退化拟抛物方程弱解的存在性

郭金勇

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西 柳州 545004)

[**摘要**] 考虑一类退化拟抛物方程的初边值问题. 在一些初值的假定下,基于时间离散化方法构造逼近解. 通过对逼近解的一致性估计,证明了弱解的存在性.

[**关键词**] 拟抛物方程,弱解,存在性

[**中图分类号**]O175.26 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2013)02-0015-05

The Existence of Weak Solutions for a Degenerate Pseudoparabolic Equation

Guo Jinyong

(Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou 545004, China)

Abstract: We considers an initial-boundary value problem for a class of degenerate pseudoparabolic equation. Under some assumptions on the initial value, we construct approximate solutions by using the time-discrete method. By means of uniform estimates on these approximate solutions, we establish the existence of weak solutions.

Key words: pseudoparabolic equation, weak solution, existence

1965 年,Coleman B D 等[1]在研究不稳定简单剪切变流的特殊运动状态时,提出如下拟抛物方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial \Delta u}{\partial t}=\Delta u.$$

此方程还在物理、化学、经济和人口等许多实际问题中有应用,如包含两相物质的粘性混合物中的相分离模型[2],人口动力学理论[3],剪切多孔介质的液体扩散模型[1,4],热传导模型[5]等.

本文考虑如下退化拟抛物方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-k\frac{\partial \Delta u}{\partial t}+\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)=0,\quad x\in\Omega,t>0,\tag{1}$$

$$u=\Delta u=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t>0,\tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega,\tag{3}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 为具有光滑边界的有界开区域,$p>2$ 为常数,$u_0(x)$ 为初始值函数,$k>0$ 为粘性系数,$k\frac{\partial \Delta u}{\partial t}$表示粘性松弛因子或粘性.

在方程(1)中,$\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u):=\Delta_p^2 u$ 称为 p-双调和算子. 关于 p-双调和算子的椭圆型方程已有许多结果,如文献[6,7]及其中的参考文献. 关于 p-双调和算子的抛物型方程结果却不多,文献[8]利用 Rellich 不等式和 Gronwall 引理研究了非线性临界 p-双调和抛物型方程初边值问题整体解的存在性. 但是,对 p-双调和拟抛物方程的研究还未见到.

方程(1)为文献[1]提出的拟抛物方程的变形. 由于退化,问题(1)~(3)不再有通常意义下的古典解,因此,我们引入如下意义的弱解:

定义 1 一个函数 u 被称为问题(1)~(3)的弱解,如果下列条件得到满足:

收稿日期:2012-09-30.

基金项目:广西教育厅科研项目(201204LX502).

通讯联系人:郭金勇,副教授,研究方向:偏微分方程. E-mail:lzszgjy@126.com

(1)$u\in L^\infty(0,T;W_0^{2,p}(\Omega))\cap C(0,T;L^2(\Omega))$,$\dfrac{\partial\Delta u}{\partial t}\in L^\infty(0,T;W^{-2,p'}(\Omega))$,其中 p'是 p 的共轭指数.

(2)对 $\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$,$Q_T=\Omega\times(0,T)$,以下积分等式成立

$$\iint_{Q_T} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t+k\iint_{Q_T}\nabla u\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\iint_{Q_T}|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

(3)在 $L^2(\Omega)$ 中,$u(x,0)=u_0(x)$.

关于弱解的存在性,文献[1]提出的拟抛物方程最有效证明是基于 Yoshida 逼近[9]. 对于问题(1)~(3),由于极大值原理和比较原理失效,我们采用时间离散化方法来证明弱解的存在性. 为叙述方便,假设 $k=1$,当 $k\neq1$ 时,证明方法相同.

1 主要结果及相关引理

本文的主要结果如下:

定理1 设 $u_0\in W_0^{2,p}(\Omega)$,$p>2$,则问题(1)~(3)至少存在一个弱解.

为证明定理1,首先进行时间离散化. 设 N 为正整数,把区间$(0,T)$分为 N 等分,取 $h=\dfrac{T}{N}(>0)$,考虑如下椭圆问题

$$\frac{1}{h}(u_{k+1}-u_k)-\frac{1}{h}(\Delta u_{k+1}-\Delta u_k)+\Delta(|\Delta u_{k+1}|^{p-2}\Delta u_{k+1})=0,\tag{4}$$

$$u_{k+1}|_{\partial\Omega}=0,\quad k=1,2,\cdots,N-1,\tag{5}$$

其中 u_0 是初始值函数.

引理1 对固定的 k,若 $u_k\in L^2(\Omega)$,则存在 $u_{k+1}\in W_0^{2,p}(\Omega)$,使得对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$,有

$$\frac{1}{h}\int_\Omega(u_{k+1}-u_k)\varphi\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_\Omega(\nabla u_{k+1}-\nabla u_k)\nabla\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega|\Delta u_{k+1}|^{p-2}\Delta u_{k+1}\Delta\varphi\mathrm{d}x=0.\tag{6}$$

注1 我们也称 u_{k+1}为问题(4)~(5)的弱解.

证明 在空间 $W_0^{2,p}(\Omega)$上,考虑泛函

$$F[u]=\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x,\quad G[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x,\quad E[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x,$$

$$J[u]=F[u]+\frac{1}{h}G[u]+\frac{1}{h}E[u]-\int_\Omega fu\mathrm{d}x,$$

其中 $f\in L^2(\Omega)$为已知函数. 由 Young 不等式知,存在常数 $C_1>0$,使得

$$J[u]=\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{2h}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2h}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\int fu\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{p}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x-C_1\int_\Omega|f|^2\mathrm{d}x.$$

我们声明 $J[u]$是满足强制性条件的. 事实上,由 $u|_{\partial\Omega}=0$,使用文献[10]中椭圆方程的 L^p 理论,有

$$\|u\|_{W^{2,p}}\leqslant C\|\Delta u\|_{L^p}.$$

因此,当 $\|u\|_{W^{2,p}}\to+\infty$ 时,$J[u]\to+\infty$.

因为 $J[u]$在 $W_0^{2,p}(\Omega)$上是弱下半连续的且满足强制性条件,根据[11]得出结论,存在 $u_*\in W_0^{2,p}(\Omega)$,使得

$$J[u_*]=\inf J[u],$$

且 u_*为对应于 $J[u]$的 Euler 方程

$$\frac{1}{h}u-\frac{1}{h}\Delta u+|\Delta u|^{p-2}\Delta u=f$$

的弱解,取 $f=\dfrac{1}{h}(u_k-\Delta u_k)$,得到式(6). 证毕.

注2 容易证明对 $\varphi\in W_0^{2,p}(\Omega)$,式(6)也成立.

现在,由如下式子

$$u^h(x,t)=u_k(x),\quad kh<t\leqslant(k+1)h,\quad k=0,1,\cdots,N-1,$$

$$u^h(x,0)=u_0(x),$$

来构造问题(1)~(3)的逼近解,而问题(1)~(3)所描述的解将由$\{u^h\}$的某个子序列的极限获得. 为此,需要一些关于$\{u^h\}$的一致性估计.

引理 2 问题(4)~(5)的弱解 u_k 满足

$$h\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega |\Delta u_k|^p \mathrm{d}x\leqslant C, \tag{7}$$

$$\sup_{0<t<T}\int_\Omega |\Delta u^h(x,t)|^p \mathrm{d}x\leqslant C, \tag{8}$$

其中 C 是不依赖于 h 和 k 的常数.

证明 (i)在积分等式(6)中取 $\varphi=u_{k+1}$,有

$$\frac{1}{h}\int_\Omega |u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_\Omega |\nabla u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^p\mathrm{d}x=\frac{1}{h}\int_\Omega u_{k+1}u_k\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_\Omega \nabla u_{k+1}\nabla u_k\mathrm{d}x.$$

应用 Young 不等式并整理,得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+h\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega |u_k|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_k|^2\mathrm{d}x, \tag{9}$$

把上式关于 k 从 0 到 $N-1$ 相加,则有

$$h\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega |\Delta u_k|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |u_0|^2\mathrm{d}x.$$

因此,式(7)成立.

(ii)在积分等式(6)中取 $\varphi=u_{k+1}-u_k$,有

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (u_{k+1}-u_k)(u_{k+1}-u_k)\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_\Omega (\nabla u_{k+1}-\nabla u_k)\nabla(u_{k+1}-u_k)\mathrm{d}x+\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^{p-2}\Delta u_{k+1}\Delta(u_{k+1}-u_k)\mathrm{d}x=0.$$

由于上式第一项和第二项非负,应用 Young 不等式,从而有

$$\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^{p-2}\Delta u_{k+1}\Delta u_k\mathrm{d}x\leqslant\frac{p-1}{p}\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^p\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta u_k|^p\mathrm{d}x.$$

对任意的 m,$1\leqslant m\leqslant N-1$,上面不等式关于 k 从 0 到 $m-1$ 相加,有

$$\int_\Omega |\Delta u_m|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega |\Delta u_0|^p\mathrm{d}x.$$

因此,(8)成立. 证毕.

引理 3 对式(4)~(5)的弱解 u_{k+1},有估计式

$$-Ch\leqslant\int_\Omega |u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u_{k+1}|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega |u_k|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega |\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{10}$$

成立,其中 C 是不依赖于 h 的常数.

证明 右边的不等式由式(9)直接得到,只需证明左边的不等式. 在式(6)中取 $\varphi=u_k$,由分部积分并使用边值条件,得

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (u_{k+1}-u_k)u_k\mathrm{d}x+\frac{1}{h}\int_\Omega (\nabla u_{k+1}-\nabla u_k)\nabla u_k\mathrm{d}x+\int_\Omega |\Delta u_{k+1}|^{p-2}\Delta u_{k+1}\Delta u_k\mathrm{d}x=0.$$

应用 Hölder 不等式,使用式(8),推出

$$\int_\Omega |u_k|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u_k|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega u_{k+1}u_k\mathrm{d}x-\int_\Omega \nabla u_{k+1}\nabla u_k\mathrm{d}x\leqslant Ch.$$

应用 Young 不等式,从上式推出式

$$\int_\Omega |u_k|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega |\nabla u_k|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega |u_{k+1}|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega |\nabla u_{k+1}|^2\mathrm{d}x\leqslant Ch.$$

证毕.

2 定理 1 的证明

证明 首先,定义算子 A^t:$A^t(\Delta u^h)=|\Delta u_k|^{p-2}\Delta u_k$, $\Delta^h u^h=u_{k+1}-u_k$,其中 $kh<t\leqslant(k+1)h$,$k=0,1,\cdots,N-1$. 根据式(4)及式(7),得知

$$\frac{1}{h}\Delta^h u^h \text{ 在 } L^\infty(0,T;(W^{2,p}(\Omega))')\text{ 中有界}. \tag{11}$$

利用式(6)、式(8)、式(11)并使用文献[12]中的紧性结果,得知,存在$\{u^h\}$的一个子序列(不妨仍用原来的序列表示),满足

$$\begin{aligned}
&u^h\to u, && \text{弱}*\text{于 } L^\infty(0,T;W^{2,p}(\Omega)),\\
&u^h\to u, && \text{于 } C(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\nabla u^h\to\nabla u, && \text{弱}*\text{于 } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),\\
&\frac{1}{h}(u_{k+1}-u_k)\to\frac{\partial u}{\partial t}, && \text{弱}*\text{于 } L^\infty(0,T;(W^{2,p}(\Omega))'),\\
&A^t(\Delta u^h)\to w, && \text{弱}*\text{于 } L^\infty(0,T;L^{p'}(\Omega)),
\end{aligned}$$

其中p'为p共轭指数. 由式(6)看出,对任意的$\varphi\in C_0^\infty(Q_T)$,有

$$\iint_{Q_T}\Big(\frac{1}{h}\Delta^h u^h\varphi-\frac{1}{h}\Delta^h u^h\Delta\varphi+A^t(\Delta u^h)\Delta\varphi\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

令$h\to0$,在广义函数的意义下,从上式得

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\Delta u}{\partial t}+\Delta w=0. \tag{12}$$

往证$w=|\Delta u|^{p-2}\Delta u$　a. e. 于Q_T. 定义

$$f_h(t)=\frac{t-kh}{2h}\Big(\int_\Omega|u_{k+1}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\nabla u_{k+1}|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|u_k|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x\Big)+\frac{1}{2}\int_\Omega|u_k|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x,$$

其中$kh<t\leqslant(k+1)h$. 由式(10),有

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|u_k|^2\mathrm{d}x-Ch\leqslant f_h(t)\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_k|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|u_k|^2\mathrm{d}x,$$

$$-C\leqslant f'_h(t)\leqslant0.$$

根据 Ascoli-Arzela 定理,存在函数$f(t)\in C([0,T])$,使得

$$\lim_{h\to0}f_h(t)=f(t),\quad\text{对 } t\in[0,T]\text{一致成立}.$$

再由式(10),有

$$\lim_{h\to0}\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u^h|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|u^h|^2\mathrm{d}x\Big)=f(t),\text{对 } t\in[0,T]\text{一致成立}. \tag{13}$$

由式(9),得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|u_N|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_N|^2\mathrm{d}x+\iint_{Q_T}|\Delta u^h|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_\Omega|u_0|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u_0|^2\mathrm{d}x.$$

在上式中令$h\to0$,并利用式(13),得

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\iint_{Q_T}|\Delta u^h|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t&\leqslant f(0)-f(T)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{T-\varepsilon}(f(t)-f(t+\varepsilon))\mathrm{d}t=\\
&\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{h\to0}\frac{1}{2\varepsilon}\Big[\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega(|u^h(x,t)|^2-|u^h(x,t+\varepsilon)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\\
&\int_0^{T-\varepsilon}\int_\Omega(|\nabla u^h(x,t)|^2-|\nabla u^h(x,t+\varepsilon)|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\Big]=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{h\to0}M_\varepsilon(u).
\end{aligned}$$

由于泛函$G[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x$及$E[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x$为凸泛函,且$\frac{\delta G[u]}{\delta u}=u$,$\frac{\delta E[u]}{\delta u}=-\Delta u$,于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega|u^h(x,t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|u^h(x,t+\varepsilon)|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u^h(x,t)|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u^h(x,t+\varepsilon)|^2\mathrm{d}x\leqslant\\
&\int_\Omega u^h(x,t)(u^h(x,t)-u^h(x,t+\varepsilon))\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla u^h(x,t)(\nabla u^h(x,t)-\nabla u^h(x,t+\varepsilon))\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{h\to 0}M_{\varepsilon}(u)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}(u(x,t)-u(x,t+\varepsilon))u\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{T-\varepsilon}\int_{\Omega}(\nabla u(x,t)-\nabla u(x,t+\varepsilon))\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

从而得到

$$\lim_{h\to 0}\iint_{Q_T}|\Delta u^h|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant-\int_0^T<\frac{\partial u}{\partial t},u>\mathrm{d}t+\int_0^T<\frac{\partial u}{\partial t},\Delta u>\mathrm{d}t,$$

其中<·,·>表示内积. 由式(12),得

$$\lim_{h\to 0}\iint_{Q_T}|\Delta u^h|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\mathrm{T}}\int_{\Omega}w\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{14}$$

再由$\dfrac{\delta F[u]}{\delta u}=\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$及$F[u]$的凸性,对任意的$g\in L^{\infty}(0,T;W_0^{2,p}(\Omega))$,有

$$\frac{1}{p}\iint_{Q_T}|\Delta g|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{p}\iint_{Q_T}|\Delta u^h|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\iint_{Q_T}(|\Delta u^h|^{p-2}\Delta u^h)\Delta(g-u^h)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由式(14)和$F[u]$是弱下半连续的,在上面不等式中令$h\to 0$并取极限,得

$$\frac{1}{p}\iint_{Q_T}|\Delta g|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\frac{1}{p}\iint_{Q_T}|\Delta u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant-\iint_{Q_T}w\Delta(u-g)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

用$\varepsilon g+u$代替上式的g,得

$$\frac{1}{\varepsilon}(F_1[u+\varepsilon g]-F_1[u])\geqslant\iint_{Q_T}w\Delta g\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

令$\varepsilon\to 0$,由上式得

$$\iint_{Q_T}\frac{\delta F_1[u]}{\delta u}g\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\iint_{Q_T}|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta g\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geqslant\iint_{Q_T}w\Delta g\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由g的任意性,取$g=-g$,得到上面不等式的反向不等式,所以

$$w=|\Delta u|^{p-2}\Delta u.$$

由u^h在$C(0,T;L^2(\Omega))$中强收敛且$u^h(x,0)=u_0(x)$,得知u满足初值条件. 证毕.

致谢 作者衷心感谢吉林大学数学学院刘长春教授对本文的指导!

[参考文献]

[1] Coleman B D, Duffin R J, Mizel V J. Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equations, $u_t=u_{xx}-u_{xtx}$ on a strip[J]. Arch Rat Mech Anal, 1965, 19(2): 100-116.

[2] Novick C A, Pego R L. Stable patterns in a viscous diffusion equation[J]. Trans Amer Math Soc, 1991, 324(1): 331-351.

[3] Padron V. Sobolev regularization of some nonlinear ill-posed problems[D]. Minneapolis: University of Minnesota, School of Mathematics, 1990.

[4] Barwnblatt G I, Zheltov I V P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks[J]. J Appl Math Mech, 1960, 24(5): 1 286-1 303.

[5] Ting T W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction[J]. J Math Anal Appl, 1974, 45(1): 23-31.

[6] 郭慧敏,耿堤. 类p-双调和方程 Dirichlet 问题无穷多解的存在性[J]. 华南师范大学学报:自然科学版,2009,41(1): 18-21.

[7] Lin L. Existence of three solutions for p-biharmonic equation[J]. J Nonlinear Anal Appl, 2011: 00073(1-9).

[8] 王永达. 非线性临界p-双调和抛物型方程解的存在性[J]. 贵州大学学报:自然科学版,2010,27(1):3-5.

[9] Dibenedtto E, Pierre M. On the maximum principle for pseudoparabolic equations[J]. Siam J Math Anal, 1981, 12(5): 731-751.

[10] 陈亚浙,吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京:科学出版社,1991:46.

[11] 张恭庆. 临界点理论及其应用[M]. 上海:上海科学技术出版社,1986:82.

[12] Simon J. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$[J]. Ann Math Pura Appl, 1987, 146(1): 65-96.

[责任编辑:丁 蓉]