含 Hardy 位势的双调和方程在 $\mathbf{R}^4$ 中非平凡解问题

伍　芸

(贵州师范大学数学与计算机科学学院,贵州 贵阳 550001)

[摘要]　本文考虑在 $\mathbf{R}^4$ 中含 Hardy 位势 $\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}$ 的双调和方程非平凡解问题. 通过重新赋范的方法,将 $H_0^2(\Omega)$ 赋范并按新的范数建立一个完备的、新的 Hilbert 空间 H. 并利用 Hardy-Rellich 不等式,证明了此双调和方程在 H 中存在一个非平凡解.

[关键词]　特征值问题,双调和,Hardy 位势

[中图分类号]O175.25　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2014)02-0044-05

Nontrivial Solution Problems of Biharmonic Equation with Hardy Potential in $\mathbf{R}^4$

Wu Yun

(School of Mathematics and Computer Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

Abstract: This paper considers eigenvalue problems of a biharmonic equation with Hardy potential: $\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}$ in $\mathbf{R}^4$. By the way of re-normed, we have a new Hilbert space H. Furthermore using the Hardy-Rellich inequality, we prove that there is a nontrivial solution for these problems in a new space H.

Key words: eigenvalue problem, biharmonic, Hardy potential

2006 年,Adimurthi,Massimo Grossi 和 Sanjiban Santra[1] 证明 Hardy-Rellich 不等式:

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^4$ 是有界区域,$0\in\Omega$,则存在 $R_0>0$, $C>0$,使得当 $R\geqslant R_0$, $\boldsymbol{u}\in H_0^2(\Omega)$ 时,

$$\int_\Omega |\Delta\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_\Omega\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

设 λ^* 表示使得上述不等式成立的最佳常数,即

$$\lambda^*=\inf_{u\in H_0^2(\Omega)}\left\{\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\middle|\,\int_\Omega\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1\right\}, \tag{2}$$

但这样的 λ^* 是不可达的. 这就意味着下述特征值问题:

$$\begin{cases}\Delta^2\boldsymbol{u}-\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}=\lambda\boldsymbol{u}, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\\ \boldsymbol{u}\in H_0^2(\Omega), & \end{cases} \tag{3}$$

当 $\lambda=\lambda^*$ 时无解.

陈志辉、沈尧天与姚仰新[2] 考虑了(3)的摄动问题:

收稿日期:2013-08-26.

基金项目:国家自然科学基金(10771074)、贵州省科学技术厅—贵州师范大学联合基金(黔科合 J 字 LKS[2012]14 号).

通讯联系人:伍芸,副教授,研究方向:非线性椭圆型方程. E-mail:wuyun73224@163.com

$$\begin{cases}\Delta^2 \boldsymbol{u}-\mu\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}=\lambda \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\\ \boldsymbol{u}\in H_0^2(\Omega), \end{cases}\tag{4}$$

则当 $0<\mu<1$ 时,问题(4)有解.

文献[1]讨论了进一步的摄动问题:

$$\begin{cases}\Delta^2 \boldsymbol{u}-\dfrac{q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}=\lambda \boldsymbol{u}, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\\ \boldsymbol{u}\in H_0^2(\Omega), \end{cases}\tag{5}$$

其中 $0\leqslant q(x)\leqslant 1$,上述问题存在解.

定义

$$\lambda(q)=\inf_{u\in H_0^2(\Omega)}\left\{\int_\Omega|\Delta \boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega\frac{q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\middle|\,\int_\Omega \boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1\right\},$$

他们证明了:

(i)如果

$$\lim_{x\to 0}\inf(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(1-q(\boldsymbol{x}))>3,\tag{6}$$

则当 $\lambda=\lambda(q)$ 时,问题(5)有一个解.

(ii)如果存在 $R_1>0$,使得

$$\sup_{0<|\boldsymbol{x}|\leqslant R_1}(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(1-q(\boldsymbol{x}))\leqslant 3,\tag{7}$$

则对任给的 $\lambda\in\mathbf{R}$,问题(5)都无解.

条件(6)几乎已经是最弱的,无法改进. 显然 $q(\boldsymbol{x})\equiv 1$ 是不满足(i)的,因为由(ii)知此时问题(5)是无解的. 但是受到文献[3]的启发,如果在新的 Hilbert 空间中讨论特征值问题(5),我们发现条件(6)还是可以改进的,当然此时解在另外一个新的 Hilbert 空间中.

我们将 $H_0^2(\Omega)$ 空间按下列范数

$$\|\boldsymbol{u}\|_H=\int_\Omega\left(|\Delta \boldsymbol{u}|^2-\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

的完备化空间,记为 H. H 按如下的内积

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_H=\int_\Omega\left(\Delta \boldsymbol{u}\Delta \boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

是 Hilbert 空间. 显然,范数 $\|\cdot\|_H$ 与范数 $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$ 不等价. 但我们知道,当 $1\leqslant p<2$ 时,由文献[1]中的 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 估计,则有

$$H_0^2(\Omega)\subset H\subset W_0^{1,P}(\Omega).$$

在下面的引理 3 中,我们将证明,如果 $\dfrac{2N}{N+2}<p<2$,则 $H\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 并且嵌入是紧的.

为了直观看到这些,下面我们举例说明 H 与 $H_0^2(\Omega)$ 及 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 之间的关系. 考察定义在 $B_1(0)$ 上的函数 $\boldsymbol{u}(|\boldsymbol{x}|)=\boldsymbol{u}(r)$, $\boldsymbol{u}(r)$ 在 $0<r<r_0<e^{-1}$ 上定义为

$$\boldsymbol{u}(r)=(\ln 1/r)^a(\ln\ln 1/r)^\delta,\tag{8}$$

在 $B_1(0)\setminus B_{R_0}(0)$ 上光滑,并且

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(R_0)=(\ln 1/R_0)^a(\ln\ln 1/R_0)^\delta,\\ \boldsymbol{u}(1)=\left.\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\gamma}\right|_{|\boldsymbol{x}|=1}=0.\end{cases}\tag{9}$$

容易看到 $\boldsymbol{u}\in H_0^2(\Omega)$ 当且仅当 $a<1/2$,或者 $a=1/2$ 且 $\delta<-1/2$,而由下面的引理 1,$\boldsymbol{u}\in H$ 当且仅当

$a<1/2$,或者 $a=1/2$ 且 $\delta<0$.

我们在 H 中讨论问题(5),即

$$\begin{cases}\Delta^2 \boldsymbol{u}-\dfrac{q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}=\lambda\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, & x\in\Omega,\\ \boldsymbol{u}=\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega,\\ \boldsymbol{u}\in H,\end{cases} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是$\partial\Omega$ 的单位外法向量,$0\leqslant q(\boldsymbol{x})\leqslant 1$,$\eta(\boldsymbol{x})\geqslant 0$,$\eta(\boldsymbol{x})\in L^\infty(\Omega\backslash Br(0))$,$\forall r>0$,且

$$\lim_{x\to 0}\sup|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2\eta(\boldsymbol{x})=0. \tag{11}$$

我们记

$$\lambda(q)=\inf_{\boldsymbol{u}\in H}\left\{I(\boldsymbol{u})\ \middle|\ \int_\Omega \eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1\right\}, \tag{12}$$

其中

$$I(\boldsymbol{u})=\int_\Omega\left(|\Delta \boldsymbol{u}|^2-\frac{q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

则当 $\boldsymbol{u}\in H$ 时,

$$\|\boldsymbol{u}\|_H^2\leqslant I(\boldsymbol{u})\leqslant\|\boldsymbol{u}\|_{H_0^2(\Omega)}^2. \tag{13}$$

定义含权 $L^2(\Omega)$空间 $L_\eta^2(\Omega)$的内积和范数

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$|\boldsymbol{u}|_{2,\eta}=\left(\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2},$$

我们有:

定理 1　在 $\mathbf{R}^4$ 中,$\eta(\boldsymbol{x})$满足(11),$0\leqslant q(\boldsymbol{x})\leqslant 1$. 则当 $\lambda=\lambda(q)$时,特征值问题(10)有一个非平凡解.

定理 2　当 $n\to\infty$ 时,$\lambda_n(q)\to\infty$. 其中

$$\lambda_n(q)=\inf_{\boldsymbol{u}\in H}\left\{I(\boldsymbol{u})\ \middle|\ \int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1,(\boldsymbol{u},u_i)=0,i=1,\cdots,n-1\right\}$$

是问题(10)的第 n 个特征值.

1　引理

引理 1　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^4$ 是球对称有界区域. 设当 $0<|\boldsymbol{x}|<r_1<Re^{-1}$时,

$$\psi(\boldsymbol{x})=(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^a(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^\delta,$$

且在$|\boldsymbol{x}|=r_1$ 和$\partial\Omega$之间可以用光滑函数连接,使得

$$\psi(r_1)=(\ln R/r_1)^a(\ln\ln R/r_1)^\delta,\psi|_{\partial\Omega}=0,$$

则 $\psi(x)\in H$ 当且仅当 $a<1/2$ 或者 $a=1/2$ 且 $\delta<0$.

证明　(i)对 $\psi(\boldsymbol{x})=(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^a(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^\delta$,我们有

$$\psi'(r)=-\frac{a}{r}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^\delta-\frac{\delta}{r}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^{\delta-1},$$

$$\psi''(r)=\frac{a}{r^2}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^\delta+\frac{a(a-1)}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^\delta+\frac{\delta}{r^2}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^{\delta-1}+$$
$$\frac{2a\delta-\delta}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^{\delta-1}+\frac{\delta(\delta-1)}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^{\delta-2},$$

因此

$$\Delta\psi(\boldsymbol{x})=\psi''(r)+\frac{3}{r}\psi'(r)=-\frac{2a}{r^2}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^\delta-\frac{2\delta}{r^2}(\ln R/r)^{a-1}(\ln\ln R/r)^{\delta-1}+$$
$$\frac{a(a-1)}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^\delta+\frac{\delta(\delta-1)}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^{\delta-2}+\frac{2a\delta-\delta}{r^2}(\ln R/r)^{a-2}(\ln\ln R/r)^{\delta-1},$$

由 H 的定义,容易验证 $\psi\in H$ 当且仅当

$$\int_\Omega \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^4}(\ln R/r)^{2a-2}(\ln\ln R/r)^{2\delta-1}<\infty.$$

而该不等式成立当且仅当 $a<1/2$ 或者 $a=1/2$ 且 $\delta<0$. 证毕.

引理 2　设 $N=4$, $1\leqslant p<2$,则存在常数 $R_0>0$, $C>0$,使得当 $R\geqslant R_0$, $u\in H_0^2(\Omega)$ 时,

$$\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_\Omega\frac{\boldsymbol{u}^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}+C\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{14}$$

证明　见文献[1].

引理 3　希尔伯特空间 H 嵌入到 $L^2(\Omega)$ 并且嵌入是紧的.

证明　由于 $H_0^2(\Omega)$ 在 H 中稠密,因此不等式(14)对于任意 $\boldsymbol{u}\in H$ 成立. 我们知道 $H\subset W_0^{1,p}(\Omega)$,并且由引理 1 得, $\|\boldsymbol{u}\|_H^2\geqslant C\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)}$,其中 $1\leqslant p<2$,因此 $H\hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$. 进一步,如果 $p>\dfrac{2N}{N+2}$,由 Sobolev 嵌入定理,嵌入 $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧的. 因此,当 $\dfrac{2N}{N+2}<p<2$ 时,由文献[4], $H\hookrightarrow H^2(\Omega)$ 并且嵌入是紧的.

2　定理的证明

定理 1 证明　考虑上述变分问题(12),取极小化序列 $\{\boldsymbol{u}_m\}\in H$, $|\boldsymbol{u}_m|^2_{2,\eta}=1$,且 $I(\boldsymbol{u}_m)\to\lambda_1(q)$,于是由式(13)知 $\|\boldsymbol{u}_m\|_H\leqslant C$,即 $\{\boldsymbol{u}_m\}$ 是 H 中的有界序列. 于是, $\{\boldsymbol{u}_m\}$ 存在一个子列,仍记为 $\{\boldsymbol{u}_m\}$,使得对某个 $\boldsymbol{u}\in H$,结合引理 3 知,

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_m\rightharpoonup\boldsymbol{u}, & \text{in } H,\\ \boldsymbol{u}_m\to\boldsymbol{u}, & \text{in } L^2(\Omega).\end{cases} \tag{15}$$

于是,对 $\forall\varepsilon\geqslant0$, $\exists N_0\geqslant0$,使得当 $m,l\geqslant N_0$ 时, $\int_\Omega|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2\leqslant\varepsilon$.

由式(11),对上述 ε,存在 $\delta>0$,使得当 $x\in B_\delta(0)$ 时,

$$|\eta(\boldsymbol{x})|\leqslant\frac{\varepsilon}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}. \tag{16}$$

由引理 2,得

$$\int_{B_\delta(0)}\eta(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon\int_{B_\delta(0)}\frac{|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant$$

$$\varepsilon\int_\Omega\frac{|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2(\ln\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon\int_\Omega\left(|\Delta(\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l)|^2-\frac{|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant C_\varepsilon,$$

同时,注意到 $\eta(\boldsymbol{x})\in L^\infty(\Omega\backslash B_\delta(0))$,故

$$\int_{\Omega\backslash B_\delta(0)}\eta(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2\leqslant C\int_{\Omega\backslash B_\delta(0)}|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2\leqslant C_\varepsilon,$$

因此,

$$|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2_{2,\eta}=\int_{B_\delta(0)}\eta(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2+\int_{\Omega\backslash B_\delta(0)}\eta(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}_l|^2\leqslant C_\varepsilon,$$

即 $\{\boldsymbol{u}_m\}$ 在 $L_\eta^2(\Omega)$ 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$. 因此, $\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1$.

由 Brezis-Lieb 引理[5]我们有

$$\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}_m|^2=\int_\Omega|\Delta(\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u})|^2+\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}|^2+o(1), \tag{17}$$

$$\int_\Omega\frac{q(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}=\int_\Omega\frac{q(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u}|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}+\int_\Omega\frac{q(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}+o(1), \tag{18}$$

由式(17)、(18)我们有

$$\lambda(q)=\lim_{m\to\infty}I(\boldsymbol{u}_m)=\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}_m|^2-\int_\Omega\frac{q(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}_m|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}+o(1)=I(\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u})+\int_\Omega|\Delta\boldsymbol{u}|^2-$$

$$\int_\Omega \frac{q(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{u}|^2}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}+o(1)=I(\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u})+\lambda(q)+o(1),$$

由式(13),在上式中令两边 $n\to\infty$ 得

$$\|\boldsymbol{u}_n-\boldsymbol{u}\|_H\leqslant I(\boldsymbol{u}_m-\boldsymbol{u})\to 0,$$

所以$\{\boldsymbol{u}_n\}$在 H 中强收敛于 $\boldsymbol{u}$,故 $\boldsymbol{u}$ 是极小化问题(12)的达到函数.

设

$$f(t)=J(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}),\quad J(\boldsymbol{w})=\frac{I(\boldsymbol{w})}{|\boldsymbol{w}|_{2,\eta}^2},$$

其中 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in H$. 由于 $t=0$ 时,$f(t)$取极小值,故$f'(0)=0$,即

$$\int_\Omega\left(\Delta\boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{v}-\frac{q(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{x}|^4(\ln R/|\boldsymbol{x}|)^2}\right)=\lambda\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v},\quad\forall\,\boldsymbol{v}\in H,\tag{19}$$

则 $\boldsymbol{u}$ 是特征问题(10)的解,证毕.

记

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\quad u,v\in H,$$

并定义第二特征值如下:

$$\lambda_2(q)=\inf_{u\in H}\left\{I(\boldsymbol{u})\,\middle|\,\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1)=0\right\}.\tag{20}$$

类似地,第 n 个特征值的定义如下:

$$\lambda_n(q)=\inf_{u\in H}\left\{I(\boldsymbol{u})\,\middle|\,\int_\Omega\eta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=1,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_i)=0,\quad i=1,\cdots,n-1\right\}.\tag{21}$$

类似于上述定理的讨论可知,相应于 $\lambda_i(q)$的特征函数 $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\cdots,n-1$ 存在.

定理 2 证明　如果$\{\lambda_n(q)\}$有界,则由(13)有

$$\|\boldsymbol{u}_n\|_H^2\leqslant\lambda_n(q),$$

即特征函数序列$\{\boldsymbol{u}_n\}$在 H 中有界,故存在子序列仍记为$\{\boldsymbol{u}_n\}$,使得$\{\boldsymbol{u}_n\}$在 $L^2(\Omega)$中强收敛. 于是,当 $m\neq k$ 时,

$$|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_m|_2^2=\int_\Omega\boldsymbol{u}_k^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-2\int_\Omega\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{u}_m\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega\boldsymbol{u}_m^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2,$$

矛盾,证毕.

[参考文献]

[1] Adimurthi, Massimo Grossi, Sanjiban Santra. Optimal Hardy-Rellich inequalities, maximum principle and related eigenvalue problem[J]. Journal of Functional Analysis, 2006, 240: 36-83.

[2] 陈志辉,沈尧天,姚仰新. $\mathbf{R}^4$ 中含位势的非线性双调和方程[J]. 数学年刊, 2005, 26A(4): 487-494.

[3] 陈志辉,沈尧天. 含距离位势的拟线性椭圆方程解的存在性[J]. 数学学报, 2008, 51(3): 469-474.

[4] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. Salt Lake City: Academic Press, 1978.

[5] Brezis H, Lieb E. A relation between point convergence of functions and convergence of functionals[J]. Proc Amer Math Soc, 1983, 88: 486-490.

[责任编辑:丁　蓉]