具有超前和滞后的 2n 阶泛函差分方程的周期解

彭 刚[1],崔 艳[1],石海平[2]

(1.广东岭南职业技术学院博雅教育学院,广东 广州 510663)
(2.广东建设职业技术学院现代商务与管理系,广东 广州 510450)

[摘要] 研究具有超前和滞后的 $2n$ 阶泛函差分方程周期解的存在性.将差分方程周期解的存在性问题转化成相应的泛函临界点的存在性问题.利用临界点理论,获得了此方程至少存在 2 个非平凡周期解的充分条件,推广并改进了已有文献的一些结论.

[关键词] 泛函差分方程,周期解,环绕定理,离散变分理论
[中图分类号]O175.1 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)02-0039-05

Periodic Solutions of a 2nth-Order Functional Difference Equation Containing Both Advance and Retardation

Peng Gang[1],Cui Yan[1],Shi Haiping[2]

(1.School of Humanities and Social Sciences,Guangdong Lingnan Institute of Technology,Guangzhou 510663,China)
(2.Modern Business and Management Department,Guangdong Construction Vocational Technology Institute,Guangzhou 510450,China)

Abstract:The existence of periodic solutions to a $2n$th-order functional difference equation containing both advance and retardation is studied. By using the critical point theory and transferring the existence of the periodic solutions of the equations into the existence of critical points of some functional, a sufficient condition for the existence of at least two nontrivial periodic solutions is obtained. Our result extends and improves some conclusions in the existing literatures.

Key words:functional difference equation,periodic solution,linking theorem,discrete variational theory

1 引言及主要结果

令 $\mathbf{N}$,$\mathbf{Z}$ 及 $\mathbf{R}$ 分别表示自然数集、整数集和实数集.任取 $a,b\in\mathbf{Z}$ 满足 $a\leqslant b$,定义 $\mathbf{Z}(a)=\{a,a+1,\cdots\}$,$\mathbf{Z}(a,b)=\{a,a+1,\cdots,b\}$.$*$ 表示向量的转置.

考虑具有超前和滞后的 $2n$ 阶泛函差分方程

$$\Delta^n(r_{k-n}\Delta^n u_{k-n})=(-1)^n f(k,u_{k+M},u_k,u_{k-M}),n\in\mathbf{Z}(1),k\in\mathbf{Z} \tag{1}$$

周期解的存在性.其中,Δ 是向前差分算子 $\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$,$\Delta^2 u_k=\Delta(\Delta u_k)$,$r_k>0$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的实值函数,M 是非负整数,$f\in C(\mathbf{R}^4,\mathbf{R})$.对于给定的正整数 T,r_k 与 $f(k,v_1,v_2,v_3)$ 都是关于 k 的 T-周期函数.

方程(1)可以看作下列具有超前和滞后的泛函微分方程的离散类似

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[r(t)\frac{\mathrm{d}^n u(t)}{\mathrm{d}t^n}\right]=(-1)^n f(t,u(t+M),u(t),u(t-M)),t\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

对于具有超前和滞后的泛函微分方程的研究,在应用和理论上都有十分重要的意义[1].

众所周知,差分方程跟微分方程一样,也是对现实世界的一种描述.自 20 世纪 70 年代以来,非线性差分方程已广泛应用于研究计算机科学、经济学、神经网络、生态学及控制论等学科中出现的离散模型[2].而且,由于在生产实际和科学研究中所遇到的微分方程往往很复杂,在很多情况下都不可能给出解的解析

收稿日期:2013-06-03.
基金项目:国家自然科学基金(11171078)、高等学校博士学科点专项科研基金(20114410110002)、广东省教育科学"十一五"规划课题(2010tjk074)、广东省自然科学基金(S2013010014460).
通讯联系人:石海平,博士,副教授,研究方向:离散动力系统理论及应用.E-mail:shp7971@163.com

表达式,为了数值模拟的需要,常常需要将微分方程加以离散化,研究其相应的差分方程. 因此,理论和实际的需要使得差分方程理论得到迅速的发展. 文献[3]考虑了具有滞后、超前项的泛函差分方程的单调迭代技术,文献[4,5]研究了具有超前和滞后的泛函差分方程同宿轨的存在性. 本文将应用临界点理论给出具有超前和滞后的 $2n$ 阶泛函差分方程(1)周期解存在性和多重性的充分条件,所得结果推广和改进了文献[6,7]相关结果. 所采用的方法主要是利用环绕定理结合变分技巧. 研究的主要结果如下.

定理 1　假设下列条件满足:

(F_1) 对任意的 $k\in\mathbf{Z}$,存在泛函 $F(k,v_1,v_2)\in C^1(\mathbf{Z}\times\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ 满足 $F(k,v_1,v_2)\geqslant 0$,且

$$F(k+T,v_1,v_2)=F(k,v_1,v_2),$$

$$\frac{\partial F(k-M,v_2,v_3)}{\partial v_2}+\frac{\partial F(k,v_1,v_2)}{\partial v_2}=f(k,v_1,v_2,v_3);$$

(F_2) 存在常数 $\delta>0$,$\alpha\in\left(0,\frac{1}{4}\underline{r}\lambda_{\min}^{n}\right)$,使得对任意的 $v_1^2+v_2^2\leqslant\delta^2$ 及 $k\in\mathbf{Z}(1,T)$,

$$F(n,v_1,v_2)\leqslant\alpha(v_1^2+v_2^2);$$

(F_3) 存在常数 $\rho>0$,$\gamma>0$,$\beta\in\left(\frac{1}{4}\bar{r}\lambda_{\max}^{n},+\infty\right)$,使得对任意的 $v_1^2+v_2^2\geqslant\rho^2$ 及 $k\in\mathbf{Z}(1,T)$,

$$F(n,v_1,v_2)\geqslant\beta(v_1^2+v_2^2)-\gamma,$$

其中 $\underline{r}=\min\limits_{n\in\mathbf{Z}}\{r_k\}$,$\bar{r}=\max\limits_{n\in\mathbf{Z}}\{r_k\}$,$\lambda_{\min}$ 与 $\lambda_{\max}$ 是式(6)的常数.

则对任意给定的正整数 $m>0$,方程(1)至少存在 2 个非平凡 mT-周期解.

注 1　由 (F_3) 容易知道存在常数 $\gamma'>0$,使得

$$(F_3')\ F(k,v_1,v_2)\geqslant\beta(v_1^2+v_2^2)-\gamma',\ \forall\,(k,v_1,v_2)\in\mathbf{Z}(1,T)\times R^2.$$

事实上,令 $\gamma_1=\max\{|F(k,v_1,v_2)-\beta(v_1^2+v_2^2)+\gamma|:v_1^2+v_2^2\leqslant\rho^2,k\in\mathbf{Z}(1,T)\}$,$\gamma'=\gamma+\gamma_1$,易证所得的结论.

注 2　文献[6,7]获得当非线性项在超线性增长的条件下周期解的存在性,在(1)中分别取 $M=0$,$n=2$ 及 $M=0$,当非线性项在非超非次线性增长的条件下分别推出文献[6,7]的结果. 因此,定理 1 推广并改进了文献[6,7]的结果.

2　变分框架及基本引理

为了应用临界点理论,将引进适当的变分框架及给出一些证明结论所需的引理. 首先,介绍一些基本的概念.

设 S 表示由所有如下形式的实数序列组成的向量空间,

$$\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\mathbf{Z}}=(\cdots,u_{-k},\cdots,u_{-1},u_0,u_1,\cdots,u_k,\cdots).$$

对任意的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in S$,$a,b\in\mathbf{R}$,$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$ 定义为

$$a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\{au_k+bv_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}.$$

则 S 是向量空间.

对于给定的正整数 m 及 T,定义 S 的子空间 E_{mT} 为

$$E_{mT}=\{\boldsymbol{u}\in S\,|\,u_{k+mT}=u_n,\ \forall\,k\in\mathbf{Z}\}.$$

显然,E_{mT} 与 $\mathbf{R}^{mT}$ 同构. 在 E_{mT} 中定义内积

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_{E_{mT}}=\sum_{j=1}^{mT}u_jv_j,\ \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in E_{mT},\tag{3}$$

由此内积可诱导出空间 E_{mT} 中的范数 $\|\cdot\|$ 为:

$$\|\boldsymbol{u}\|=\left(\sum_{j=1}^{mT}u_j^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\,\boldsymbol{u}\in E_{mT}.\tag{4}$$

显然,$(E_{mT},\langle\cdot,\cdot\rangle_{mT})$ 是有限维 Hilbert 空间,且与 $\mathbf{R}^{mT}$ 线性同构.

对任意的 $\boldsymbol{u}\in E_{mT}$,在空间 E_{mT} 上定义如下的泛函 J:

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mT}r_{k-1}(\Delta^n u_{k-1})^2-\sum_{k=1}^{mT}F(k,u_{k+M},u_k).\tag{5}$$

显然,$J\in C^1(E_{mT},\mathbf{R})$ 且对任意的 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in E_{mT}$,由 $u_0=u_{mT},u_1=u_{mT+1}$,得

$$\frac{\partial J}{\partial u_k}=(-1)^n\Delta^n(r_{k-n}\Delta^n u_{k-n})-f(k,u_{k+M},u_k,u_{k-M}),\ \forall k\in\mathbf{Z}(1,mT).$$

因此,$\boldsymbol{u}$ 是 J 在 E_{mT} 上的临界点当且仅当

$$\Delta^n(r_{k-n}\Delta^n u_{k-n})=(-1)^n f(k,u_{k+M},u_k,u_{k-M}),\ \forall k\in\mathbf{Z}(1,mT).$$

由于 $\boldsymbol{u}=\{u_k\}_{k\in\mathbf{Z}}\in E_{mT}$ 及 $r_k,f(k,v_1,v_2,v_3)$ 关于 k 的周期性,因此,寻求方程(1)的 mT–周期解问题就转化为寻求泛函 J 在 E_{mT} 上的临界点. 从而,泛函 J 在 E_{mT} 上的临界点正好是方程(1)的古典 mT–周期解.

设 $mT\times mT$ 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

显然,0 是 $\boldsymbol{P}$ 的特征值,$\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{\sqrt{mT}}(1,1,\cdots,1)^*\in E_{mT}$ 是 $\boldsymbol{P}$ 对应于特征值 0 的特征向量. 假设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{mT-1}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的其它特征值. 由矩阵理论,我们有对一切的 $j\in\mathbf{Z}(1,mT)$,$\lambda_j>0$. 定义

$$\begin{cases}\lambda_{\min}=\min\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{mT-1}\}=2\left(1-\cos\frac{2}{mT}\pi\right),\\ \lambda_{\max}=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{mT-1}\}=\begin{cases}4, & \text{当 } mT \text{ 为偶数时},\\ 2\left(1+\cos\frac{2}{mT}\pi\right), & \text{当 } mT \text{ 为奇数时}.\end{cases}\end{cases}\tag{6}$$

记 $W=\ker\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{u}\in E_{mT}\mid \boldsymbol{P}\boldsymbol{u}=0\in\mathbf{R}^{mT}\}$. 则 $W=\{\boldsymbol{u}\in E_{mT}\mid \boldsymbol{u}=\{c\},c\in\mathbf{R}\}$. 令 V 是 W 关于 E_{mT} 的正交补空间,即 $E_{mT}=V\oplus W$.

为方便起见,将 $\boldsymbol{u}\in E_{mT}$ 与 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,\cdots,u_{mT})^*$ 看作是一致的.

设 E 是实的 Banach 空间,$J\in C^1(E,\mathbf{R})$,即 J 是定义在 E 上的连续 Fréchet 可微的泛函. 称泛函 J 满足 Palais-Smale 条件(简称 P. S. 条件),如果对任意的序列 $\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}\subset E$,若 $\{J(\boldsymbol{u}^{(i)})\}$ 有界且 $J'(\boldsymbol{u}^{(i)})\to 0\ (i\to\infty)$,则 $\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$ 在 E 中存在收敛的子列.

记 B_ρ 为 E 上中心在原点半径为 ρ 的开球,∂B_ρ 为 B_ρ 的边界.

引理 1(环绕定理[8]) 设 E 是实 Banach 空间,$E=E_1\oplus E_2$,其中 E_1 是 E 的有限维子空间. 假设 $J\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足 P. S. 条件,并且

(J_1)存在常数 $a>0,\rho>0$ 使得 $J|_{\partial B_\rho\cap E_2}\geqslant a$;

(J_2)存在 $\boldsymbol{e}\in\partial B_1\cap E_2$ 以及常数 $R_0>\rho$,使得 $J|_{\partial Q}\leqslant 0$,其中 $Q=(\bar{B}_{R_0}\cap E_1)\oplus\{r\boldsymbol{e}\mid 0<r<R_0\}$.

则 J 存在临界值 $c\geqslant a$,其中 $c=\inf_{h\in\Gamma}\sup_{\boldsymbol{u}\in Q}J(h(\boldsymbol{u}))$,$\Gamma=\{h\in C(\bar{Q},E)\mid h|_{\partial Q}=id\}$,这里 id 表示恒同算子.

引理 2 若条件(F_1)–(F_3)成立,则 J 在 E_{mT} 上有上界.

证明 由(F_3')及 $\beta>\frac{1}{4}\bar{r}\lambda_{\max}^n$,对任意的 $\boldsymbol{u}\in E_{mT}$,有

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mT}r_k(\Delta^n u_k,\Delta^n u_k)-\sum_{k=1}^{mT}F(k,u_{k+M},u_k)\leqslant\frac{\bar{r}}{2}\boldsymbol{x}^*P\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{mT}[\beta(u_{k+M}^2+u_k^2)-\gamma']\leqslant$$
$$\frac{\bar{r}}{2}\lambda_{\max}\|\boldsymbol{x}\|^2-2\beta\|\boldsymbol{u}\|^2+mT\gamma',$$

其中,$\boldsymbol{x}=(\Delta^{n-1}u_1,\Delta^{n-1}u_2,\cdots,\Delta^{n-1}u_{mT})$. 因为

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}u_{k+1}-\Delta^{n-2}u_k)^2\leqslant\lambda_{\max}\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}u_k)^2\leqslant\lambda_{\max}^{n-1}\|\boldsymbol{u}\|^2,$$

所以

$$J(\boldsymbol{u})\leqslant\left(\frac{\bar{r}}{2}\lambda_{\max}^{n}-2\beta\right)\|\boldsymbol{u}\|^{2}+mT\gamma'\leqslant mT\gamma'.$$

故存在常数 $K=mT\gamma'>0$,使得对任意的 $\boldsymbol{u}\in E_{mT}$,$J(\boldsymbol{u})\leqslant K$. 证毕.

注 3　当 $mT=1$ 是平凡的. 当 $mT=2$,$\boldsymbol{P}$ 有不同的形式,即

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix},$$

然而,在这种情况下,容易完成定理 1 的证明.

引理 3　若条件$(F_1)-(F_3)$成立. 则泛函 J 满足 P. S. 条件.

证明　设$\{J(\boldsymbol{u}^{(i)})\}$是有下界的序列,即存在常数 M_1,使得对任意的 $i\in N$,$-M_1\leqslant J(\boldsymbol{u}^{(i)})$. 由引理 2 的证明,易知

$$-M_1\leqslant J(\boldsymbol{u}^{(i)})\leqslant\left(\frac{\bar{r}}{2}\lambda_{\max}^{n}-2\beta\right)\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^{2}+mT\gamma',\ \forall\, i\in\mathbf{N}.$$

因此,

$$\left(2\beta-\frac{\bar{r}}{2}\lambda_{\max}^{n}\right)\|\boldsymbol{u}^{(i)}\|^{2}\leqslant M_1+mT\gamma'.$$

由 $\beta>\frac{1}{4}\bar{r}\lambda_{\max}^{n}$知,$\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$在 E_{mT}中有界. 从而,$\{\boldsymbol{u}^{(i)}\}$在 E_{mT}中有收敛的子列. 证毕.

3　定理 1 的证明

证　由引理 2,J 在 E_{mT}上有上界. 定义 $c_0=\sup\limits_{\boldsymbol{u}\in E_{mT}}J(\boldsymbol{u})$. 从引理 2 的证明可知 $\lim\limits_{\|\boldsymbol{u}\|\to+\infty}J(\boldsymbol{u})=-\infty$. 这意味着$-J(\boldsymbol{u})$是强制的. 由 $J(\boldsymbol{u})$的连续性,存在 $\bar{\boldsymbol{u}}\in E_{mT}$,使得 $J(\bar{\boldsymbol{u}})=c_0$. 显然,$\bar{\boldsymbol{u}}$ 是 J 的临界点.

断言 $c_0>0$. 事实上,由(F_2)及引理 2 的证明过程知,对任意的 $\boldsymbol{u}\in V$,$\|\boldsymbol{u}\|\leqslant\delta$,

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant\frac{1}{2}\bar{r}\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}-\alpha\sum_{k=1}^{mT}(u_{k+M}^{2}+u_{k}^{2})\geqslant\frac{1}{2}\bar{r}\lambda_{\min}\|\boldsymbol{x}\|^{2}-2\alpha\|\boldsymbol{u}\|^{2},$$

其中,$\boldsymbol{x}=(\Delta^{n-1}u_1,\Delta^{n-1}u_2,\cdots,\Delta^{n-1}u_{mT})$. 因为

$$\|\boldsymbol{x}\|^{2}=\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}u_{k+1}-\Delta^{n-2}u_{k})^{2}\geqslant\lambda_{\min}\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}u_{k})^{2}\geqslant\lambda_{\min}^{n-1}\|\boldsymbol{u}\|^{2},$$

所以

$$J(\boldsymbol{u})\geqslant\left(\frac{1}{2}\bar{r}\lambda_{\min}^{n}-2\alpha\right)\|\boldsymbol{u}\|^{2}.$$

取 $\sigma=\left(\frac{1}{2}\bar{r}\lambda_{\min}^{n}-2\alpha\right)\delta^{2}$. 则 $J(\boldsymbol{u})\geqslant\sigma$,$\forall\,\boldsymbol{u}\in V\cap\partial B_{\delta}$. 因此,$c_0=\sup_{\boldsymbol{u}\in E_{mT}}J(\boldsymbol{u})\geqslant\sigma>0$. 同时,也证明了存在常数 $\sigma>0$ 及 $\delta>0$,使得 $J|_{\partial B_{\delta}\cap V}\geqslant\sigma$. 即,$J$ 满足环绕定理的条件(J_1).

注意到对任意的 $\boldsymbol{u}\in W$,有 $\sum\limits_{k=1}^{mT}r_{k-1}(\Delta^{n}u_{k-1})^{2}=0$,从而

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mT}r_{k-1}(\Delta^{n}u_{k-1})^{2}-\sum_{k=1}^{mT}F(k,u_{k+M},u_{k})=-\sum_{k=1}^{mT}F(k,u_{k+M},u_{k})\leqslant 0.$$

因此,J 对应于临界值 c_0 的临界点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 是方程(1)的一个非平凡 mT-周期解.

为了得到方程(1)的不同于 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的 mT-周期解,需应用引理 1. 由引理 3,知 J 在 E_{mT}上满足 P. S. 条件. 下面,将验证条件(J_2).

取 $\boldsymbol{e}\in\partial B_1\cap V$,对任意的 $\boldsymbol{z}\in W$ 及 $s\in\mathbf{R}$,令 $\boldsymbol{u}=s\boldsymbol{e}+\boldsymbol{z}$. 则由引理 2 的证明过程知

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{mT}r_{k}(\Delta^{n}u_{k},\Delta^{n}u_{k})-\sum_{k=1}^{mT}F(k,u_{k+M},u_{k})\leqslant\frac{\bar{r}}{2}s^{2}\sum_{n=1}^{pT}(\Delta^{n}e_{k},\Delta^{n}e_{k})-\sum_{k=1}^{mT}F(k,se_{k+M}+z_{k+M},se_{k}+z_{k})\leqslant$$

$$\frac{\bar{r}}{2}s^{2}\boldsymbol{y}^{*}\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}-\sum_{k=1}^{mT}\{\beta[(se_{k+M}+z_{k+M})^{2}+(se_{k}+z_{k})^{2}]-\gamma'\}\leqslant\frac{\bar{r}}{2}s^{2}\lambda_{\max}\|\boldsymbol{y}\|^{2}-2\beta\sum_{k=1}^{mT}(se_{k}+z_{k})^{2}+mT\gamma'=$$

$$\frac{\bar{r}}{2}s^2\lambda_{\max}\|\boldsymbol{y}\|^2-2\beta s^2-2\beta\|\boldsymbol{z}\|^2+mT\gamma',$$

其中,$\boldsymbol{y}=(\Delta^{n-1}e_1,\Delta^{n-1}e_2,\cdots,\Delta^{n-1}e_{mT})$. 又因为

$$\|\boldsymbol{y}\|^2=\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}e_{k+1}-\Delta^{n-2}e_k)^2\leqslant\lambda_{\max}\sum_{k=1}^{mT}(\Delta^{n-2}e_k)^2\leqslant\lambda_{\max}^{n-1},$$

从而,

$$J(\boldsymbol{u})\leqslant\left(\frac{\bar{r}}{2}\lambda_{\max}^{n}-2\beta\right)s^2-2\beta\|\boldsymbol{z}\|^2+mT\gamma'\leqslant-2\beta\|\boldsymbol{z}\|^2+mT\gamma'.$$

因此,存在正常数 $R_1>\delta$,使得对任意的 $\boldsymbol{u}\in\partial Q$,$J(\boldsymbol{u})\leqslant 0$,其中 $Q=(\bar{B}_{R_1}\cap W)\oplus\{s\boldsymbol{e}\mid 0<s<R_1\}$. 由环绕定理,$J$ 存在临界值 $c\geqslant\sigma>0$,其中

$$c=\inf_{h\in\Gamma}\sup_{\boldsymbol{u}\in Q}J(h(\boldsymbol{u})),$$

及 $\Gamma=\{h\in C(\bar{Q},E)\mid h|_{\partial Q}=id\}$.

假设 $\tilde{\boldsymbol{u}}\in E_{mT}$是对应于临界值 c 的 J 的临界点,即 $J(\tilde{\boldsymbol{u}})=c$. 若 $\tilde{\boldsymbol{u}}\neq\bar{\boldsymbol{u}}$,则定理 1 的结论成立. 若 $\tilde{\boldsymbol{u}}=\bar{\boldsymbol{u}}$,有 $c_0=J(\bar{\boldsymbol{u}})=J(\tilde{\boldsymbol{u}})=c$. 即 $\sup_{\boldsymbol{u}\in E_{mT}}J(\boldsymbol{u})=\inf_{h\in\Gamma}\sup_{\boldsymbol{u}\in Q}J(h(\boldsymbol{u}))$.

选取 $h=id$,有$\sup_{\boldsymbol{u}\in Q}J(\boldsymbol{u})=c_0$. 由于 $\boldsymbol{e}\in\partial B_1\cap V$ 的选取的任意性,可选取$-\boldsymbol{e}\in\partial B_1\cap V$. 通过类似的讨论,存在正常数 $R_2>\delta$,使得对任意的 $\boldsymbol{u}\in\partial Q_1$,$J(\boldsymbol{u})\leqslant 0$,其中 $Q_1=(\bar{B}_{R_2}\cap W)\oplus\{r\boldsymbol{e}\mid 0<s<R_2\}$.

再一次应用环绕定理,J 又存在临界值 $c'\geqslant\sigma>0$,其中

$$c'=\inf_{h\in\Gamma_1}\sup_{\boldsymbol{u}\in Q_1}J(h(\boldsymbol{u})),$$

且 $\Gamma_1=\{h\in C(\bar{Q}_1,E)\mid h|_{\partial Q_1}=id\}$.

若 $c'\neq c_0$,则定理 1 证毕. 若 $c'=c_0$,则$\sup_{\boldsymbol{u}\in Q_1}J(\boldsymbol{u})=c_0$. 由 $J|_{\partial Q}\leqslant 0$ 及 $J|_{\partial Q_1}\leqslant 0$ 知,J 在集合 Q 与 Q_1 的内部达到最大值. 然而,$Q\cap Q_1\subset W$ 且对任意的 $\boldsymbol{u}\in W$,$J(\boldsymbol{u})\leqslant 0$. 因此,必定存在一点 $\boldsymbol{u}'\in E_{mT}$,$\boldsymbol{u}'\neq\tilde{\boldsymbol{u}}$ 且 $J(\boldsymbol{u}')=c'=c_0$. 证毕.

注 4　最后,给出一个例子来应用定理 1.

对任意的 $n\in\mathbf{Z}(1)$,$k\in\mathbf{Z}$,假设

$$\Delta^n(r_{k-n}\Delta^n u_{k-n})=(-1)^n\mu u_k[\varphi_k(u_{k+M}^2+u_k^2)^{\frac{\mu}{2}-1}+\varphi_{k-M}(u_k^2+u_{k-M}^2)^{\frac{\mu}{2}-1}],\tag{7}$$

其中 $\mu>2$,$r_k>0$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的实值函数,M 是非负整数,φ 连续可微且 $\varphi_k>0$,T 是给定的正整数,$r_{k+T}=r_k$,$\varphi_{k+T}=\varphi_k$. 则 $F(k,v_1,v_2)=\varphi_k(v_1^2+v_2^2)^{\frac{\mu}{2}}$. 容易验证定理 1 的条件满足. 因此,方程(7)至少存在 2 个非平凡 mT-周期解.

[参考文献]

[1] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥:安徽教育出版社,1994.

[2] Agarwal R P. Difference Equations and Inequalities:Theory,Methods and Applications[M]. New York:Marcel Dekker,1992.

[3] 田淑环,王文丽. 具有滞后、超前项的泛函差分方程的单调迭代技术[J]. 保定学院学报,2009,22(4):17-19.

[4] Yu Jianshe,Shi Haiping,Guo Zhiming. Homoclinic orbits for nonlinear difference equations containing both advance and retardation[J]. J Math Anal Appl,2009,352(2):799-806.

[5] Chen Peng,Tang Xianhua. Existence of many homoclinic orbits for fourth-order difference systems containing both advance and retardation[J]. Comput Math Appl,2011,217(9):4 408-4 415.

[6] Cai Xiaochun,Yu Jianshe,Guo Zhiming. Existence of periodic solutions for fourth-order difference equations[J]. Comput Math Appl,2005,50(1/2):49-55.

[7] Cai Xiaochun,Yu Jianshe. Existence of periodic solutions for a 2nth-order nonlinear difference equation[J]. J Math Anal Appl,2007,329(2):870-878.

[8] Rabinowitz P H. Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations[M]. New York:Amer Math Soc,1986.

[责任编辑:丁　蓉]