最大化调节系数的最优比例再保险和破产概率

——跳扩散模型

华　婷[1],梁志彬[2]

(1. 常州工学院理学院,江苏 常州 213002)
(2. 南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[**摘要**]　考虑了一类新的保费原理——期望-标准差保费原理,基于此类新的保费原理之下,讨论了跳扩散(简称为 J-D)模型中使得调节系数最大化的最优再保险问题,并且得到了最优再保险策略,最大调节系数和破产概率的最小指数上界的清晰表达式. 最后通过数例和图表比较了 J-D 模型中有无再保险的情况.

[**关键词**]　调节系数,跳扩散,比例保险,破产概率
[**中图分类号**]O211. 63　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2014)02-0023-05

Optimal Proportional Reinsurance and Ruin Probability to Maximize the Adjustment Coefficient

——Jump-Diffusion Risk Model

Hua Ting[1],Liang Zhibin[2]

(1. College of Science,Changzhou Institute of Technology,Changzhou 213002,China)
(2. School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,using a different premium principle—mean-standard deviation premium principle,we solve the optimal reinsurance problem in the jump-diffusion(J-D for short)case to maximize the adjustment coefficient. The closed-form expressions of the optimal reinsurance strategy,the maximal adjustment coefficient and a sharper bound for the ruin probability are also given. In the end,some numerical examples are presented to show the difference of with or without reinsurance in the J-D case.

Key words:adjustment coefficient,jump-diffusion,proportional reinsurance,ruin probability

最近,有相当一部分文献站在保险人立场上来讨论风险模型中的最优控制问题. 如 Browne[1],Hipp and Plum[2],Schmidli[3],Liu and Yang[4],Gerber and Shiu[5]. 这些工作中,随机控制理论和相关工具得到了广泛的应用. 他们通常在所研究的风险模型中,假设累积索赔过程是复合 Poission 过程或者是带漂移的布朗运动,其中控制变量如再保险、新业务(new businesses)、投资和分红等等,都是随时间动态变化的. 在一定的假设条件下,他们能获得最优策略和值函数的近似值,这些最优策略都是在不同的限制下最优化或者最小化某个目标函数. 例如,文献[3]中作者以达到最小破产概率(或者达到最大生存概率)为最优准则,文献[1]中以最小折现惩罚为最优准则,文献[5]中以最大期望折现分红为最优准则,文献[6]以最大化调节系数为最优准则等等. 在文献[7]中,Yang and Zhang 考虑了在跳扩散模型(J-D 模型)中使期望指数效用最大化的最优投资问题. 他们也得到了最优策略和值函数的近似表达式.

然而,跳扩散风险模型中破产概率 $\psi(u)$ 的清晰解是很难获得的. 因此对破产概率的值进行估计成为风险理论中的中心话题. 文献[4,7]利用数值方法对跳扩散过程中的破产概率进行了讨论,一些其他的文

收稿日期:2013-08-11.
基金项目:国家自然科学基金(11101215).
通讯联系人:梁志彬,教授,研究方向:随机过程在保险金融中的应用、风险管理与精算、随机最优控制. E-mail:05187@ njnu. edu. cn

章则侧重于分析破产概率的渐进行为,并获得如下结论[8,9]:

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u)e^{Ru}=\zeta, \tag{1}$$

或者

$$\psi(u)\leqslant Ce^{-Ru}, \tag{2}$$

其中 ζ, C 是常数, R 是调节系数. 调节系数 R 也因此成为另一个非常重要的风险度量参数. 已有文献[10,11]都在力求找到使得调节系数最大化的最优再保险策略,而且,大多数都是基于期望保费原理或者是方差保费原理来求得最优的再保险策略. 本文则是建立了一个新的保费原理——期望-标准差保费原理. 基于这个保费原理,讨论了 J-D 模型中的最优再保险问题.

1　模型

在经典风险模型中,盈余过程 $\{X_t\}_{t\geqslant0}$ 可以写成

$$X_t=u+ct-S_t, \tag{3}$$

其中 $u\geqslant0$ 是初始盈余, c 是保费率, S_t 表示到时间 t 为止的累积索赔额. 我们假设 $S_t=\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i$ 是复合 Poisson 过程,也就是说, $N(t)$ 是具有密度参数为 λ 的齐次 Poisson 过程. $Y_i, i\geqslant1$ 是独立同分布,且分布函数为 $F(y)$ 的正值随机变量序列. 期望值 $E(Y_i)$ 记为 μ, 矩母函数 $M_Y(r)=Ee^{rY_1}$. 索赔次数过程 $N(t)$ 也独立于 $Y_i, i\geqslant1$. 有关经典破产理论的介绍可以参考文献[12].

大多数文献是基于下面几种保费原理:

期望保费原理: $c=(1+\theta)E(X)$, 方差保费原理: $c=E(X)+\Lambda Var(X)$;

标准差保费原理: $c=E(X)+\omega\sqrt{Var(X)}$, 其中 X 是保险人承担的单位风险, θ、Λ、ω 是非负常数.

而本文是在一类新的保费原理——期望-标准差保费原理下,讨论使调节系数达到最大的最优再保险问题.

定义 1　期望-标准差保费原理: $c=(1+\alpha)E(X)+\gamma\sqrt{Var(X)}$, 其中 α 和 γ 为非负常数.

很显然,当 $\gamma=0$ 时即为期望保费原理, $\alpha=0$ 时即为标准差保费原理.

本文讨论带干扰布朗运动的风险过程,同时,假设保险人在 t 时刻可以以水平 $q\in(0,1]$ 来购买比例再保险,即,保险人自留 qS_t, 把 $(1-q)S_t$ 转给再保险人. 在期望-标准差保费原理下,有 $c=(1+\theta_1)\lambda\mu+\theta_2\sigma$, 再保险保费率 $\delta_q=(1-q)[(1+\eta_1)\lambda\mu+\eta_2\sigma]$, 其中 θ_1,θ_2 是保险人的安全负荷,而 η_1 与 η_2 是再保险人的安全负荷, $\sigma^2=\lambda\mu_2=\lambda EY_i^2$. 不失一般性,我们假设 $\eta_1>\theta_1, \eta_2>\theta_2$. 此时盈余过程可以表示为

$$X_t^q=u+(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma t+(\theta_1-\eta_1+q+q\eta_1)\lambda\mu t+\beta B_t-qS_t, \tag{4}$$

其中 $\beta\geqslant0$ 是常数, $\{B_t, t\geqslant0\}$ 是一独立于 $\{N(t), t\geqslant0\}$ 和 $\{Y_i, i\geqslant1\}$ 的标准布朗运动,扩散项 βB_t 代表累积索赔或保费收入中的不确定的部分[13].

定义 $\tau^q=\inf\{t\geqslant0: X_t^q<0\}$ 为破产时间, $\psi^q(u)=P(\tau^q<\infty \mid X_0^q=u)$ 是最终破产概率.

为了满足净利润的条件,也就是说,盈余过程的期望值非负,必须有

$$(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1+q\eta_1)\lambda\mu>0,$$

即 $q>\bar{q}=1-\dfrac{\theta_1\lambda\mu+\theta_2\sigma}{\eta_2\sigma+\eta_1\lambda\mu}$. 否则,对于 $u\geqslant0$ 有 $\psi^q(u)\equiv1$[14].

2　最优再保险策略与破产概率

这一部分,我们讨论跳扩散风险过程中的最优再保险策略问题. 因为不容易得到跳扩散模型下破产概率的精确表达式,因此我们考虑最大化调节系数的最优比例再保险.

令 $R_J(q)$ 为在 J-D 模型下的调节系数,因此 $R_J(q)$ 满足等式

$$[(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1+q+q\eta_1)a]r-\frac{1}{2}\beta^2r^2-\lambda[M_Y(qr)-1]=0. \tag{5}$$

我们的目标是最大化 $R_J(q)$, 也就是说找到 q^*, 使得 $R_J=R_J(q^*)=\sup_{q\in(\bar{q},1]}R_J(q)$.

注意到式子(5)的左边,在 $r=R_J$ 时是非正的,也就是说 R_J 是下面式子的解

$$\sup_{q\in(\underline{q},1]}\left\{[(\theta_2-\eta_2+q\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1+q+q\eta_1)a]r-\frac{1}{2}\beta^2r^2-\lambda[M_Y(qr)-1]\right\}=0. \tag{6}$$

为了保证矩母函数 $M_Y(r)$ 的存在性,我们假设索赔额分布尾部 $\bar{F}(y)(=1-F(y))$ 应该具有指数递减性质. 这里指数递减特性意味着对于某个 $s>0$,尾部 $\bar{F}(y)$ 满足 $\bar{F}(y)=o(\mathrm{e}^{-sy})$.

现对式(5)左边的变量 q 求导,得到

$$\frac{\eta_2\sigma+a(1+\eta_1)}{\lambda}=E[Y\mathrm{e}^{qrY}]:=M_Y'(qr).$$

令 $m=qr$,得到

$$\mu(1+\eta_1)+\frac{\sigma\eta_2}{\lambda}=M_Y'(m). \tag{7}$$

设方程(7)的唯一正根为 ℓ,并设变量 q_1 是使式(5)左边达到最大的 q,因此 $\ell=q_1r$. 将 $r=\dfrac{\ell}{q_1}$代入式(6)得到另一个关于 q_1 的等式:

$$((a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1])q_1^2+\ell[(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a]q_1-\frac{1}{2}\beta^2\ell^2=0,$$

因此

$$q_1^{+,-}(\ell)=\frac{B_1\pm\sqrt{B_1^2+2\beta^2\ell^2((a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1])}}{2((a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1])},$$

其中 $B_1=\ell[(\eta_2-\theta_2)\sigma+(\eta_1-\theta_1)a]$.

根据下面的引理 1,得知

$$(a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1]>0,$$

去掉负根,从而得到

$$q_1(\ell)=\frac{B_1+\sqrt{B_1^2+2\beta^2\ell^2((a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1])}}{2((a+a\eta_1+\eta_2\sigma)\ell-\lambda[M_Y(\ell)-1])}. \tag{8}$$

如果我们知道 Y 的分布,就能得到 ℓ 的确切表达式和最优策略 q^* 的表达:

$$q^*=q_1(\ell)\wedge 1.$$

把 q^* 代入式(6)并且化简,有

$$[(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a]r+(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell-\frac{1}{2}\beta^2r^2=\lambda[M_Y(\ell)-1],\quad q^*<1, \tag{9}$$

$$(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)r-\frac{1}{2}\beta^2r^2=\lambda[M_Y(r)-1],\quad q^*=1. \tag{10}$$

在下面的命题中,我们将证明上述关于 r 的方程有唯一的正根.

命题 1　假设 $\bar{F}(y)$ 具有指数递减性质,那么式(9)和式(10)有唯一的正根.

为了证明这个命题,我们首先证明下面的引理,它在这篇论文里起到非常关键的作用.

引理 1　设 ℓ 是式(7)唯一的正根,则有 $M_Y(\ell)-1<\dfrac{1}{\lambda}(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell$.

证明　令 $f(r)=(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)r-\lambda(M_Y(r)-1)$.

因此有 $f'(r)=\eta_2\sigma+a+a\eta_1-\lambda M_Y'(r)$, $f'(\ell)=0$, $f''(r)=-\lambda M_Y''(r)=-\lambda E[Y^2\mathrm{e}^{rY}]\leqslant 0$. 这意味着 $f(r)$ 是一个凸函数,并且在 $r=\ell$ 取得最大值. 因此我们得到 $f(\ell)>0$,即

$$M_Y(\ell)-1<\frac{1}{\lambda}(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell.$$

命题 1 的证明　若 $q^*<1$,有

$$[(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a]r+(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell-\frac{1}{2}\beta^2r^2=\lambda[M_Y(\ell)-1].$$

令 $f(r)=[(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a]r-\dfrac{1}{2}\beta^2r^2$. 因 $\theta_2<\eta_2$ 且 $\theta_1<\eta_1$,等式 $f(r)=0$ 有 2 个根:一个是 0,另一

个是 $r_1=\frac{2[(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a]}{\beta^2}<0$. 因此根据引理 1,容易得到式(9)有唯一的正根 R_J. 表达式如下:

$$R_J=\frac{B_2+\sqrt{B_2^2-2\beta^2(\lambda[M_Y(\ell)-1]-(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell)}}{\beta^2},$$

其中 $B_2=(\theta_2-\eta_2)\sigma+(\theta_1-\eta_1)a$.

如果 $q^*=1$,有

$$(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)r-\frac{1}{2}\beta^2r^2=\lambda[M_Y(r)-1].$$

令 $f(r)=(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)r-\frac{1}{2}\beta^2r^2$, $g(r)=\lambda[M_Y(r)-1]$. 等式 $f(r)=0$ 有 2 个根:一个是 0,另一个是 $r_1=\frac{2(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)}{\beta^2}>0$. 因为 $g'(0)=a<f'(0)=\theta^2\sigma+a+a\theta_1$,并且 $g(r)$ 是一个单调递增的凸函数,所以 $g(r)$ 和 $f(r)$ 在某个 $r>0$ 处有唯一交点. 因此式(10)有唯一正根.

根据这个命题,可以直接得到下述定理:

定理 1　假设 $\bar{F}(y)$ 具有指数递减的性质. 令 ℓ 是方程(7)的正根,$q_1(\ell)$ 由式(8)给出. 因此使得调节系数最大的最优策略为

$$q^*=q_1(\ell)\wedge 1, \tag{11}$$

当 $q^*<1$,最大调节系数为

$$R_J=\frac{B_2+\sqrt{B_2^2-2\beta^2(\lambda[M_Y(\ell)-1]-(\eta_2\sigma+a+a\eta_1)\ell)}}{\beta^2}, \tag{12}$$

当 $q^*=1$,最大调节系数为

$$R_J=\frac{(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)-\sqrt{(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)^2-2\beta^2\lambda[M_Y(r)-1]}}{\beta^2}. \tag{13}$$

根据定理 1 和鞅方法[12, pp. 10-12],能得到下面的定理:

定理 2　q^* 是最优再保险策略,R_J 是模型(4)的最大调节系数,所以 $\{e^{-R_JXq^*}\}$ 是鞅,且

$$\psi^{q^*}(u)\leqslant e^{-R_Ju}\leqslant e^{-R_J(q)u}, \tag{14}$$

其中 $q\in(\bar{q},1]$ 是任意再保险策略.

注 1　从定理 2,我们得到了一个对再保险破产概率的类似估计,也就是一个指数不等式. 因为 R_J 是最大的,因此得到的是破产概率 $\psi^{q^*}(u)$ 的最小指数上界.

现在假设索赔额 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 的指数分布,有以下引理:

引理 2　假设 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 的指数分布,式(7)的解为:

$$\ell=\frac{1}{\mu}\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}}\right). \tag{15}$$

引理 3　假设 $\{Y_i\}$ 服从参数为 $1/\mu$ 指数分布,使得调节系数最大的最优策略为:

$$q^*=\left[\frac{1}{\mu}\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}}\right)/R_J\right]\wedge 1, \tag{16}$$

其中

$$R_J=\frac{B_2+\sqrt{B_2^2-2\beta^2\left[\lambda\left(\sqrt{\frac{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}{a}}-1\right)-\frac{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}{\mu}\left(1-\sqrt{\frac{a}{a+a\eta_1+\eta_2\sigma}}\right)\right]}}{\beta^2} \tag{17}$$

是最大调节系数,当 $q^*<1$. 当 $q^*=1$,最大调节系数是:

$$R_J=\frac{\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2-\sqrt{\left[\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right]^2-2\beta^2\mu(\theta_2\sigma+a\theta_1)}}{\mu\beta^2}. \tag{18}$$

证明　把式(15)代入定理1,式(16)和式(17)就可得到,下面仅给出式(18)的证明.

当$\{Y_i\}$服从参数为$1/\mu$指数分布,

$$M_Y(r)=\frac{1/\mu}{1/\mu-r}=\frac{1}{1-\mu r},\tag{19}$$

其中$r<\frac{1}{\mu}$.

把式(19)代入式(10)有下面等式:

$$\frac{1}{2}\beta^2\mu r^2-\left(\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right)r+\theta_2\sigma+a\theta_1=0.\tag{20}$$

式(20)有2个根:

$$R_J^{+,-}=\frac{\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\pm\sqrt{\left[\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right]^2-2\beta^2\mu(\theta_2\sigma+a\theta_1)}}{\mu\beta^2}.$$

因为

$$R_J^{+}=\frac{\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2+\sqrt{\left[\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right]^2-2\beta^2\mu(\theta_2\sigma+a\theta_1)}}{\mu\beta^2}=$$

$$\frac{\mu(\theta_2\sigma+a+a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2+\sqrt{\left[\mu(a-\theta_2\sigma-a\theta_1)+\frac{1}{2}\beta^2\right]^2+4a\mu^2(\theta_2\sigma+a\theta_1)}}{\mu\beta^2}>\frac{1}{\mu},$$

舍掉R_J^+,即得式(18).

3　数值分析实例

假设索赔额$\{Y_i\}$服从参数为$1/\mu$指数分布,且$\theta_1=\eta_1=0$.

例1　令$a=\lambda\mu=3,\theta_2=0.3,\eta_2=0.4,\sigma^2=2\lambda\mu^2=6(\sigma^2=0.16)$. 结果由图1给出.

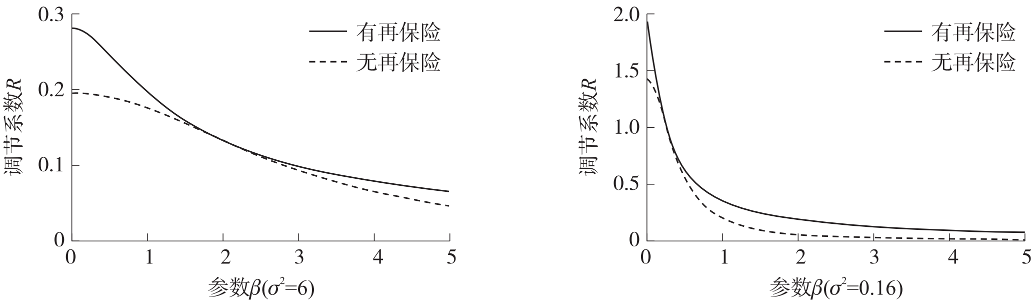

图1　参数β对调节系数R的影响

Fig.1　The effect of β on R

图1比较了J-D模型中有无再保险的情况. 首先得到了调节系数随着β增大而减小. 当$\sigma^2=0.16$,对应的最大调节系数总是大于当$\sigma^2=6$时最大调节系数. 而且,没有再保险情形下的最大调节系数总是不超过有再保险情形下的最大调节系数. 由此说明,一个合理的再保险策略的确能减小破产概率的最小指数上界. 这结论更加强调了要找到最大化调节系数的最优再保险策略的重要性.

［参考文献］

[1]　Browne S. Optimal investment policies for a firm with random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. Math Oper Res, 1995, 20(4): 937-958.

[2]　Hipp C, Plum M. Optimal investment for insurers[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(2): 215-228.

(下转第32页)

4 结语

本文讨论了矩形栅格的天线方向图的数学模型,利用天线阵元矩阵系数得到了一个普适性的多通道天线方向图函数,并通过一组天线阵元参数进行仿真验证,分别得到和、方位差、俯仰差通道的天线方向图,随后对天线方向图的一些特性参数进行了对比分析. 该算法能够灵活地获取不同通道天线方向图,可以很好地满足相控阵雷达仿真系统的设计要求,已经在一些仿真系统中得到应用.

[参考文献]

[1] Robert J Mailloux. Phased Array Antenna Handbook[M]. 2nd ed. MA:Artech House,2005.
[2] John D Kraus,Ronald J Marhefka. Antennas for all Applications[M]. New York:McGraw-Hill Companies,INC,2011.
[3] 张光义. 相控阵雷达原理[M]. 北京:国防工业出版社,2009.
[4] 陈志杰,李永祯,戴幻尧,等. 相控阵天线方向图的建模与实时仿真方法[J]. 计算机仿真,2011,28(3):31-35.
[5] 毕明雪,赵运弢,钱博. 正六边形平面相控阵天线的仿真研究[J]. 电子技术,2007,39(4):113.
[6] 李文臣,李青山,马飞. 相位和差单脉冲相控阵天线方向图仿真与性能分析[J]. 中国电子科学研究院学报,2011,6(4):336-339.

[责任编辑:丁　蓉]

(上接第 27 页)

[3] Schmidli H. Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting[J]. Scand Actuarial J,2001(1):55-68.
[4] Liu C,Yang H. Optimal investment for a insurer to minimize its probability of ruin[J]. North American Acruarial Journal,2004,8(2):11-31.
[5] Gerber H,Shiu E. Optimal dividends:analysis with Brownian motion[J]. North American Actuarial Journal,2004,8(1):1-20.
[6] 梁志彬,郭军义. 最优比例与超额损失组合再保险下的破产概率[J]. 数学学报:中文版,2010,53(5):857-870.
[7] Yang H,Zhang L. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2005,37(3):615-634.
[8] Hipp C,Schmidli H. Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case[J]. Scand Actuarial J,2004(5):321-335.
[9] Gaier J,Grandits P,Schachermeyer W. Asymptotic ruin probabilities and optimal investment[J]. Annal Applied Probability,2003,13(3):1 054-1 076.
[10] Centeno M L. Dependent risks and excess of loss reinsurance[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2005,37(2):229-238.
[11] Centeno M L,Guerra M. The optimal reinsurance strategy—the individual claim case[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2010,46(3):450-460.
[12] Grandell J. Aspects of Risk Theory[M]. New York:Springer-Verlag,1991.
[13] Dufresne F,Gerber H. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion[J]. Insurance:Mathematics and Economics,1991,10(1):51-59.
[14] Rolski T,Schmidli H,Schmidt V,et al. Stochastic processes for insurance and finance[M]. Chichester:John Wiley,1999.

[责任编辑:丁　蓉]