常利力下双复合 Poisson 风险过程的生存概率

魏广华[1],高启兵[2,3],刘国祥[2]

(1. 金陵科技学院基础部,江苏 南京 211169)
(2. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)
(3. 东南大学数学系,江苏 南京 210096)

[摘要]　本文考虑了常利力下双复合 Poisson 风险过程,分别获得了生存概率和有限时间内生存概率的积分微分方程. 当保费和索赔都服从指数分布时,得到了生存概率的微分方程.

[关键词]　双复合泊松风险模型,跳扩散过程,生存概率,积分微分方程

[中图分类号]O211.9　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2013)02-0027-04

Survival Probability in the Double Compound Poisson Risk Process Under Constant Interest Force

Wei Guanghua[1],Gao Qibing[2,3],Liu Guoxiang[2]

(1. Department of Basic Courses,Jinling Institute of Technology,Nanjing 211169,China)
(2. School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(3. Department of Mathematics,Southeast University,Nanjing 210096,China)

Abstract: In this paper,we consider the double compound Poisson risk process under constant interest force. For infinite time and finite time survival probabilities,we obtain the respective integro-differential equation. When the premiums and claims are exponentially distributed,some differential equations are derived for infinite time survival probability.

Key words: double compound Poisson risk process,jump-diffusion,survival probability,integro-differential equation

保险风险理论是当前精算界和数学界及保险业研究的热门课题,主要处理保险事务中的随机风险模型,并研究调节系数和生存概率等问题. 近几年来,大量的文献讨论了带利力的风险模型破产概率的问题[1-9],在文献[4]中 Cai 研究了常利力下带干扰的复合 Poisson 过程,得到其无限时破产概率的积分微分方程,而在文献[6]中 Fang 和 Luo 讨论不带利力及干扰项的双复合 Poisson 风险模型,给出了其生存概率和有限时间内生存概率的积分微分方程. 本文推广上述风险模型,考虑常利力下双复合 Poisson 风险模型. 记

$$U_t=\sum_{i=1}^{M(t)}X(i)-\sum_{j=1}^{N(t)}Y(j)=W(t)-H(t),\quad t\geqslant 0.$$

此处:

(1) $\{X,X(i),i=1,2,\cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列,X 表示保费额,其分布为 G;

(2) $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 α 的 Poisson 过程,表示到时刻 t 为止所收到的保单份数;

(3) $\{Y,Y(j),j=1,2,\cdots\}$ 是一独立同分布的非负随机变量序列,Y 表示索赔额,其分布为 F;

(4) $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 β 的 Poisson 过程,表示到时刻 t 为止索赔发生的次数;

(5) $\{X(i),i=1,2,\cdots\}$,$\{Y(j),j=1,2,\cdots\}$,$\{M(t),t\geqslant 0\}$,$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是相互独立的.

记

收稿日期:2012-10-05.

基金项目:国家自然科学基金(11271193、11201199、10671032、10871001)、江苏高校自然科学研究项目(11KJB110005)、东南大学博士后基金(1107010100).

通讯联系人:魏广华,讲师,研究方向:风险理论. E-mail:wgh@jit.edu.cn

$$S_t=u+U_t \quad t\geqslant 0, S_0=u. \tag{1}$$

设 T 表示模型(1)的破产时刻,$T=\inf(t:S_t<0)$ 且约定 $\inf\phi=\infty$;$\Phi(u)$ 表示初始资本为 u 模型(1)的最终破产概率,即 $\Phi(u)=P\{T<\infty \mid S_0=u\}=P\{S_t<0$ 对某一 $t\geqslant 0 \mid S_0=u\}$;$\Psi(u)$ 表示初始资本为 u 模型(1)的生存概率,因此 $\Psi(u)=1-\Phi(u)$.

常利力下双复合 Poisson 风险过程为

$$X(t)=\mathrm{e}^{\delta t}\left(u+\int_0^t \mathrm{e}^{-\delta s}\mathrm{d}U_s\right), \quad t\geqslant 0, X_0=u, \tag{2}$$

其中 δ 表示常利力且 $\delta\geqslant 0$. 设 T_δ 表示风险模型(2)的破产时刻,$T_\delta=\inf(t:X(t)<0)$ 且约定 $\inf\phi=\infty$;$\varphi(u)$ 表示初始资本为 u 风险模型(2)的最终破产概率,即

$$\varphi(u)=P\{T_\delta<\infty \mid X_0=u\}=P\{X_t<0 \text{ 对某一 } t\geqslant 0 \mid X_0=u\}.$$

$\psi(u)$ 表示初始资本为 u 模型(2)的生存概率,因此 $\psi(u)=1-\varphi(u)$. 类似地,定义 $\varphi(u,t)$ 为模型(2)有限时间内破产概率,即 $\varphi(u,t)=\{T_\delta<t \mid X_0=u\}$,则有限时间内生存概率为

$$\psi(u,t)=1-\varphi(u,t).$$

本文安排如下:第1节相关知识简要回顾;第2节借助微分知识得到 $\psi(u)$ 和 $\psi(u,t)$ 的积分微分方程;第3节当保费和索赔服从指数分布时,给出 $\psi(u)$ 符合的微分方程.

1　简要回顾

首先,考虑到保险公司的安全性,假设

$$E(U_t)=E(M(t))E(X(t))-E(N(t))E(Y(t))=(\alpha E(X)-\beta E(Y))t>0.$$

引理1　$\{U_t,t\geqslant 0\}$ 是一平稳独立增量过程.

引理2　$\lim\limits_{t\to\infty}S_t=\infty$,　$a.s.$.

证明　很明显,当 $t\to\infty$,$M_t\to\infty$,$N_t\to\infty$. 根据强大数定律(SLLN)和 Paul[7],有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_t}{t}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{u}{t}+\frac{\sum_{i=1}^{M(t)}X(i)}{t}-\frac{\sum_{j=1}^{N(t)}Y(j)}{t}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{M(t)}X(i)}{M(t)}\frac{M(t)}{t}\right\}-$$
$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{N(t)}Y(j)}{N(t)}\frac{N(t)}{t}\right\}=\alpha E(X)-\beta E(Y)>0 \quad a.s..$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}S_t=\infty, \quad a.s..$$

引理3　$\lim\limits_{u\to\infty}\Psi(u)=1$,　$a.s.$.　(3)

证明　根据引理2知

$$\lim_{t\to\infty}S_t=\infty, \quad a.s..$$

因此,当 t 充分大时,有 $U_t>0$,即存在 $T>0$,当 $t>T$ 时,有 $U_t>0$ 成立. 因为在时刻 T 之前只有有限次索赔发生,知 $\inf\limits_{t<T}U_t$ 是有下界的,从而 $\inf\limits_{t\geqslant 0}U_t>-\infty$,$a.s.$. 因此,当 $u\to\infty$ 时,有 $S_t\to\infty$,故式(3)成立.

2　生存概率的积分微分方程

定理1　假设 $\psi(u)$ 是一次连续可微的,则任何 $u\geqslant 0$,$\psi(u)$ 符合下面积分微分方程:

$$(\alpha+\beta)\psi(u)-u\delta\psi'(u)=\alpha\int_0^\infty \psi(u+x)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F(y). \tag{4}$$

边界条件为:

$$\begin{cases}\psi(+\infty)=1,\\ \psi(0)=0,\\ \int_0^\infty \psi(x)\mathrm{d}G(x)=0.\end{cases} \tag{5}$$

证明　令

$$h(t)=u\mathrm{e}^{\delta t}-u. \tag{6}$$

在充分小的时间段$(0,t]$内,考虑式(2)定义的风险过程 $X(t)$. 既然 $M(t)$ 和 $N(t)$ 都是 Poisson 过程,则在$(0,t]$有以下 4 种可能情况:

(1)$M(t)$ 和 $N(t)$ 都没跳跃,其发生的概率为$(1-\alpha t)(1-\beta t)+o(t)$.

(2)$M(t)$ 有一个跳跃且 $N(t)$ 没有跳跃,其发生的概率为 $\alpha t(1-\beta t)+o(t)$.

(3)$M(t)$ 没有跳跃且 $N(t)$ 有一个跳跃,其发生的概率为$(1-\alpha t)\beta t+o(t)$.

(4)$M(t)$(或者 $N(t)$)至少有两跳或者 $M(t)$ 和 $N(t)$ 同时有跳跃,其发生的概率为 $o(t)$.

因此考虑到这 4 种情况并注意到在情况(3)中,当 $y>u+h(t)$ 时,$\psi(u+h(t)-y)=0$,从而有

$$\psi(u)=(1-\alpha t)(1-\beta t)\psi[u+h(t)]+\alpha t(1-\beta t)\int_0^\infty \psi[u+h(t)+x]\mathrm{d}G(x)+$$
$$\beta t(1-\alpha t)\int_0^{u+h(t)}\psi[u+h(t)-y]\mathrm{d}F(y)+o(t).$$

等价地

$$(\alpha+\beta)t\psi[u+h(t)]=\psi[u+h(t)]-\psi(u)+\alpha t\int_0^\infty \psi[u+h(t)+x]\mathrm{d}G(x)+\beta t\int_0^{u+h(t)}\psi[u+h(t)-y]\mathrm{d}F(y)+o(t). \tag{7}$$

在式(7)两边同时除以 t,并令 $t\to 0$ 得

$$(\alpha+\beta)\psi(u)-\lim_{t\to 0}\left[\frac{\psi(u\mathrm{e}^{\delta t})-\psi(u)}{t}\right]=\alpha\int_0^\infty \psi(u+x)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F(y).$$

等价地有

$$(\alpha+\beta)\psi(u)-\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\psi[u(1+\delta t)]-\psi(u)}{u\delta t}\right\}u\delta=\alpha\int_0^\infty \psi(u+x)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^u \psi(u-y)\mathrm{d}F(y).$$ 由此可得式(4).

因为 $\psi(u)\geqslant\Psi(u)$ 和引理 3,则 $\psi(+\infty)=1$;显然 $\psi(0)=0$;在式(4)中,让 $u\to 0$ 得最后一边界条件.

定理 2 假设 $\psi(u,t)$ 是对 u 和 t 连续可微的,则任何 $u\geqslant 0$,$\psi(u,t)$ 符合下面积分偏微分方程:

$$(\alpha+\beta)\psi(u,t)-u\delta\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}=\alpha\int_0^\infty \psi(u+x,t)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^u \psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y). \tag{8}$$

边界条件为:

$$\begin{cases}\psi(+\infty,t)=1,\\ \psi(u,\infty)=\psi(u).\end{cases}$$

证明 在充分小的时间段$(0,\Delta]$内,考虑式(2)定义的风险过程 $X(t)$. 既然 $M(t)$ 和 $N(t)$ 都是 Poisson 过程,则在$(0,\Delta]$有以下 4 种可能情况:

(1)$M(t)$ 和 $N(t)$ 都没跳跃,其发生的概率为$(1-\alpha\Delta)(1-\beta\Delta)+o(\Delta)$.

(2)$M(t)$ 有一个跳跃且 $N(t)$ 没有跳跃,其发生的概率为 $\alpha\Delta(1-\beta\Delta)+o(\Delta)$.

(3)$M(t)$ 没有跳跃且 $N(t)$ 有一个跳跃,其发生的概率为$(1-\alpha\Delta)\beta\Delta+o(\Delta)$.

(4)$M(t)$(或者 $N(t)$)至少有两跳或者 $M(t)$ 和 $N(t)$ 同时有跳跃,其发生的概率为 $o(\Delta)$.

因此考虑到这 4 种情况并注意到在情况(3)中,当 $y>u+h(\Delta)$ 时,$\psi(u+h(\Delta)-y,t-\Delta)=0$,从而有

$$\psi(u,t)=(1-\alpha\Delta)(1-\beta\Delta)\psi[u+h(\Delta),t-\Delta]+\alpha\Delta(1-\beta\Delta)\int_0^\infty \psi[u+h(\Delta)+x,t-\Delta]\mathrm{d}G(x)+$$
$$\beta\Delta(1-\alpha\Delta)\int_0^{u+h(\Delta)}\psi[u+h(\Delta)-y,t-\Delta]\mathrm{d}F(y)+o(\Delta).$$

等价地

$$(\alpha+\beta)\Delta\psi[u+h(\Delta),t-\Delta]+\psi(u,t)-\psi[u+h(\Delta),t-\Delta]=\alpha\Delta\int_0^\infty \psi[u+h(\Delta)+x,t-\Delta]\mathrm{d}G(x)+$$
$$\beta\Delta\int_0^{u+h(\Delta)}\psi[u+h(\Delta)-y,t-\Delta]\mathrm{d}F(y)+o(\Delta). \tag{9}$$

式(9)两边同时除以 Δ,并令 $\Delta\to 0$,则有

$$(\alpha+\beta)\psi(u,t)+\lim_{\Delta\to 0}\left[\frac{\psi(u,t)-\psi(u\mathrm{e}^{\delta\Delta},t-\Delta)}{\Delta}\right]=\alpha\int_0^\infty \psi(u+x,t)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^u \psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y).$$

等价地有

$$(\alpha+\beta)\psi(u,t)+\lim_{\Delta\to 0}\left[\frac{\psi(u,t)-\psi(ue^{\delta\Delta},t)+\psi(ue^{\delta\Delta},t)-\psi(ue^{\delta\Delta},t-\Delta)}{\Delta}\right]=$$
$$\alpha\int_0^{\infty}\psi(u+x,t)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^{u}\psi(u-y,t)\mathrm{d}F(y).$$

即

$$(\alpha+\beta)\psi(u,t)-\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{\psi[u(1+\delta\Delta),t]-\psi(u,t)}{u\delta\Delta}\right\}u\delta+\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{\psi(ue^{\delta\Delta},t)-\psi(ue^{\delta\Delta},t-\Delta)}{\Delta}\right\}=$$
$$\alpha\int_0^{\infty}\psi(u+x,t)\mathrm{d}G(x)+\beta\int_0^{u}\psi(u-y)\mathrm{d}F(y).$$

由此可得式(8).

注　由以上证明知$\left.\frac{\partial\psi(u,t)}{\partial t}\right|_{t=\infty}=0$,当 $t\to\infty$ 时,则式(8)即为式(4).

3　保费和索赔都服从指数情形

推论1　在定理1的条件下,设 G 的密度函数为:$f(x)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$,$x>0$,$\lambda_1>0$,$F$ 的密度函数为:$f(y)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$,$y>0$,$\lambda_2>0$,对于任何 $u\geqslant 0$,则 $\psi(u)$ 符合以下微分方程:

$$(\beta\lambda_1-\alpha\lambda_2-\delta\lambda_1+\delta\lambda_2-u\delta\lambda_1\lambda_2)\psi'(u)+[2\delta-(\alpha+\beta)-u\delta(\lambda_1-\lambda_2)]\psi''(u)+u\delta\psi'''(u)=0. \tag{10}$$

边界条件为:

$$\begin{cases}\psi(+\infty)=1,\\ \psi(0)=0,\\ \int_0^{\infty}\psi(x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x=0.\end{cases} \tag{11}$$

证明　当 F 和 G 是指数分布时,(4)可化为:

$$(\alpha+\beta)\psi(u)-u\delta\psi'(u)=\alpha\int_0^{\infty}\psi(u+x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x+\beta\int_0^{u}\psi(u-y)\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\mathrm{d}y. \tag{12}$$

在式(12)中,令 $x_1=u+x$,$y_1=u-y$,有

$$(\alpha+\beta)\psi(u)-u\delta\psi'(u)=\alpha\int_u^{\infty}\psi(x_1)\lambda_1 e^{-\lambda_1(x_1-u)}\mathrm{d}x_1+\beta\int_0^{u}\psi(y_1)\lambda_2 e^{-\lambda_2(u-y_1)}\mathrm{d}y_1. \tag{13}$$

在式(13)两边同时对 u 求导,有

$$(\alpha+\beta)\psi'(u)-\delta\psi'(u)-u\delta\psi''(u)+\alpha\lambda_1\psi(u)-\beta\lambda_2\psi(u)=$$
$$\lambda_1\alpha\int_0^{\infty}\psi(u+x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x-\lambda_2\beta\int_0^{u}\psi(u-y)\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\mathrm{d}y. \tag{14}$$

在式(14)两边同时再对 u 求导,有

$$(\alpha+\beta)\psi''(u)-2\delta\psi''(u)-u\delta\psi'''(u)+\alpha\lambda_1\psi'(u)-\beta\lambda_2\psi'(u)+\lambda_1^2\alpha\psi(u)+\lambda_2^2\beta\psi(u)=$$
$$\lambda_1^2\alpha\int_0^{\infty}\psi(u+x)\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x+\lambda_2^2\beta\int_0^{u}\psi(u-y)\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\mathrm{d}y. \tag{15}$$

由(12),(14)和(15),有

$$\lambda_1\lambda_2(\alpha+\beta)\psi(u)-\lambda_1\lambda_2 u\delta\psi'(u)+(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha+\beta)\psi'(u)-(\lambda_1-\lambda_2)\delta\psi'(u)-(\lambda_1-\lambda_2)u\delta\psi''(u)+$$
$$\alpha\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\psi(u)-\beta\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\psi(u)-(\alpha+\beta)\psi''(u)+2\delta\psi''(u)+u\delta\psi'''(u)-$$
$$\alpha\lambda_1\psi'(u)+\beta\lambda_2\psi'(u)-\lambda_1^2\alpha\psi(u)-\lambda_2^2\beta\psi(u)=0.$$

由此可得式(10)成立,且由式(5)可得式(11).

(下转第38页)

[参考文献]

[1] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1997:373-451.
[2] 邓乃扬. 无约束最优化计算方法[M]. 北京:科学出版社,1982:206-280.
[3] 袁亚湘. 非线性规划数值方法[M]. 上海:上海科技出版社,1993:200-223.
[4] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京:清华大学出版社,2000:334-383.
[5] 席少霖. 非线性最优化方法[M]. 北京:高等教育出版社,1992:187-246.
[6] Avriel M. Nonlinear Programming[M]. New Jersey:Prentice-Hall,Inc,1976:150-186.
[7] 颜世建,葛福生. 非线性 l_1 问题的一个算法[J]. 南京师大学报:自然科学版,1999,22(2):1-7.
[8] 张艺. 框式约束凸二次规划问题的内点算法[J]. 高等学校计算数学学报,2002(2):163-168.
[9] 马圣容. 框式约束凸二次规划问题的内点算法[J]. 南京晓庄学院学报:自然科学版,2011,27(3):19-22.
[10] Chris Charalambous. On conditions for optimality of the nonlinear l_1 problem[J]. Math Programming,1997,17:123-135.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第30页)

[参考文献]

[1] Asmussen S. Ruin Probabilities[M]. Singapore:World Scientific,2000.
[2] Cai J,Dickson D C M. On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2002,30(3):389-404.
[3] Palsen J,Gjessing H K. Ruin theory with stochastic economic environment[J]. Advances in Applied Probability,1997,29(4):965-985.
[4] Cai J,Yang H L. Ruin in the perturbed compound poisson risk process under interest force[J]. Advances in Applied Probability,2005,37(3):819-835.
[5] Sundt B,Teugels J L. Ruin estimates under interest force[J]. Insurance:Mathematics and Economics,1995,16(1):7-22.
[6] 方世祖,罗建华. 双复合 Poisson 风险模型[J]. 纯粹数学与应用数学,2006,22(2):271-278.
[7] Paul E,Claudia K,Thomas M. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance[M]. New York:Springer-Verlag,1997.
[8] 魏广华,高启兵. 常利力下双复合泊松风险模型破产概率的上界[J]. 南京师大学报:自然科学版,2009,32(1):30-34.
[9] 魏广华,高启兵,王晓谦. 常利力下带干扰的双复合 Poisson 风险过程的生存概率[J]. 应用概率统计,2012,28(1):31-42.

[责任编辑:丁　蓉]