] Hipp C,Plum M. Optimal investment for insurers[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2000,27(2):215-228.

[4] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scandinavian Actuarial Journal,2001(1):55-68.

[5] Schmidli H. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance[J]. Annals of Applied Probability,2002,12(3):890-907.

[6] Taksar M,Markussen C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios[J]. Finance and Stochastics,2003,7(1):97-121.

[7] Browne S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process:Exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Mathematics of Operations Research,1995,20(4):937-958.

[8] Yang H L,Zhang L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2005,37(3):615-634.

[9] Promislow D S,Young V R. Minimizing the probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift[J]. North American Actuarial Journal,2005,9(3):109-128.

[10] Luo S,Taksar M,Tsoi A. On reinsurance and investment for large insurance protfolios[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2008,42(1):434-444.

[11] Bai L H,Guo J Y. Optimal proportional reinsurance and investment with multiple risky assets and no-shorting constraint[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2008,42(3):968-975.

[12] Sun W,Yuan Y. Optimization Theory and Methods:Nonlinear Programming[M]. New York:Springer,2006.

[13] Fleming W H,Soner H M. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions[M]. Berlin,New York:Springer,1993.

[14] Xu G L,Shreve S E. A duality methods for optimal consumption and investment under short-selling prohibition:Ⅱ constant market coefficients[J]. Annals of Applied Probability,1992,2(2):314-328.

[责任编辑:丁　蓉]