

# 具有不连续激励函数的神经网络的多稳定性

陈晓丰<sup>1</sup>, 谭远顺<sup>1</sup>, 况 杨<sup>2</sup>

(1. 重庆交通大学理学院, 重庆 400074)  
(2. 重庆交通大学土木建筑学院, 重庆 400074)

[摘要] 讨论了一类具有不连续激励函数的神经网络多个平衡点的共存性和稳定性, 利用 Brouwer 不动点原理, 给出了多个平衡点同时存在的充分条件, 利用构造 Lyapunov 函数和矩阵不等式技巧, 给出了系统平衡点局部指数稳定的判别准则, 并对获得的结果进行数值仿真实验, 验证其有效性.

[关键词] 神经网络, 多稳定性, 指数稳定, 不连续激励函数

[中图分类号] O175.13 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2013)03-0016-05

## Multistability of Neural Networks With Discontinuous Activation Functions

Chen Xiaofeng<sup>1</sup>, Tan Yuanshun<sup>1</sup>, Kuang Yang<sup>2</sup>

(1. School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)  
(2. School of Civil Engineering and Architecture, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** The problem on multistability of equilibria is investigated for a class of neural networks with discontinuous activation functions. By using Brouwer's fixed-point theorem and constructing an appropriate Lyapunov-Krasovskii functional and the matrix inequality techniques, some new criterions for checking the existence, and local exponential stability of equilibria are derived. One simulation example is given to show the effectiveness of the proposed result.

**Key words:** neural networks, multistability, exponential stability, discontinuous activation functions

近年来,神经网络的单稳定性,即吸引子(包括平衡点、周期解和概周期解等)的存在唯一性及全局稳定性得到了广泛研究<sup>[1-3]</sup>. 需要指出的是,在神经网络的某些应用领域,比如联想记忆、模式识别等,多个平衡点的共存性和稳定性相比单一平衡点更具优势<sup>[4]</sup>. 因为它们的数目关系到联想记忆的存储容量,也就是网络具有越多的动态吸引子,其存储容量也就越大. 因此,对神经网络多重稳定性的研究也具有很大的理论和实际意义. 值得一提的是,具有不连续激励函数的神经网络神是一类在实际应用中较常见也很重要的模型<sup>[5]</sup>. 最近,学者们在考虑激励函数为连续函数的情况下,得到了一些关于神经网络多稳定的结果<sup>[6-13]</sup>,而关于具有不连续激励函数的神经网络神多稳定性的结果却很少.

受到上面工作的启发,本文将讨论具有连续或不连续激励函数的神经网络多个平衡点的共存性和稳定性,利用 Brouwer 不动点原理,给出多个平衡点同时存在的充分条件,并利用构造 Lyapunov 函数和矩阵不等式技巧,给出系统平衡点指数稳定的判据.

本文讨论如下神经网络模型:

$$\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + I_i, \tag{1}$$

与其等价的向量形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{I}, \tag{2}$$

其中  $n$  表示神经元的个数,  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$  表示神经元在时刻  $t$  的状态;  $\mathbf{C} = \text{diag}(c_1, c_2,$

收稿日期: 2012-12-19.  
基金项目: 国家自然科学基金(61273021、11271389)、重庆市自然科学基金(CSTC2011AC6104、CSTC2011jjA00012、CSTC2010BB27)、重庆市教委科学技术研究项目(KJ120420).  
通讯联系人: 谭远顺, 博士, 教授, 研究方向: 常微分方程与动力系统. E-mail: tanys@cqjtu.edu.cn

$\cdots, c_n)$  是实常数对角矩阵, 并且  $c_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ ;  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是实常数矩阵, 用于刻画神经元间相互连接强度;  $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots, f_n(x_n))^T$  表示激励函数.

在模型(1)中, 激励函数  $f_j(x)$  是具有  $r$  段的分段线性函数, 它具有如下形式:

$$f_j(u) = \begin{cases} k_1 u + b_1, & u \in (p_0, p_1), \\ k_2 u + b_2, & u \in [p_1, p_2), \\ \vdots, & \vdots, \\ k_{r-1} u + b_{r-1}, & u \in [p_{r-2}, p_{r-1}), \\ k_r u + b_r, & u \in [p_{r-1}, p_r), \end{cases} \quad (3)$$

其中  $j = 1, 2, \cdots, n$ ;  $r$  是一个正整数;  $k_1, k_2, \cdots, k_r, b_1, b_2, \cdots, b_r$  是常数;  $p_1, p_2, \cdots, p_{r-1}$  是常数, 并满足  $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{r-1}; p_0 = -\infty, p_r = +\infty$ .

**注 1** 式(3)所定义的激励函数可以是连续函数也可以是不连续函数.

若  $f_j(p_i -) = f_j(p_i +)$ , ( $i = 1, 2, \cdots, r$ ), 则  $f_j$  连续, 否则  $f_j$  不连续. 常见的激励函数如  $f(u) = \frac{|u+1| + |u-1|}{2}$  以及阶梯函数(分段常值函数)都是式(3)所定义函数的特例.

为方便起见, 引入记号  $\gamma_1 = (p_0, p_1), \gamma_2 = [p_1, p_2), \cdots, \gamma_r = [p_{r-1}, p_r)$ , 显然,  $\mathbf{R} = \bigcup_{i=1}^r \gamma_i$ . 于是  $\mathbf{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbf{R}$  可分成以下  $r^n$  个部分:

$$\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n} = \prod_{i=1}^n \gamma_{l_i}, \quad l_i \in \{1, 2, \cdots, r\}. \quad (4)$$

记  $\Omega = \{\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n} | l_i \in \{1, 2, \cdots, r\}\}$ , 则  $\Omega$  中有  $r^n$  个元素.

**引理 1** 设  $A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 且  $A < 0, B > 0$ , 那么一定存在正实数  $\varepsilon$ , 使得下列矩阵不等式成立:

$$A + \varepsilon B < 0. \quad (5)$$

**证明** 设  $\lambda_{\max}(A), \lambda_{\max}(B)$  分别表示矩阵  $A, B$  的最大特征值, 则  $\lambda_{\max}(A) < 0, \lambda_{\max}(B) > 0$ . 若取  $\varepsilon = -\frac{\lambda_{\max}(A)}{2\lambda_{\max}(B)} > 0$ , 则对于任意非零向量  $x \in \mathbf{R}^n$ , 都有

$$x^T(A + \varepsilon B)x = x^T A x + \varepsilon x^T B x \leq \lambda_{\max}(A) \|x\|^2 + \varepsilon \lambda_{\max}(B) \|x\|^2 = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A) \|x\|^2 < 0. \quad (6)$$

因此,  $A + \varepsilon B$  是负定矩阵, 即  $A + \varepsilon B < 0$ . 证毕.

## 1 主要结果

本节, 首先给出模型(1)在局部区域  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中平衡点的存在以及指数稳定性的充要条件.

**定理 1** 设  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n} \in \Omega$ , 对角矩阵  $K = \text{diag}(k_{l_1}, k_{l_2}, \cdots, k_{l_n})$ , 列向量  $b = (b_{l_1}, b_{l_2}, \cdots, b_{l_n})^T$ .

那么模型(1)在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中有唯一的平衡点的充要条件是

$$\det(AK - C) \neq 0, \quad -(AC - K)^{-1}(Ab + I) \in \Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}. \quad (7)$$

此外, 若模型(1)在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中有唯一的平衡点  $x^*$ , 则  $x^*$  指数稳定的充要条件是存在一个正定矩阵  $P$ , 满足矩阵不等式

$$(AK - C)^T P + P(AK - C) < 0. \quad (8)$$

**证明** 第一步: 证明存在性. 模型(1)在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中有唯一的平衡点的充要条件是方程组

$$\begin{cases} -c_1 x_1 + a_{11}(k_{l_1} x_1 + b_{l_1}) + a_{12}(k_{l_2} x_2 + b_{l_2}) + \cdots + a_{1n}(k_{l_n} x_n + b_{l_n}) + I_1 = 0, \\ -c_2 x_2 + a_{21}(k_{l_1} x_1 + b_{l_1}) + a_{22}(k_{l_2} x_2 + b_{l_2}) + \cdots + a_{2n}(k_{l_n} x_n + b_{l_n}) + I_2 = 0, \\ \vdots \\ -c_n x_n + a_{n1}(k_{l_1} x_1 + b_{l_1}) + a_{n2}(k_{l_2} x_2 + b_{l_2}) + \cdots + a_{nn}(k_{l_n} x_n + b_{l_n}) + I_n = 0, \end{cases} \quad (9)$$

在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中有唯一的解, 方阵组(9)有唯一解的充要条件是行列式  $\det(AK - C) \neq 0$ , 并且该唯一解为:

$$x = -(AC - K)^{-1}(Ab + I). \quad (10)$$

而该唯一解在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中的充要条件为

$$\mathbf{x} \in \Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}, \quad (11)$$

即

$$-(\mathbf{AC}-\mathbf{K})^{-1}(\mathbf{Ab}+\mathbf{I}) \in \Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}. \quad (12)$$

第二步:证明稳定性. 设  $y(t)=x(t)-x^*$ , 则  $y(t)$  满足方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = (\mathbf{AK}-\mathbf{C})\mathbf{y}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \quad (13)$$

其中  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*$ .

先证充分性, 即证若正定矩阵  $\mathbf{P}$  满足(8), 则  $\mathbf{x}^*$  是指数稳定的. 根据引理 1 可得, 存在实数  $\varepsilon > 0$ , 使得下面矩阵不等式成立:

$$(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{AK}-\mathbf{C}) + \varepsilon \mathbf{P} < 0. \quad (14)$$

构造标量函数  $V(\mathbf{y}, t) = e^{\varepsilon t} \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y}$ , 则  $V(\mathbf{y}, t) > 0$ .  $V(\mathbf{y}, t)$  沿着  $\mathbf{y}$  的轨线对时间  $t$  的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{y}, t) &= e^{\varepsilon t} \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{P} \mathbf{y} + e^{\varepsilon t} \mathbf{y}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{y}} + \varepsilon e^{\varepsilon t} \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = e^{\varepsilon t} \{ [(\mathbf{AK}-\mathbf{C})\mathbf{y}]^T \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{P} [(\mathbf{AK}-\mathbf{C})\mathbf{y}] + \varepsilon \mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \} = \\ &= e^{\varepsilon t} [\mathbf{y}^T (\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T \mathbf{P} \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{P} (\mathbf{AK}-\mathbf{C}) \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\varepsilon \mathbf{P}) \mathbf{y}] = e^{\varepsilon t} \mathbf{y}^T [(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{AK}-\mathbf{C}) + \varepsilon \mathbf{P}] \mathbf{y}. \end{aligned}$$

由矩阵不等式(14)可知,  $\dot{V}(\mathbf{y}, t) < 0$ . 所以  $V(\mathbf{y}, t) \leq V(\mathbf{y}(t_0), t_0)$ ,  $\forall t \geq t_0$ . 于是有,

$$\mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \leq e^{-\varepsilon(t-t_0)} \mathbf{y}_0^T \mathbf{P} \mathbf{y}_0. \quad (15)$$

又因为

$$\mathbf{y}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \geq \lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{y}\|^2, \quad \mathbf{y}_0^T \mathbf{P} \mathbf{y}_0 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P}) \|\mathbf{y}_0\|^2, \quad (16)$$

所以有

$$\|\mathbf{y}\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}} \|\mathbf{y}_0\| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)}, \quad (17)$$

即

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| \leq M \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-t_0)}, \quad (18)$$

其中  $M = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})}}$ . 因此平衡点  $\mathbf{x}^*$  是指数稳定的.

再证必要性. 若平衡点  $\mathbf{x}^*$  是指数稳定的, 则它一定是渐近稳定的, 所以矩阵  $\mathbf{AK}-\mathbf{C}$  的特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, n)$  满足  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ . 取矩阵

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T t} e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})t} dt. \quad (19)$$

式中, 被积函数  $e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T t} e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})t}$  是一个  $n \times n$  的矩阵, 它的每一个元素一定可以表示为具有  $t^k e^{\lambda t}$  形式的诸项之和, 因此其积分一定存在. 由于  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ , 所以  $e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T t} e^{(\mathbf{AK}-\mathbf{C})t} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ . 下证  $(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{AK}-\mathbf{C})$  是负定的. 设  $\mathbf{Q} = \mathbf{AK}-\mathbf{C}$ ,

$$(\mathbf{AK}-\mathbf{C})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{AK}-\mathbf{C}) = \int_0^\infty (\mathbf{Q}^T e^{\mathbf{Q}^T t} e^{\mathbf{Q}t} + e^{\mathbf{Q}^T t} e^{\mathbf{Q}t} \mathbf{Q}) dt = \int_0^\infty d(e^{\mathbf{Q}^T t} e^{\mathbf{Q}t}) = e^{\mathbf{Q}^T t} e^{\mathbf{Q}t} \Big|_0^\infty = -\mathbf{E} < 0.$$

至此, 定理证毕.

以上定理只给出了每个局部区域在  $\Omega_{l_1 l_2 \cdots l_n}$  中平衡点存在和稳定性的判据, 并没有直接给出模型(1)一共有多少个平衡点. 下面的定理将给出模型(1)平衡点的总的个数及稳定性.

**定理 2** 设  $k_i = k_r = 0, M_i = \sup_{u \in \gamma_i} f_j(u), m_i = \inf_{u \in \gamma_i} f_j(u), i = 1, 2, \cdots, r$ . 如果下列条件满足:

(H1) 对于任意  $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$  及任意的  $l_1, l_2, \cdots, l_n \in \{1, 2, \cdots, r\}$ , 都有  $c_i - a_{ii} k_{l_i} \neq 0$ , 且

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \max(s_i a_{ij} M_{l_j}, s_i a_{ij} m_{l_j}) + s_i (a_{ii} b_{l_i} + I_i) < |c_i - a_{ii} k_{l_i}| p_{l_i}, \quad (20)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \min(s_i a_{ij} M_{l_j}, s_i a_{ij} m_{l_j}) + s_i (a_{ii} b_{l_i} + I_i) > |c_i - a_{ii} k_{l_i}| p_{l_i-1}, \quad (21)$$

其中  $s_i = \text{sgn}(c_i - a_{ii} k_{l_i})$ .

(H2) 对任意  $l_1, l_2, \cdots, l_n \in \{1, 2, \cdots, r\}$ , 存在正定矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 使得

$$(AK-C)^T P + P(AK-C) < 0, \quad (22)$$

其中  $K = \text{diag}(k_{l_1}, k_{l_2}, \dots, k_{l_n})$ .

那么模型(1)有  $r^n$  个指数稳定的平衡点.

**证明** 设任意的  $\Omega_{l_1 l_2 \dots l_n} \in \Omega$ , 并设

$$\Gamma_i(x) = \frac{1}{c_i - a_{ii} k_{l_i}} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} (k_{l_j} x_j + b_{l_j}) + I_i + a_{ii} b_{l_i} \right], \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

$$q_{l_i} = \frac{1}{|c_i - a_{ii} k_{l_i}|} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n \max(s_i a_{ij} M_{l_j}, s_i a_{ij} m_{l_j}) + s_i (I_i + a_{ii} b_{l_i}) \right], \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (24)$$

$$q_{l_{i-1}} = \frac{1}{|c_i - a_{ii} k_{l_i}|} \left[ \sum_{j=1, j \neq i}^n \min(s_i a_{ij} M_{l_j}, s_i a_{ij} m_{l_j}) + s_i (I_i + a_{ii} b_{l_i}) \right], \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

$$\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n} = [q_{l_{i-1}}, q_{l_i}] \times [q_{l_{i-1}}, q_{l_i}] \times \dots \times [q_{l_{i-1}}, q_{l_i}]. \quad (26)$$

由(20)和(21)可知,  $\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n} \subset \Omega_{l_1 l_2 \dots l_n}$ . 因为平衡点就是方程组(9)的解, 故现考察方程组(9)在  $\Omega_{l_1 l_2 \dots l_n}$  中的解. 方程组(9)可变形为

$$x_i = \Gamma_i(x), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

由(20)和(21)可证得, 对于任意  $x \in \tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n} \subset \Omega_{l_1 l_2 \dots l_n}$ , 都有  $\Gamma_i(x) \in [q_{l_{i-1}}, q_{l_i}]$ .

故可以定义  $\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n}$  上的自映射:

$$\Gamma(x) = (\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \dots, \Gamma_n(x))^T. \quad (28)$$

显然  $\Gamma$  是  $\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n}$  上的连续自映射. 根据 Brouwer 不动点定理可知,  $\Gamma$  在  $\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n}$  上至少存在一个不动点  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ , 即  $\Gamma(x^*) = x^*$ , 亦即  $x_i^* = \Gamma_i(x^*)$ , 故  $x^*$  是模型(1)在  $\tilde{\Omega}_{l_1 l_2 \dots l_n} \subset \Omega_{l_1 l_2 \dots l_n}$  中的平衡点. 由条件(22), 并利用定理 1 证明过程中方法, 可以证明  $x^*$  是指数稳定的. 由  $\Omega_{l_1 l_2 \dots l_n}$  的任意性可知, 模型(1)有  $r^n$  个指数稳定的平衡点. 至此, 定理证毕.

## 2 数值仿真

**例 1** 讨论二维神经网络:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 1.3f_1(x_1(t)) + 0.05f_2(x_2(t)) + 0.1, \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + 0.04f_1(x_1(t)) + 1.2f_2(x_2(t)) + 0.05, \end{cases} \quad (29)$$

其中

$$f_1(u) = f_2(u) = \begin{cases} -1, & u < -1, \\ 0.4u + 0.1, & -1 \leq u < 1, \\ 1, & u \geq 1. \end{cases} \quad (30)$$

易知,  $n=2, r=3, p_1=-1, p_2=1, M_1=-1, M_2=0.5, M_3=1, m_1=-1, m_2=-0.3, m_3=1$ . 可以验证定理 2 中条件(H1)满足. 利用 Matlab 软件中 LMI 工具箱可以验证定理 2 中条件(H2)也满足, 具体结果为: 当  $(l_1, l_2)$  分别取  $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$  时, 求得相应的正定矩阵  $P$  为

$$\begin{pmatrix} 49.1462 & 0 \\ 0 & 49.1462 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 72.4832 & 0.6796 \\ 0.6796 & 118.4101 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 49.1462 & 0 \\ 0 & 49.1462 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 123.2169 & 0.5253 \\ 0.5253 & 72.4743 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1.0831 & 0.0192 \\ 0.0192 & 1.0409 \end{pmatrix} \times 10^{-3}, \quad \begin{pmatrix} 123.2169 & 0.5253 \\ 0.5253 & 72.4743 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 49.1462 & 0 \\ 0 & 49.1462 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 72.4832 & 0.6796 \\ 0.6796 & 118.4101 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 49.1462 & 0 \\ 0 & 49.1462 \end{pmatrix}.$$

因此, 根据定理 2, 模型(29)有  $3^2$  个指数稳定的平衡点 (如图 1).

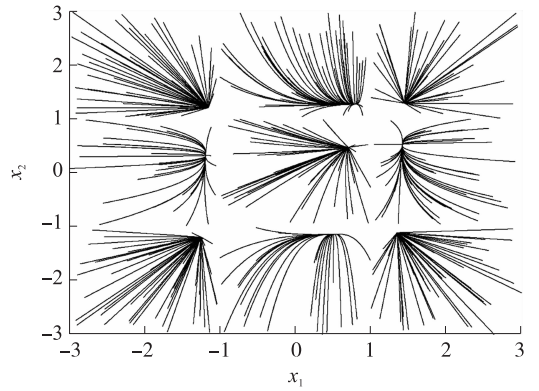


图 1 模型(29)的相图

Fig. 1 Phase plot of model(29)

### 3 结论

本文研究了一类具有不连续激励函数的神经网络平衡点的多存在性和局部指数稳定性,利用 Brouwer 不动点原理,给出了多个平衡点同时存在的充分条件,通过构造合适的 Lyapunov 函数和运用矩阵不等式技巧,得到了系统平衡点局部指数稳定的充分条件,所得结果易于验证.

#### [参考文献]

- [1] Mohamad S. Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks[J]. Physica D,2001,159(3/4):233–251.
- [2] Chen X, Song Q. Global exponential stability of the periodic solution of delayed Cohen-Grossberg neural networks with discontinuous activations[J]. Neurocomputing,2010,73(16/18):3 097–3 104.
- [3] Chen A, Huang L, Cao J. Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays[J]. Applied Mathematics and Computation,2003,137(1):177–193.
- [4] Hahnloser R. On the piecewise analysis of networks of linear hreshold neurons[J]. Neural Networks,1998,11(4):691–697.
- [5] Forti M, Nistri P. Global convergence of neural networks with discontinuous neuron activations[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I,2003,50(11):1 421–1 435.
- [6] Cheng C Y, Lin K H, Shih C W. Multistability and convergence in delayed neural networks[J]. Physica D,2007,225(1):61–74.
- [7] Huang G, Cao J. Multistability in bidirectional associative memory neural networks[J]. Physics Letters A,2008,372(16):2 842–2 854.
- [8] Shih C W, Tseng J P. Convergent dynamics for multistable delayed neural networks[J]. Nonlinearity,2008,21(10):2 361–2 389.
- [9] Nie X, Cao J. Multistability of competitive neural networks with time-varying and distributed delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications,2009,10(2):928–942.
- [10] Huang G, Cao J. Delay-dependent multistability in recurrent neural networks[J]. Neural Networks,2010,23(2):201–209.
- [11] Zhang L, Yi Z, Yu H, et al. Some multistability properties of bidirectional associative memory recurrent neural networks with unsaturating piecewise linear transfer functions[J]. Neurocomputing,2009,72(16/18):3 809–3 817.
- [12] Huang Z, Song Q, Feng C. Multistability in networks with self-excitation and high-order synaptic connectivity[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I,2010,57(8):2 144–2 155.
- [13] Nie X, Huang Z. Multistability and multiperiodicity of high-order competitive neural networks with a general class of activation functions[J]. Neurocomputing,2012,82(1):1–13.

[责任编辑:丁 蓉]