

具有脉冲免疫接种的 SEIRS 传染病模型分析

郭中凯¹, 王文婷², 李自珍³

(1. 兰州理工大学技术工程学院, 甘肃 兰州 730050)
(2. 西北民族大学数学与计算机科学学院, 甘肃 兰州 730030)
(3. 兰州大学干旱与草地农业生态教育部重点实验室, 甘肃 兰州 730000)

[摘要] 研究具有一般 Logistic 死亡率和标准传染率的 SEIRS 传染病模型的动力学行为. 利用 Floquet 乘子理论和脉冲微分系统比较定理, 证明了无病周期解的存在性和全局渐近稳定性, 获得临界值 τ_0, θ_0 ; 并通过 Matlab 数值模拟的方法发现当 $\tau > \tau_0$ 或 $\theta < \theta_0$ 时会形成地方病.

[关键词] SEIRS 模型, 全局渐近稳定, 数值模拟, 传染病

[中图分类号] O175.13; Q141 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2013)02-0020-07

Dynamical Analysis of SEIRS Epidemic Model with Pulse Vaccination

Guo Zhongkai¹, Wang Wenting², Li Zizhen³

(1. School of Technology and Engineering, Lanzhou University of Science and Technology, Lanzhou 730050, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Northwest University for Nationalities, Lanzhou 730030, China)
(3. Key Laboratory of Arid and Grassland Agroecology of the Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The dynamical behavior of SEIRS epidemic model with generalized Logistic death and standard contact rate is investigated in this paper. Based on Floquet theory and comparison theorem of impulsive differential equation, the existence and globally asymptotical stability of infection free periodic solution are examined, then the critical value τ_0, θ_0 are obtained. Finally, numerical simulation reveals that the disease will become endemic when $\tau > \tau_0, \theta < \theta_0$.

Key words: SEIRS model, globally asymptotical stability, numerical simulation, epidemic

传染病一直是危害人类和自然动物种群生存的大敌. 对传染病发病机理、传染规律及防止策略研究的重要性日益突出. 传染病的理论研究主要是根据种群的生长特性、疾病发生和传播规律以及与之有关的社会因素, 建立反映传染病动力学的数学模型, 并通过模型动力学行为的定性、定量分析和数值模拟来揭示疾病发展流行规律, 预测其变化趋势, 最终寻求对其预防和控制的最优策略. 这种关于传染病的理论研究已经取得大量成果, 但多数都是借助于连续微分系统和时滞微分系统建立模型分析^[1-4]. 而通常情况下, 为了有效地控制传染病的发生和流行, 需要在间隔的时间点进行免疫接种, 这就要涉及脉冲微分系统. 因此近年来脉冲免疫接种模型备受人们关注. 如赵文才、孟新柱等人研究了具有脉冲接种的 SIR 模型和 SIRS 模型并获得疾病形成地方病和灭绝的充分条件^[5-7], 庞国萍和高淑京分别建立具有饱和的传染率脉冲接种的 SIRS 模型, 借助分支定理给出地方病形成的充分条件^[8,9]. 但是大多数研究都忽略了某些传染病的潜伏期, 如狂犬病、麻疹等存在潜伏期. 同时一些传染病免疫后是不能获得终生免疫的, 经过一段时间后免疫者又会成为易感者, 如手足口病. D’Onofro 研究的具有脉冲免疫接种 SEIR 模型虽然考虑到传染病的潜伏期, 但忽略了某些传染病非终生免疫性^[10]. 因此本文将种群分为易感者、潜伏者、染病者和移出者 4 类. 建立标准发生率和脉冲免疫接种的 SEIRS 传染病模型, 得到无病周期解的全局渐近稳定性的充分条件, 并通过 Matlab 数值模拟的方法说明 $R_0 > 1$ 时地方病形成.

收稿日期: 2012-09-15.
基金项目: 国家自然科学基金(30970478, 30970491)、中央高校基本科研业务费专项资金(zyz2011075).
通讯联系人: 郭中凯, 硕士, 研究方向: 数学生态学. E-mail: guozhongkai2007@sohu.com

1 模型的建立

假设种群分为易感者、潜伏者、染病者和移出者 4 类. 不考虑垂直感染, 新生均为易感者. 因病能获得免疫力, 但是移出者不能获得终生免疫, 无因病死亡, 在潜伏期内的感染者不具有传染力. 根据以上假设, 考虑脉冲免疫接种的 SEIRS 模型如下:

$$\begin{cases} S'(t) = bN - \left(d + \frac{\mu N}{K}\right) S - \frac{\beta SI}{N} + \omega R, \\ E'(t) = \frac{\beta SI}{N} - \left(d + \frac{\mu N}{K}\right) E - mE, \\ I'(t) = mE - \left(d + \frac{\mu N}{K}\right) I - \lambda I, \\ R'(t) = \lambda I - \left(d + \frac{\mu N}{K}\right) R - \omega R, \end{cases} \quad t \neq n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+), \quad (1)$$

$$\begin{cases} S(t^+) = (1-\theta)S(t), \\ E(t^+) = E(t), I(t^+) = I(t), R(t^+) = R(t), \end{cases} \quad t = n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+), \quad (2)$$

其中, $N(t)$ 、 $S(t)$ 、 $E(t)$ 、 $I(t)$ 、 $R(t)$ 分别表示 t 时刻种群总数、易感者、潜伏者、感染者、移出者的数量; b 和 d 分别为易感种群的出生率和自然死亡率; $\mu = b - d$ 表示易感种群的内在增长率; K 为环境容纳量; β 为疾病传染率; ω 为移出种群失去免疫率系数; m 和 λ 分别为从潜伏者变为感染者系数继而变为移出者的转化率系数; τ 为脉冲接种周期; θ 为免疫接种比例. 由 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$, 引入无量纲变量

$$s(t) = \frac{S(t)}{N(t)}, i(t) = \frac{I(t)}{N(t)}, e(t) = \frac{E(t)}{N(t)}, r(t) = \frac{R(t)}{N(t)}.$$

从而模型(1)、(2)无量纲化的形式为:

$$\begin{cases} s'(t) = b(1-s) - \beta si + \omega r, \\ e'(t) = \beta si - (b+m)e, \\ i'(t) = me - (b+\lambda)i, \\ r'(t) = \lambda i - (b+\omega)r, \end{cases} \quad t \neq n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+), \quad (3)$$

$$\begin{cases} s(t^+) = (1-\theta)s(t), \\ e(t^+) = e(t), i(t^+) = i(t), r(t^+) = r(t), \end{cases} \quad t = n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+). \quad (4)$$

由于 $r(t) = 1 - s(t) - i(t) - e(t)$, 因此只要研究系统(3)、(4)的等价系统:

$$\begin{cases} s'(t) = b(1-s) - \beta si + \omega(1-s-e-i), \\ e'(t) = \beta si - (b+m)e, \\ i'(t) = me - (b+\lambda)i, \end{cases} \quad t \neq n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+), \quad (5)$$

$$\begin{cases} s(t^+) = (1-\theta)s(t), \\ e(t^+) = e(t), i(t^+) = i(t), \end{cases} \quad t = n\tau \quad (n \in \mathbf{N}^+). \quad (6)$$

从生物学的观点来看, 系统(5)、(6)的可行域为:

$$D = \{(s, e, i) \in \mathbf{R}^3 \mid s \geq 0, e \geq 0, i \geq 0, s + e + i \leq 1\}.$$

2 无病周期解的稳定性

2.1 无病周期解的存在性

引理 1 脉冲微分系统

$$\begin{cases} y'(t) = \mu b - \mu y, & t \neq n\tau, \\ y(t) = (1-\theta)y, & t = n\tau, \end{cases} \quad (7)$$

存在唯一全局渐近稳定的周期解:

$$\begin{cases} y^*(t) = b - \frac{b\theta e^{-\mu(t-n\tau)}}{1 - (1-\theta)e^{-\mu\tau}}, & t \in (n\tau, (n+1)\tau], \\ y^* = \frac{b(1-\theta)(1-e^{-\mu\tau})}{1 - (1-\theta)e^{-\mu\tau}}, & t = n\tau. \end{cases}$$

证明 在区间 $(n\tau, (n+1)\tau]$ 内系统(7)的解为

$$y(t) = [y(n\tau^+) - b]e^{-\mu(t-n\tau)} + b,$$

其中 $y(n\tau^+)$ 为时刻 $t=n\tau$ 发生脉冲后的数值,结合(7)的第二个方程可以得到频闪映射:

$$y((n+1)\tau^+) = [(y(n\tau^+) - b)e^{-\mu\tau} + b](1-\theta),$$

解得此映射只有唯一不动点

$$y^* = \frac{b(1-\theta)(1-e^{-\mu\tau})}{1-(1-\theta)e^{-\mu\tau}},$$

因此系统(7)有唯一周期解

$$\begin{cases} y^*(t) = b - \frac{b\theta e^{-\mu(t-n\tau)}}{1-(1-\theta)e^{-\mu\tau}}, & t \in (n\tau, (n+1)\tau], \\ y^* = \frac{b(1-\theta)(1-e^{-\mu\tau})}{1-(1-\theta)e^{-\mu\tau}}, & t = n\tau. \end{cases}$$

下证此周期解是全局稳定的,由文献[11]知(7)解的一般形式为

$$y(t) = y_0 \left(\prod_{0 < t_k < t} (1-\theta) \right) e^{-\int_0^t \mu ds} + \int_0^t \prod_{0 < t_k < s} (1-\theta) \mu b e^{-\mu(t-s)} ds,$$

对 $y(t)$ 化简得:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 (1-\theta)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} e^{-\mu t} + e^{-\mu t} b \int_0^t \prod_{0 < t_k < s} (1-\theta) \mu e^{\mu s} ds = y_0 (1-\theta)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} e^{-\mu t} + e^{-\mu t} b \left[\int_0^\tau \prod_{0 < t_k < s} (1-\theta) \mu e^{\mu s} ds + \right. \\ &\quad \left. \int_\tau^{2\tau} \prod_{\tau < t_k < s} (1-\theta) \mu e^{\mu s} ds + \dots + \int_{\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau}^t \prod_{s < t_k < t} (1-\theta) \mu e^{\mu s} ds \right] = y_0 (1-\theta)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} e^{-\mu t} + \\ &\quad e^{-\mu t} b (e^{\mu\tau} - 1) (1-\theta)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} \frac{1 - \left(\frac{e^{\mu\tau}}{1-\theta}\right)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]}}{1 - \frac{e^{\mu\tau}}{1-\theta}} + b (1 - e^{-\mu(t - \left[\frac{t}{\tau}\right]\tau)}), \end{aligned}$$

于是

$$|y^*(t) - y(t)| = \left| y_0 (1-\theta)^{\left[\frac{t}{\tau}\right]} e^{-\mu t} - e^{-\mu t} b (e^{\mu\tau} - 1) (1-\theta)^{(1+n)} \frac{1}{1-\theta - e^{\mu\tau}} \right|, \quad n\tau \leq t < (n+1)\tau.$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,上式极限为 0. 因此系统(7)有一个全局渐近稳定的周期解 $y^*(t)$.

证毕.

定理 1 脉冲微分系统(5)、(6)存在一个无病周期解 $(s^*(t), 0, 0)$, 其中

$$\begin{cases} s^*(t) = 1 - \frac{\theta e^{-(b+\omega)(t-n\tau)}}{1-(1-\theta)e^{-(b+\omega)\tau}}, & t \in (n\tau, (n+1)\tau], \\ s^* = \frac{(1-\theta)(1-e^{-(b+\omega)\tau})}{1-(1-\theta)e^{-(b+\omega)\tau}}, & t = n\tau. \end{cases}$$

证明 在系统(5)、(6)中,令 $i(t) = e(t) = 0$. 得:

$$\begin{cases} s'(t) = (b+\omega)(1-s), & t \neq n\tau, \\ s(t) = (1-\theta)s, & t = n\tau. \end{cases} \quad (8)$$

由引理 1 知系统(8)有一个全局渐近稳定的周期解 $s^*(t)$. 因此系统(5)、(6)存在一个无病周期解 $(s^*(t), 0, 0)$.

证毕.

2.2 无病周期解的稳定性

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时系统(5)、(6)的无病周期解 $(s^*(t), 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 其中

$$R_0 = \frac{m\beta}{(b+m)(\lambda+b)\tau} \int_0^\tau s^*(t) dt.$$

证明 根据系统(5)、(6)的第一个方程得:

$$\begin{cases} s'(t) = b(1-s) - \beta si + \omega(1-s(t) - e(t) - i(t)) \leq (b+\omega)(1-s), & t \neq n\tau, \\ s(t^+) = (1-\theta)s, & t = n\tau. \end{cases} \quad (9)$$

由脉冲微分系统的比较原则和引理 1 知 $s(t) \leq s^*(t)$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时, 即对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$, $s(t) \leq s^*(t) + \varepsilon$.

现在考虑系统(5)的子系统:

$$\begin{cases} e'(t) = \beta si - (b+m)e, \\ i'(t) = me - (b+\lambda)i. \end{cases} \quad (10)$$

系统(10)有一个平衡点(0,0), 由于 $\frac{\partial e'}{\partial i} = \beta s > 0$, $\frac{\partial i'}{\partial e} = m > 0$, 故系统(10)是一个合作系统. 因此当 $t > t_1$ 时,

$$\begin{cases} e'(t) \leq \beta(s^*(t) + \varepsilon)i - (b+m)e, \\ i'(t) \leq me - (b+\lambda)i. \end{cases} \quad (11)$$

现在考虑系统

$$\begin{cases} x'(t) = \beta(s^*(t) + \varepsilon)y - (b+m)x, \\ y'(t) = mx - (b+\lambda)y, \\ x(t_1) = e(t_1), y(t_1) = i(t_1). \end{cases} \quad (12)$$

对于线性微分系统(12), 当 Floquet 矩阵的特征值满足 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ 时, $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$, $t \rightarrow \infty$.

具体计算 $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ 可得 $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$ 条件为:

$$R'_0 = \frac{m\beta}{(b+m)(\lambda+b)\tau} \int_0^\tau (s^*(t) + \varepsilon) dt < 1.$$

由 ε 的任意性知, 当 $R_0 < 1$ 时 $R'_0 < 1$, 从而 $(x(t), y(t)) \rightarrow (0, 0)$.

根据 Kamke 定理知当 $t > t_1$ 时, $e(t) \leq x(t)$, $i(t) \leq y(t)$. 于是 $R_0 < 1$ 时, $(e(t), i(t)) \rightarrow (0, 0)$, 即对任意小的正数 ε_1 , 存在 $t_2 (t_2 > t_1)$, 当 $t > t_2$ 时, $e(t) < \varepsilon_1$, $i(t) < \varepsilon_1$.

分别考虑(5)、(6)的第一个方程, 当 $t > t_2$ 得:

$$\begin{cases} s'(t) \geq (b+\omega-2\omega\varepsilon_1) - (b+\omega+\beta\varepsilon_1)s, & t \neq n\tau, \\ s(t^+) = (1-\theta)s, & t = n\tau. \end{cases}$$

根据脉冲微分系统的比较原则和引理 1 知存在 $t_3 (t_3 > t_2)$, 当 $t > t_3$ 时,

$$s(t) \geq \frac{b+\omega-2\omega\varepsilon_1}{b+\omega+\beta\varepsilon_1} - \frac{\theta e^{-(b+\omega+\beta\varepsilon_1)(t-n\tau)}}{1-(1-\theta)e^{-(b+\omega+\beta\varepsilon_1)\tau}},$$

于是当 $t \rightarrow \infty$ 时, $s(t) \geq s^*(t) - \varepsilon$, 因此 $s(t) \rightarrow s^*(t)$, $t \rightarrow \infty$. 综上分析当 $R_0 < 1$ 时, $(s(t), e(t), i(t)) \rightarrow (s^*(t), 0, 0)$, $t \rightarrow \infty$.

证毕.

3 脉冲免疫接种和连续免疫接种的比较

文献[12]研究了具有 logistic 增长率的连续免疫接种和潜伏者有密度依赖的 SEIRS 流行病模型, 当 $a = \alpha = 0$, $\varepsilon(i) = m$ 得到模型为:

$$\begin{cases} s'(t) = b(1-s) - \beta si + \omega(1-s-e-i) - \theta s, \\ e'(t) = \beta si - (b+m)e, \\ i'(t) = me - (b+\lambda)i. \end{cases} \quad (13)$$

定理 3 如果系统(13)满足 $\beta \leq (b+\lambda)$, $R_1 < 1$. 无病平衡点 $(s(t), 0, 0) = \left(\frac{b+\omega}{b+\omega+\theta}, 0, 0\right)$ 是全局渐近稳定的, 其中

$$R_1 = \frac{\beta m}{(b+m)(b+\lambda)} \frac{b+\omega}{b+\omega+\theta}.$$

证明 对系统(13)在 $(s(t), 0, 0)$ 处线性化, 得到 Jacob 矩阵为:

$$\begin{pmatrix} -(b+\omega+\theta) & -\omega & -\omega \frac{\beta(b+\omega)}{b+\omega+\theta} \\ 0 & -b-m & \frac{b+\omega}{b+\omega+\theta} \\ 0 & m & -b-\lambda \end{pmatrix},$$

经分析得到当 $R_1 = \frac{\beta m}{(b+m)(b+\lambda)} \frac{b+\omega}{b+\omega+\theta} < 1$ 时, Jacob 矩阵的特征值全小于零. 因此无病平衡点 $(s(t), 0, 0) =$

$\left(\frac{b+\omega}{b+\omega+\theta}, 0, 0\right)$ 是局部渐近稳定的.

下证全局渐近稳定.

构造 Liapunov 函数 $V(t) = e(t) + i(t) \geq 0$.

对 $V(t)$ 沿系统(13)求导得:

$$V'(t) = -be + \beta si - (b+\lambda)i \leq -be - (b+\lambda)i(1-s).$$

容易看出, 如果 $e(t) > 0$, 或者 $i(t) > 0$, 那么 $V'(t) < 0$, 若在某个时刻 t_0 , $e(t_0) = i(t_0) = 0$, 由系统(13)知当 $t > t_0$ 时, $i(t) = e(t) = 0$. 从而可知无病平衡 $(s(t), 0, 0) = \left(\frac{b+\omega}{b+\omega+\theta}, 0, 0\right)$ 是全局渐近稳定的.

定理 4 系统(5)、(6)和系统(13)无病周期解全局稳定时所需要最小免疫量是相等的.

证明 系统(5)、(6)在 $(0, \tau]$ 上需要的免疫量为

$$V_p = \theta s(\tau) N,$$

由于

$$V_p = \theta \frac{1 - e^{-(b+\omega)\tau}}{1 - (1-\theta)e^{-(b+\omega)\tau}} N$$

是关于 θ 的增函数, $R_0 = 1$ 时

$$\theta_0 = \frac{1 - e^{-(b+\omega)\tau}}{1 - e^{-(b+\omega)\tau} - (b+\omega)\tau \left(1 - \frac{1}{R}\right) e^{-(b+\omega)\tau}}.$$

同时易知 R_0 是 θ 的递减函数, 所以当 $\theta > \theta_0$ 时 $R_0 < 1$. 当取临界值 θ_0 时, 免疫量 V_p 最小, 所以最小的免疫量为

$$\hat{V}_p = (b+\omega)\tau \left(1 - \frac{1}{R}\right) N,$$

其中 $R = \frac{\beta m}{(b+m)(b+\lambda)}$.

系统(13)在 $[0, \tau]$ 上需要的免疫量为

$$V_c = \theta s(\tau) N \tau = \frac{(b+\omega)\theta}{b+\omega+\theta} N \tau.$$

V_c 是关于 θ 的增函数, 又因为 R_1 是关于 θ 的减函数, 存在 θ^* 使得 $R_1 = 1$, 当 $\theta > \theta^*$ 时 $R_1 < 1$. 当取临界值 θ^* 时, 免疫量 V_c 最小, 所以最小的免疫量为

$$\hat{V}_c = (b+\omega)\tau \left(1 - \frac{1}{R}\right) N.$$

由此可知, 在连续免疫接种和脉冲免疫接种的情况下使无病平衡点即无病周期解全局稳定时所需要的最小免疫量是相等的.

4 数值模拟与结论

4.1 数值模拟

通过计算可知 R_0 是关于 τ 的增函数, 关于 θ 的减函数. 因此可以通过计算 $R_0 = 1$, 获得临界值 θ_0, τ_0 .

为了验证定理 2 的结论,并分析 $R_0 > 1$ 时系统(5)、(6)的动力学情况,我们以 τ 为变量固定其他参数,以及以 θ 为变量固定其他参数,借助数值模拟考察 τ, θ 对传染病消失与否的影响.

(1)取 $\beta=4, \lambda=0.4, \omega=0.6, \theta=0.5, b=0.5, m=2$. 由 $R_0=1$ 得到临界值 $\tau \approx 0.2338$. 当 $\tau < \tau_0$ 时 $R_0 < 1$, 当 $\tau > \tau_0$ 时 $R_0 > 1$. 见图 1、图 2.

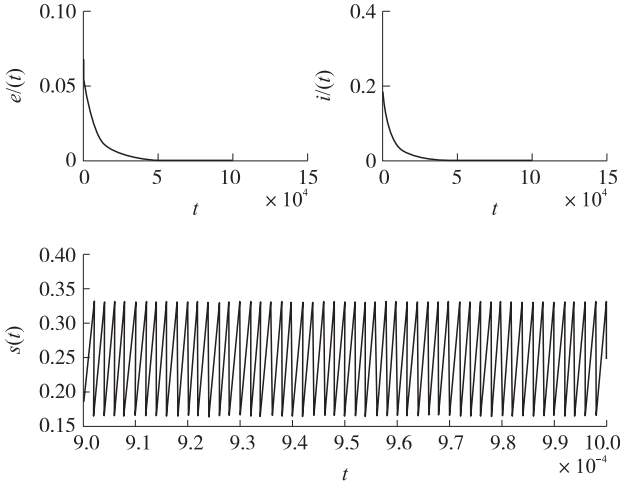


图 1 $\tau=0.2$ 时 $s(t), e(t), i(t)$ 时间序列图

Fig. 1 $s(t), e(t), i(t)$ time series when $\tau=0.2$

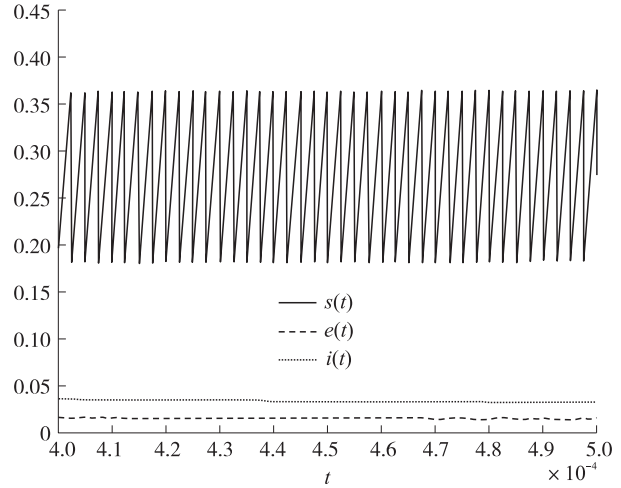


图 2 $\tau=0.25$ 时 $s(t), e(t), i(t)$ 时间序列图

Fig. 2 $s(t), e(t), i(t)$ time series when $\tau=0.25$

(2)取 $\beta=4, \lambda=0.4, \omega=0.6, \tau=0.2, b=0.5, m=2$. 由 $R_0=1$ 得到临界值 $\theta_0 \approx 0.4424$. 当 $\theta < \theta_0$ 时 $R_0 > 1$, 当 $\theta > \theta_0$ 时 $R_0 < 1$. 见图 3、4.

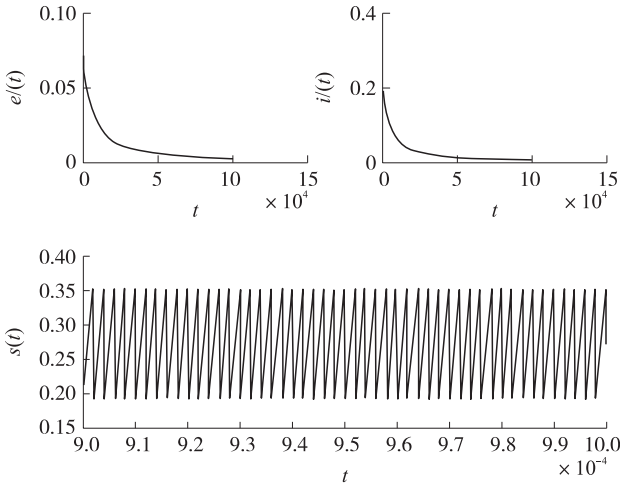


图 3 $\theta=0.45$ 时 $s(t), e(t), i(t)$ 时间序列图

Fig. 3 $s(t), e(t), i(t)$ time series when $\theta=0.45$

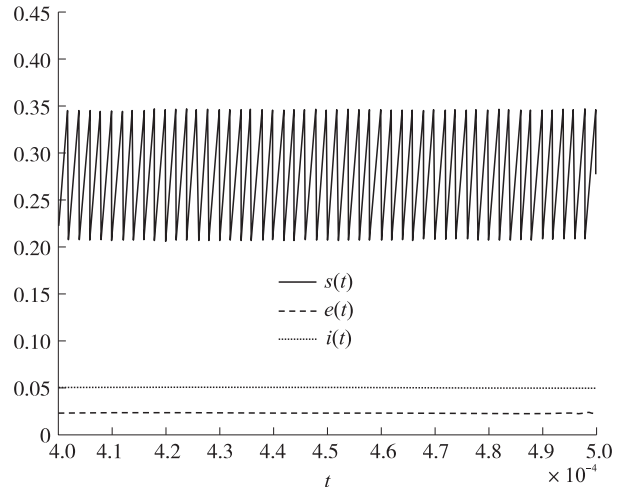


图 4 $\theta=0.4$ 时 $s(t), e(t), i(t)$ 时间序列图

Fig. 4 $s(t), e(t), i(t)$ time series when $\theta=0.4$

4.2 结论

本文研究具有一般 logistic 死亡率和标准发生率的 SEIRS 传染病模型,由以上的讨论知道系统(5)、(6)存在一个无病周期解 $(s^*(t), 0, 0)$, 并通过定理 2 证明当 $R_0 < 1$ 时这个无病周期解是全局渐近稳定的.

在对连续微分系统和脉冲微分系统进行比较时,推导出在连续微分系统和脉冲微分系统下,使无病平衡点和无病周期解全局渐近稳定所需要的最小免疫量在 1 个周期内是相同的. 因此可以根据实际的情况选择进行脉冲接种还是连续接种. 例如在疫苗充足、医疗人员充足的情况下可以选择脉冲接种,如果疫苗不足或者医疗人员短缺可以选择连续接种,从而达到充分利用资源消灭传染病的目的.

最后获得临界值 θ_0, τ_0 . 由于系统的复杂性很难通过计算讨论易感者、潜伏者、染病者共存问题. 因此在 $R_0 > 1$ 时通过数值模拟的方法发现会形成地方病. 通过计算和数值模拟可知在实际生活中对传染病进行控制时可以通过缩短脉冲免疫接种周期和加大免疫接种率等人为手段防止传染病成为地方病. 由于临界值能够准确地计算,因此在防治工作中可以最大程度地节约社会成本.

[参考文献]

- [1] Venturio E. The influence of disease on Lotka-Volterra system[J]. Rlockmount J Math,1994,24(1):389-402.
- [2] Chattopadhyay J,Arino O. A predator-prey model with disease in the prey[J]. Nonlinear Anal,1999,36(2):749-766.
- [3] Xiao Y,Chen L. Analysis of a three species eco-epidemiological model[J]. Math Appl,2001,258(2):733-754.
- [4] 郭中凯,李文龙,程雷虎,等. 食者有病的生态流行病模型的定性分析[J]. 兰州大学学报:自然科学版,2009,45(3):117-121.
- [5] 赵文才,孟新柱. 一类具有 Logistic 死亡率的脉冲免疫接种 SIRS 传染病模型[J]. 吉林大学学报:理学版,2009,47(6):1165-1171.
- [6] Meng X. Global dynamical behaviors for an SIR epidemic model with time delay and pulse vaccination[J]. Taiwanese Journal of Mathematics,2008,12(5):1107-1122.
- [7] Meng X. The dynamics of a new SIR epidemic model concerning pulse vaccination strategy[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,197(2):582-597.
- [8] 庞国萍,陶凤梅,陈兰荪,等. 具有饱和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型分析[J]. 大连理工大学学报,2007,47(3):460-464.
- [9] 高淑京,滕志东. 一类具有饱和传染力和常数输入的 SRIS 脉冲接种模型研究[J]. 生物数学学报,2008,23(2):209-217.
- [10] D'onoio A. Stability propertise of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. Mathematical Biosciences,2002,179(1):57-72.
- [11] 傅希林. 脉冲微分系统引论[M]. 北京:科学出版社,2005.
- [12] 石瑞青,原存德. 按 Logistic 增长且具有连续预防接种和潜伏期密度依赖的 SEIRS 流行病模型[J]. 山西师范大学学报:自然科学版,2005,19(2):1-5.

[责任编辑:丁 蓉]