弱缠绕模范畴的可分函子

巴哈尔古丽,陈全国

(伊犁师范学院数学与统计学院,新疆 伊宁 835000)

[摘要] 设$(A,C)_\psi$为一个弱缠绕结构. 利用 Rafael 定理,讨论了从弱缠绕模范畴 $U_A^C(\psi)$到右 A-模范畴 M_A 忘却函子 F 的可分性,证明了忘却函子 F 是可分的当且仅当存在一个正规化积分 $\theta:C\otimes C\to A$.

[关键词] 弱缠绕结构,弱缠绕模,可分函子

[中图分类号]O153.3 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2013)03-0006-03

Separable Functors for the Category of Weak Entwined Modules

Bahaerguli,Chen Quanguo

(School of Mathematics and Statistics,Yili Normal University,Yining 835000,China)

Abstract:Let$(A,C)_\psi$ be a weak entwined structure. Using Rafael's theorem,the separability of the forgetful functor F from the category $U_A^C(\psi)$ of weak entwined modules to the category M_A of right A-modules is discussed,and it is shown that the forgetful functor F is separable if and only if there exists a normalized integral $\theta:C\otimes C\to A$.

Key words:weak entwined structure,weak entwined module,separable functor

1 预言与预备知识

可分函子的概念最初由 Năstăsescu 等[1]引入,它在分次环上的一些应用也被研究. 近年来,可分函子在诸如余代数、分次环同态等框架内被考虑. 可分函子反映了范畴中态射的可分性,较好地刻画范畴中对象的半单性,研究函子的可分性具有一定意义. Caenepeel 等[2]通过讨论 Doi-Hopf 模范畴到某代数上模范畴忘却函子的可分性,引入了 Doi-Hopf 数据的积分概念,并揭示出 Doi-Hopf 数据的积分存在性与忘却函子可分性之间的关系,此结果被推广到弱 Hopf 代数[3]及 Hopf 群余代数[4]情形中.

为了发展余代数主丛理论,Brzeziński 和 Majid 引入了缠绕结构[5]及相应的缠绕模[6]. 更一般地,弱缠绕结构及相应的缠绕模被 Caenepeel 和 Groot 研究[7]. 本论文的主要目的是讨论弱缠绕模范畴到某代数上模范畴忘却函子的可分性,诱导出弱缠绕结构的积分概念,并讨论弱缠绕结构的积分存在性与忘却函子可分性之间的关系.

本文假设 k 为一个域. 所有代数、余代数的张量积均在 k 上. 所有的映射均是 k-线性映射.

首先,我们回顾一下弱缠绕结构的概念. 设 C 为余代数,A 为代数,一个线性映射

$$\psi:C\otimes A\to A\otimes C$$

满足如下条件:对于任意的 $c\in C,a\in A$,

$$\psi\circ(id_C\otimes m)=(m\otimes id_C)\circ(id_A\otimes\psi)\circ(\psi\otimes id_A),$$

$$\psi(c\otimes 1)=(id_A\otimes\varepsilon)\circ\psi(c_{(1)}\otimes 1)\otimes c_{(2)},$$

$$(id_A\otimes\Delta)\circ\psi=(\psi\otimes id_C)\circ(id_C\otimes\psi)\circ(\Delta\otimes id_A),$$

$$(id_A\otimes\in)\circ\psi(c\otimes a)=(id_A\otimes\varepsilon)\psi(c\otimes 1)a,$$

称三元组(A,C,ψ)为一个弱缠绕结构,记作$(A,C)_\psi$. 称 ψ 为弱缠绕映射. 对于任意 $c\in C,a\in A$,采用符号

收稿日期:2012-09-07.

基金项目:新疆维吾尔自治区普通高等学校重点学科经费资助(2012ZDXK03).

通讯联系人:陈全国,博士,副教授,研究方向:Hopf 代数. E-mail:cqg211@163.com

$\psi(c\otimes a)=a_{\psi}\otimes c^{\psi}$.

给定一个弱缠绕结构$(A,C)_{\psi}$,我们可以构造一个范畴 $U_A^C(\psi)$,范畴 $U_A^C(\psi)$中的对象是右 C-余模 M,同时为右 A-模,满足如下兼容条件

$$\rho^M(m\cdot a)=m_{(0)}\cdot a_{\psi}\otimes m_{(1)}^{\psi}.$$

对所有 $m\in M$ 和 $a\in A$,我们采用记号 $\rho^M(m)=m_{(0)}\otimes m_{(1)}$.

在文献[7]中,Caenepeel 和 Groot 证明了忘却函子 $F:U_A^C(\psi)\to M_A$ 具有右伴随

$$G:M_A\to U_A^C(\psi),\quad N\mapsto G(N)=\underline{N\otimes C}=<n1_{A\psi}\otimes c^{\psi}\mid n\in N,c\in C>.$$

伴随函子对(F,G)的单位 $\eta:\iota\to GF$(ι 为恒等函子)定义为 $\eta^N(n)=n_{(0)}1_{A\psi}\otimes n_{(1)}^{\psi}$,对于 $N\in U_A^C(\psi)$.

2 主要结论

定义 1 设$(A,C)_{\psi}$为一个弱缠绕结构. 称一个线性映射

$$\theta:C\otimes C\to A$$

为一个正规化积分,如果 θ 满足下列条件:

(1)对任意 $c,d\in C$,

$$c_{(2)}\otimes\theta(d\otimes c_{(1)})=d_{(1)}^{\psi}\otimes\theta(d_{(2)}\otimes c)_{\psi},\tag{1}$$

(2)对任意 $b\in C$,

$$\theta(b_{(1)}\otimes b_{(2)})=1_{\psi}\varepsilon(b^{\psi}),\tag{2}$$

(3)对任意 $a\in A,b,d\in C$,

$$a_{\psi\Psi}\theta(d^{\Psi}\otimes b^{\psi})=\theta(d\otimes b)a.\tag{3}$$

定理 1 给定一个弱缠绕结构$(A,C)_{\psi}$,则下列命题等价:

(1)忘却函子 F 是可分的;

(2)存在一个正规化积分 $\theta:C\otimes C\to A$.

证明 (2)⇒(1). 假设存在一个正规化积分 $\theta:C\otimes C\to A$. 首先构造自然变换 $\nu:GF\to 1_{U_A^C(\psi)}$,对于弱缠绕模 M,考虑线性映射

$$v^M:\underline{M\otimes C}\to M,v^M(m1_{\psi}\otimes c^{\psi})=m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c).$$

可以验证 v^M 是 A-线性,事实上,对于任意 $m\in M,c\in C$ 和 $a\in A$,计算可得

$$v^M((m1_{\psi}\otimes c^{\psi})a)=v^M(ma_{\psi}1_{\psi'}\otimes c^{\psi\psi'})=(ma_{\psi})_{(0)}1_{\psi'\Psi}\theta((ma_{\psi})_{(1)}^{\Psi}\otimes c^{\psi\psi'})=$$
$$m_{(0)}a_{\psi\Psi}\theta(m_{(1)}^{\Psi}\otimes c^{\psi})=m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c)a=v^M(m1_{\psi}\otimes c^{\psi})a.$$

即证明了 v^M 是 A-线性. 接着,我们验证 v^M 是 C-余线性,对任意 $m\in M,c\in C$,因为

$$\rho^M\circ v^M(m1_{\psi}\otimes c^{\psi})=\rho^M(m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c))=(m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c))_{(0)}\otimes(m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c))_{(1)}=$$
$$m_{(0)(0)}(\theta(m_{(1)}\otimes c))_{\psi}\otimes(m_{(0)(1)})^{\psi}=m_{(0)}(\theta(m_{(1)(2)}\otimes c))_{\psi}\otimes(m_{(0)(1)})^{\psi}=$$
$$m_{(0)}\theta(m_{(1)}\otimes c_{(1)})\otimes c_{(2)}=(v^M\otimes C)(M\otimes\Delta)(m1_{\psi}\otimes c^{\psi}),$$

所以 v^M 是 C-余线性.

最后,我们验证 v 是伴随函子对(F,G)的单位的左逆,即 $v\circ\eta=I$(I 为恒等自然变换). 任取弱缠绕模 M,对任意 $m\in M$,直接计算可得

$$v^M\circ\eta^M(m)=v^M(m_{(0)}1_{\psi}\otimes m_{(1)}^{\psi})=m_{(0)}\theta(m_{(1)(1)}\otimes m_{(1)(2)})=m_{(0)}1_{\psi}\varepsilon(m_{(1)}^{\psi})=m.$$

容易证明 v 的自然性. 再由 Rafael 定理[8],可得忘却函子 F 是可分的.

(1)⇒(2). 假设忘却函子 F 可分,由 Rafael 定理,可得存在自然变换 $v:GF\to I$,使得 $v\circ\eta=I$. 考虑弱缠绕模$\underline{A\otimes C}$,可得 $U_A^C(\psi)$中的态射

$$v^{\underline{A\otimes C}}:\underline{A\otimes C\otimes C}\to\underline{A\otimes C}.$$

这里

$$\underline{A\otimes C\otimes C}=<a1_{\psi\Psi}\otimes c^{\Psi}\otimes d^{\psi}\mid a\in A,c,d\in C>.$$

由 $v\circ\eta=I$ 得

$$v^{\underline{A\otimes C}}(a1_{\psi\Psi}\otimes c_{(1)}^{\Psi}\otimes c_{(2)}^{\psi})=a1_{\psi}\otimes c^{\psi},$$

对所有的 $a\in A$,$c\in C$. 定义 θ 如下:对任意 $c,d\in C$,

$$\theta(c\otimes d)=(id_A\otimes\varepsilon)\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{\psi\Psi}\otimes c^{\Psi}\otimes d^{\psi}).$$

我们可以断定 θ 是一个正规化积分,即 θ 满足定义1中的(1)~(3). 由 v 的自然性及其 A-线性,易得(3),对任意 $b\in C$,因为

$$\theta(b_{(1)}\otimes b_{(2)})=(id_A\otimes\varepsilon)\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{A\psi\Psi}\otimes b^{\Psi}_{(1)}\otimes b^{\psi}_{(2)})=(id_A\otimes\varepsilon)(1_{\psi}\otimes c^{\psi})=1_{A\psi}\varepsilon(c^{\psi}),$$

所以得到了(2).

验证(1)成立是比较困难的,其证明过程如下:

给定一个 C-余模 M,我们考虑弱缠绕模 $\overline{M\otimes A}=\langle\overline{m\otimes a}=m_{(0)}\otimes a_{\psi}\varepsilon(m^{\psi}_{(1)})\mid m\in M,a\in A\rangle$,其上的 A-模作用及 C-余作用定义为

$$\overline{(m\otimes a)}b=\overline{m\otimes ab},$$

$$\rho(\overline{m\otimes a})=m_{(0)}\otimes a_{\psi}\otimes m^{\psi}_{(1)},$$

对所有的 $m\in M$,$a,b\in A$. 特别地,对于余模 C,可得到弱缠绕模 $\overline{C\otimes A}$. 考虑线性映射

$$\bar\psi:\overline{C\otimes A}\to\underline{A\otimes C},\quad \bar\psi(\overline{c\otimes a})=a_{\psi}\otimes c^{\psi}.$$

容易验证 $\bar\psi$ 是弱缠绕模 $\overline{C\otimes A}$ 与 $\underline{A\otimes C}$ 间的同态,由 v 的自然性,可得

$$\bar\psi\circ v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{c\otimes a1_{A\psi}}\otimes d^{\psi})=v^{\underline{A\otimes C}}(a_{\Psi}1_{A\psi\psi'}\otimes c^{\Psi\psi'}\otimes d^{\psi}),$$

对所有的 $c,d\in C$ 及 $a\in A$. 我们考虑另一个 C-余模 $R=C\otimes C$,其上的 C-余模结构映射为 $id_C\otimes\Delta$. 因为线性映射

$$\bar\Delta:\overline{C\otimes A}\to\overline{R\otimes A},\quad \bar\Delta(\overline{c\otimes a})=c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes 1_{A\psi}\varepsilon(c^{\psi}_{(3)})a.$$

诱导出弱缠绕模 $\overline{C\otimes A}$ 与 $\overline{R\otimes A}$ 间映射. 再由 v 的自然性,可得

$$\bar\Delta\circ v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{c\otimes a1_{A\psi}}\otimes d^{\psi})=v^{\overline{R\otimes A}}(c_{(1)}\otimes c_{(2)}\otimes 1_{A\psi}\varepsilon(c^{\psi}_{(3)})a1_{A\Psi}\otimes d^{\Psi}),$$

对所有 $c,d\in C$,$a\in A$.

对任意 $c\in C$,线性映射

$${}^{c}f:\overline{C\otimes A}\to\overline{R\otimes A},\quad \overline{d\otimes a}\longmapsto c\otimes\overline{d\otimes a}$$

是弱缠绕模 $\overline{C\otimes A}\to\overline{R\otimes A}$ 的同态. 由 v 的自然性,可得 $v^{\overline{R\otimes A}}=C\otimes v^{\overline{C\otimes A}}$. 由上面等式,可以得到

$$\bar\Delta\circ v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{c\otimes a1_{A\psi}}\otimes d^{\psi})=c_{(1)}\otimes v^{\overline{C\otimes A}}(c_{(2)}\otimes 1_{A\psi}\varepsilon(c^{\psi}_{(3)})a1_{A\Psi}\otimes d^{\Psi}),$$

对所有的 $c,d\in C$,$a\in A$.

对任意 $c,d\in C$,一方面

$$c_{(2)}\otimes\theta(d\otimes c_{(1)})=c_{(2)}\otimes(id_A\otimes\varepsilon)\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{A\psi\Psi}\otimes d^{\Psi}\otimes(c_{(1)})^{\psi})=$$
$$\tau_{A,C}\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{A\psi\Psi}\otimes d^{\Psi}\otimes c^{\psi}),$$

这里,第二个等号可以由 $v^{\underline{A\otimes C}}$ 是 C-余线性得到. 另一方面

$$d^{\psi}_{(1)}\otimes\theta(d_{(2)}\otimes c)_{\psi}=d^{\psi'}_{(1)}\otimes((id_A\otimes\varepsilon)\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{A\psi\Psi}\otimes d^{\Psi}_{(2)}\otimes c^{\Psi}))_{\psi'}=$$
$$d^{\psi'}_{(1)}\otimes((id_A\otimes\varepsilon)\circ\bar\psi\circ v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{d_{(2)}\otimes 1_{A\psi}}\otimes c^{\psi}))_{\psi'},$$

令 $v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{d\otimes 1_{A\psi}}\otimes c^{\psi})=\sum_i\overline{e_i\otimes f_i}$,其中 $e_i\in C$,$f_i\in A$,

$$d^{\psi}_{(1)}\otimes\theta(d_{(2)}\otimes c)_{\psi}=\sum_i e^{\psi}_{i(1)}\otimes((id_A\otimes\varepsilon)\circ\bar\psi(\overline{e_{i(2,e)}\otimes f_i}))_{\psi}=$$
$$\sum_i e^{\Psi}_{i(1)}\otimes((id_A\otimes\varepsilon)(f_{i\psi e}\otimes(e_{i(2)})^{\psi}))_{\Psi}=$$
$$\sum_i e^{\Psi}_{i(1)}\otimes f_{i\psi\Psi}\varepsilon(e^{\psi}_{i(2)})=\sum_i e^{\Psi}_i\otimes f_{i\Psi}=\sum_i\tau_{A,C}\circ\bar\psi(\overline{e_i\otimes f_i})=$$
$$\tau_{A,C}\circ\bar\psi\circ v^{\overline{C\otimes A}}(\overline{d\otimes 1_{A\psi}}\otimes c^{\psi})=\tau_{A,C}\circ v^{\underline{A\otimes C}}(1_{A\psi\Psi}\otimes d^{\Psi}\otimes c^{\psi}),$$

即证明了定义1中等式(1).

由定理1,可以得到弱缠绕模的 Maschke 型定理.

定理2　设 $(A,C)_{\psi}$ 为弱缠绕结构 $M=\{M\}_{\in\pi}$,$N=\{N\}_{\in\pi}\in U^C_A(\psi)$. 假设存在正规化积分 $\theta:C\otimes C\to A$. 对任意范畴 U^C_A 中态射 $f:M\to N$,则当单(满)同态 f 在范畴 M_A 中可分裂时,必有单(满)态 f 在范畴 U^C_A 中可分裂.

(下转第12页)

[10] Zhou Sizhong. Some new sufficient conditions for graphs to have fractional k-factors[J]. Int J Comp Math,2011,88:484-490.

[11] Zhou Sizhong,Xu Lan,Sun Zhiren. Independent number and minimum degree for fractional ID-k-factor-critical graphs[J]. Aequat Math,2012,84:71-76.

[12] Chang Renying,Liu Guizhen,Zhu Yan. Degree conditions of fractional ID-k-factor-critical graphs[J]. Bull Malays Math Sci Soc,2010,33:355-360.

[13] Zhou Sizhong,Sun Zhiren,Liu Hongxia. A minimum degree for fractional ID-$[a,b]$-factor-critical graphs[J]. Bull Aust Math Soc,2012,86:177-183.

[14] Liu Guizhen,Zhang Lanju. Fractional (g,f)-factors of graphs[J]. Acta Math Sci Ser B,2001,21:541-545.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 8 页)

[参考文献]

[1] Năstăsescu C,van den Bergh M,van Oystaeyen F. Separable functors applied to graded rings[J]. J Algebra,1989,123(2):397-413.

[2] Caenepeel S,Ion B,Militaru G,et al. Separable functors for the category of Doi-Hopf modules,Applications[J]. Advances in Mathematics,1999,145(2):239-290.

[3] Böhm G. Doi-hopf modules over weak hopf algebras[J]. Comm Algebra,2000,28(10):4 687-4 698.

[4] Chen Q G,Wang S H. Separable functors for the category of Doi-Hopf π-modules[J]. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg,2011,81(2):261-272.

[5] Brzeziński T,Majid Sh. Coalgebra bundles[J]. Comm Math Phys,1998,191(2):467-492.

[6] Brzeziński T. On modules associated to coalgebra galois extensions[J]. J Algebra,1999,215(1);290-317.

[7] Caenepeel S,de Groot E. Modules over weak entwining structures[J]. Contemporary Mathematics,2000,267:31-54.

[8] Rafael M D. Separable functors revised[J]. Comm Algebra,1990,18(5):1 445-1 459.

[责任编辑:丁　蓉]