级数求和的复分析方法

许　宁

(南京政治学院基础部,江苏 南京 210003)

[摘要]　运用初等分析技术,结合复分析中留数定理,给出高等数学中一些常见级数的和.

[关键词]　围线积分,留数定理,级数的和,黎曼 ζ 函数

[中图分类号]O173.1　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2014)04-0020-08

Method of the Complex Analysis to Some Series

Xu Ning

(Department of Foundational Courses,PLA Nanjing Institute of Politics,Nanjing 210003,China)

Abstract:Combining the residue theorem with elementary calculus,this paper is concerned with the summation of some series.

Key words:contour integral,the residue theorem,summation of series,Riemann zeta function

复分析是把实分析的理论推广到复数域的结果,例如一元实函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与单复变函数的极限 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$,由于复域上 $z\to z_0$ 是点 z 从复平面上趋近于固定点 z_0,若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在,则要求 z 沿着从各个方向通向 z_0 的任何路径趋于 z_0,其函数 $f(z)$ 的极限值一致,这比一元实函数 $f(x)$ 极限存在的要求苛刻,因而导致了复变函数论中的微分和积分两者皆获得了新的深度和意义.

设复变函数 $f(z)$ 是单值函数,且在单连通区域 D 内,除去一些孤立奇点外皆解析. 令 z_0 为一孤立奇点,C_0 表示以 z_0 为心的圆周,且 $f(z)$ 在 C_0 包含的区域内及圆周上没有其它的奇点,Laurent 定理[1]指出 $f(z)$ 可展开为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\tag{1}$$

且上述级数在其区域内一致收敛. 若规定闭曲线的逆时针方向为正方向,则对上式求沿 C_0 的积分有

$$\oint_{C_0}f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{C_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\oint_{C_0}(z-z_0)^n\mathrm{d}z.\tag{2}$$

Cauchy 积分式[2]指出,对任意整数 n 有

$$\oint_{C_0}(z-z_0)^n\mathrm{d}z=\begin{cases}0, & n\neq-1,\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=-1,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 把式(3)代入式(2)有

$$\oint_{C_0}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}a_{-1}.\tag{4}$$

这里 a_{-1} 称为函数 $f(z)$ 在 z_0 的留数,记为 $\mathrm{Res}(f;z_0)$.

现令 C 是区域 D 内的任一围线,且在 C 上没有 $f(z)$ 奇点,设由 C 所围的区域内含有 k 个 f 的孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_k$. 在每一奇点作以该奇点为中心的圆周 $C_1,C_2,\cdots,C_k$,它们两两不相交,且皆在 C 的内部,由 Cauchy 积分定理[1]有

收稿日期:2013-08-09.
基金项目:国家自然科学基金(11171145).
通讯联系人:许宁,博士,副教授,研究方向:调和分析、偏微分方程. E-mail:xuningnj@163.com

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{k}\oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{5}$$

结合(4)、(5)两式,有如下的留数公式

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}(f;z_n) = 2\pi\mathrm{i}\times[C\ \text{内部所有留数的和}]. \tag{6}$$

式(6)在泛函分析、线性代数、解析数论及动力系统等一些数学理论中有广泛的应用,特别地,在高等数学中可用于计算一些不能用常规的方法求解的实函数的积分[1,2].

式(6)说明:若能求留数,选取适当的围线和函数,使得它们含有某级数的部分和的形式,然后做些极限的处理即有可能求出级数的和. 本文介绍一类级数求和的方法,并给出一些高等数学中常见级数的和.

1　留数的计算方法

设 z_0 是函数 f 的孤立奇点,若 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$,则称 $z=z_0$ 为 f 的可去奇点;若 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$,则称 $z=z_0$ 为 f 的极点;若 z_0 是 f 的极点,且是 $f(z)(z-z_0)^m(m\in\mathbf{N}^*)$ 的可去奇点,则称 $z=z_0$ 为 f 的 m 阶极点.

计算奇点 $z=z_0$ 留数的最基本的方法是把 f 展成式(1),则 $\mathrm{Res}(f;z_0)=a_{-1}$. 但对于 f 的 m 阶极点 z_0 有如下计算留数的公式[2]:

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \tag{7}$$

特别地,若 $z=z_0$ 是 f 的一阶级点,则有

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \tag{8}$$

于是由式(7)知,若

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-z_0}, \tag{9}$$

其中 $g(z)$ 是解析函数,且 $g(z_0)\neq 0$,则有 $\mathrm{Res}(f;z_0)=g(z_0)$;若

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \tag{10}$$

其中 $g(z)$ 是解析函数,且 $g(z_0)\neq 0$,m 是整数,则有 $\mathrm{Res}(f;z_0)=\dfrac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z_0)$. 进一步,若 z_0 是 f 的一阶极点,g 在包含 z_0 的开集内解析,则有

$$\mathrm{Res}(fg;z_0)=g(z_0)\mathrm{Res}(f;z_0). \tag{11}$$

2　级数的求和

设函数 $f(z)$ 在复平面上,除可数个孤立奇点 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$ 外皆解析,令 $0\leqslant|z_1|<|z_2|<\cdots<|z_n|<\cdots$,若 C_n 是一简单的封闭曲线,它使 $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ 含于 C_n 所围的区域内,由(6)有

$$2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f;z_k)=\oint_{C_n}f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{12}$$

如果选取适当的围线 C_n 和 f 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\oint_{C_n}f(z)\,\mathrm{d}z=0, \tag{13}$$

则可得到级数和的公式.

定理 1　设 $\{z_k\}_{k=1}^{m}$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点,且它们不是实轴上的整数点,若存在 $R_0>0,K>0,\varepsilon>0$,$f(z)$ 满足

$$|f(z)|\leqslant\frac{K}{|z|^{1+\varepsilon}},\ |z|>R_0, \tag{14}$$

则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;z_k). \tag{15}$$

证明　由 $\sin\pi z=0$ 知,$z=0,\pm1,\pm2,\cdots$,于是 $z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 为 $\cot\pi z$ 的极点,设 $n\in\mathbf{Z}$,由洛比达法则有

$$\lim_{z\to n}(z-n)^2\cot\pi z=\lim_{z\to n}\frac{(z-n)^2\cos\pi z}{\sin\pi z}=\lim_{z\to n}\frac{2(z-n)\cos\pi z-(z-n)^2\pi\sin\pi z}{\pi\cos\pi z}=0,\tag{16}$$

故 $z=n$(n 为整数)是 $\cot\pi z$ 的一阶极点. 于是由式(8),应用洛比达法则有

$$\mathrm{Res}(\cot\pi z;n)=\lim_{z\to n}(z-n)\cot\pi z=\lim_{z\to n}\frac{(z-n)\cos\pi z}{\sin\pi z}=\lim_{z\to n}\frac{\cos\pi z-(z-n)\pi\sin\pi z}{\pi\cos\pi z}=\frac{1}{\pi}.\tag{17}$$

设 $N\in\mathbf{N}^*$,C_N 是复平面上以原点为中心,顶点为

$$(1+\mathrm{i})(N+\frac{1}{2}),(-1+\mathrm{i})(N+\frac{1}{2}),(-1-\mathrm{i})(N+\frac{1}{2}),(1-\mathrm{i})(N+\frac{1}{2})$$

的具有正方向(即逆时针方向)的正方形围线. 若 $f(z)$ 的奇点集 $\{z_k\}_{k=1}^m$ 含于 C_N 所围的方形内,则由式(6),(11)和(17)有

$$\oint_{C_N}f(z)\cot\pi z=2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;n)+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;z_k)\right\}=$$

$$2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{n=-N}^{N}f(n)\mathrm{Res}(\cot\pi z;n)+\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;z_k)\right\}=2\mathrm{i}\sum_{n=-N}^{N}f(n)+2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;z_k),\tag{18}$$

故若能证明

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N}f(z)\cot\pi z=0,\tag{19}$$

则式(15)成立.

现证明式(19)成立. 为此考察

$$\left|\oint_{C_N}f(x)\cot\pi z\mathrm{d}z\right|\tag{20}$$

的上界. 由于 C_N 的每边长为 $2N+1$,故 C_N 围线的长为 $8N+4$. 又

$$\sinh t=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2},\quad \cosh t=\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2},\tag{21}$$

其中 t 为实数. 于是由欧拉公式有

$$\sin\mathrm{i}t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}t)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}t)}}{2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t}}{2\mathrm{i}}=\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}=\mathrm{i}\sinh t.\tag{22}$$

类似地有

$$\cos\mathrm{i}t=\cosh t.\tag{23}$$

设 $z=x+\mathrm{i}y$,由(22)、(23)及两角和的正弦公式有

$$\sin z=\sin(x+\mathrm{i}y)=\sin x\cos\mathrm{i}y+\cos x\sin\mathrm{i}y=\sin x\cosh y+\mathrm{i}\cos x\sinh y.\tag{24}$$

又因为

$$\sinh^2t=\left(\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}}{4}-\frac{1}{2},\tag{25}$$

$$\cosh^2t=\left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2=\frac{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}}{4}+\frac{1}{2},\tag{26}$$

于是(25)~(26)有

$$\cosh^2t=1+\sinh^2t.\tag{27}$$

故结合(24)、(27)两式有

$$|\sin z|^2=\sin^2x+\sinh^2y.\tag{28}$$

类似地有

$$|\cos z|^2=\cos^2x+\sinh^2y.\tag{29}$$

由(28)、(29)两式有

$$|\cot\pi z|^2=\frac{\cos^2\pi x+\sinh^2\pi y}{\sin^2\pi x+\sinh^2\pi y}=\frac{\cos^2\pi x}{\sin^2\pi x+\sinh^2\pi y}+\frac{\sinh^2\pi y}{\sin^2\pi x+\sinh^2\pi y}\leqslant\frac{\cos^2\pi x}{\sin^2\pi x+\sinh^2\pi y}+1.\tag{30}$$

在方形围线 C_N 的垂线上,$x=\pm(N+\frac{1}{2})$,于是

$$\cos\pi x=0,\sin\pi x=\pm 1,z=x+\mathrm{i}y\in C_N \text{ 的垂线}. \tag{31}$$

结合式(30)、(31)有

$$|\cot\pi z|^2\leqslant 1,z\in C_N \text{ 的垂线}. \tag{32}$$

又当 $t>0$ 时有

$$\sinh t=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\geqslant\frac{\mathrm{e}^t-1}{2}, \tag{33}$$

当 $t<0$ 时有

$$\sinh t=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}\leqslant\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{2}. \tag{34}$$

结合(33)、(34)两式有

$$|\sinh t|\geqslant\frac{\mathrm{e}^{|t|}-1}{2},t\in\mathbf{R}. \tag{35}$$

在方形围线 C_N 的水平线上,$|y|=N+\frac{1}{2}$,由(35)有

$$|\sinh\pi y|\geqslant\frac{\mathrm{e}^{\pi(N+\frac{1}{2})}-1}{2}, \tag{36}$$

故有

$$\lim_{N\to+\infty}|\sinh\pi y|=+\infty\ ,z=x+\mathrm{i}y\in C_N \text{ 的水平线}. \tag{37}$$

因而由式(30)、(32)、(37)知,存在一常数 $M>0$,对任意 $N\geqslant 1$ 有

$$|\cot\pi z|\leqslant M,z\in C_N. \tag{38}$$

又当 $z\in C_N$ 时,

$$|z|\geqslant N+\frac{1}{2}\geqslant N,z\in C_N, \tag{39}$$

结合式(14)、(38)、(39),对充分大的 N 有

$$\left|\oint_{C_N}f(z)\cot\pi z\mathrm{d}z\right|\leqslant\oint_{C_N}|f(z)\cot\pi z|\mathrm{d}z\leqslant\oint_{C_N}\frac{KM}{|z|^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}z\leqslant KM\frac{8N+4}{N^{1+\varepsilon}}, \tag{40}$$

故有

$$\lim_{N\to\infty}\left|\oint_{C_N}f(z)\cot\pi z\mathrm{d}z\right|\leqslant\lim_{N\to\infty}KM\frac{8N+4}{N^{1+\varepsilon}}=0, \tag{41}$$

于是(19)成立,定理证毕.

注 1　若 $f(z)$ 满足定理 1 的假设,且 $z=0$ 也是 $f(z)$ 的奇点,则有

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}f(n)=-\pi\left(\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;z_k)\ +\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;0)\right). \tag{42}$$

推论 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi(\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi})}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}-1\right). \tag{43}$$

证明　事实上,令 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$,于是 $z=\pm\mathrm{i}$ 是 $f(z)$ 的一阶级点,故

$$\mathrm{Res}(f,\mathrm{i})=\left.\frac{1}{z+\mathrm{i}}\right|_{z=\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}, \tag{44}$$

$$\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i})=\left.\frac{1}{z-\mathrm{i}}\right|_{z=-\mathrm{i}}=-\frac{1}{2\mathrm{i}}, \tag{45}$$

又由式(22)、(23)有

$$\cot\mathrm{i}\pi=\frac{\cos\mathrm{i}\pi}{\sin\mathrm{i}\pi}=\frac{\cosh\pi}{\mathrm{i}\sinh\pi}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}, \tag{46}$$

$$\cot(-\mathrm{i}\pi)=-\cot\mathrm{i}\pi=-\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}. \tag{47}$$

显然,$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$满足(14),结合(44)至(47)有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=-\pi\left(-\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{i(e^{\pi}-e^{-\pi})}\times\left(-\frac{1}{2i}\right)+\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{i(e^{\pi}-e^{-\pi})}\times\left(\frac{1}{2i}\right)\right)=\frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}. \tag{48}$$

整理即得结论(43).

推论 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{946}. \tag{49}$$

证明　令$f(z)=\dfrac{1}{z^2}$,则$f(z)$的奇点只有 1 个二阶级点 $z=0$,故 $z=0$ 是函数$f(z)\cot\pi z$ 的三阶级点. 由式(7),依据等价无穷小与洛比达法则有

$$\mathrm{Res}(f(z)\cot\pi z;0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}\right)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{2\pi(\pi z\cos\pi z-\sin\pi z)}{\sin^3\pi z}=$$

$$\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\frac{2\pi(\pi z\cos\pi z-\sin\pi z)}{(\pi z)^3}(\text{by }\sin\pi z\sim\pi z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to0}\left(-\frac{2\sin\pi z}{3z}\right)=-\frac{\pi}{3}. \tag{50}$$

又 $f(z)$满足式(14),于是由式(42)有

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}, \tag{51}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{52}$$

类似地,令 $g(z)=\dfrac{1}{z^4}$,则 $g(z)$只有 1 个奇点 $z=0$,它是 $g(z)$的 4 阶级点,故 $z=0$ 是函数 $g(z)\cot\pi z$ 的 5 阶级点,于是由式(7)有

$$\mathrm{Res}(g(z)\cot\pi z;0)=\frac{1}{4!}\lim_{z\to0}\frac{d^4}{dz^4}\left(\frac{z^5\cos\pi z}{z^4\sin\pi z}\right)=$$

$$\frac{1}{4!}\lim_{z\to0}(16\pi^4\cot\pi z\csc^4\pi z-16\pi^3\cot^2\pi z\csc^2\pi z-8\pi^3\csc^4\pi z+8\pi^4\cot^3\pi z\csc^2\pi z)=\frac{1}{4!}\times\left(-\frac{8\pi^3}{15}\right)=-\frac{\pi^3}{45}. \tag{53}$$

故由式(42)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{54}$$

同理,令 $h(z)=\dfrac{1}{z^6}$,则 $z=0$ 是函数 $h(z)\cot\pi z$ 的 7 阶级点,故由式(7)得

$$\mathrm{Res}(h(z)\cot\pi z;0)=\frac{1}{6!}\lim_{z\to0}\frac{d^6}{dz^6}\left(\frac{z^7\cos\pi z}{z^6\sin\pi z}\right)=\frac{1}{6!}\times\left(-\frac{32\pi^5}{21}\right)=-\frac{2\pi^5}{945}. \tag{55}$$

于是由式(42)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}. \tag{56}$$

注 2　设 $z\in\mathbf{C}$,$\mathrm{Re}z>1$,则

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z},\quad n\in\mathbf{N} \tag{57}$$

在$\{z:\mathrm{Re}z>1\}$上是绝对收敛的,称 $\zeta(z)$为 Riemmann zeta 函数. 令 $z=2k,k\in\mathbf{N}^*$,上述计算表明

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(2k)!}\lim_{z\to0}\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\left(\frac{z^{2k+1}\cos\pi z}{z^{2k}\sin\pi z}\right)=2^{2k-1}\frac{B_k}{(2k)!}\pi^{2k}(\text{与文献[3]比较}), \tag{58}$$

其中 $B_k>0$ 称为贝努里数,它是通过函数$f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$在 $z=0$ 处 Laurent 展式

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}z^{2k-1} \tag{59}$$

来定义的. 易知 $B_1=\frac{1}{6},B_2=\frac{1}{30},B_3=\frac{1}{42}$.

推论 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{n^2-a^2}=\frac{1}{a}-\pi\cot\pi a,\quad a\notin\mathbf{Z}. \tag{60}$$

证明　事实上,令 $f(z)=\frac{1}{z^2-a^2}$,则 $z=\pm a$ 为 $f(z)$ 的一阶级点. 由(8)有

$$\operatorname{Res}(f(z);a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{1}{z+a}=\frac{1}{2a}, \tag{61}$$

$$\operatorname{Res}(f(z);-a)=\lim_{z\to -a}(z+a)f(z)=\lim_{z\to -a}\frac{1}{z-a}=-\frac{1}{2a}, \tag{62}$$

于是由式(11)、(15)有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=-\pi\left(\frac{\cot\pi a}{2a}+\frac{\cot(-\pi a)}{-2a}\right)=-\frac{\pi\cot\pi a}{a}. \tag{63}$$

化简得式(60).

定理 2　设 $f(z)$ 满足定理 1 的假设,则有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)\csc\pi z;z_k). \tag{64}$$

证明　事实上只需注意

$$\operatorname{Res}(\csc\pi z;n)=\lim_{z\to n}\frac{z-n}{\sin\pi z}=\frac{(-1)^n}{\pi},\quad 其中\ n\in\mathbf{Z}, \tag{65}$$

其它说明皆与定理 1 类似,证毕.

注 3　若 $f(z)$ 满足定理 1 的假设,且 $z=0$ 也是 $f(z)$ 的奇点,则有

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}(-1)^n f(n)=-\pi\left(\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(\csc\pi z f(z);z_k)+\operatorname{Res}(f(z)\csc\pi z;0)\right). \tag{66}$$

推论 4

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{67}$$

证明　事实上,令 $f(z)=\frac{1}{z^2}$,由式(7)得

$$\operatorname{Res}(f(z)\csc\pi z;0)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3}{z^2\sin\pi z}\right)=\frac{\pi}{6}. \tag{68}$$

于是由式(66)得

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}, \tag{69}$$

化简即得式(67).

推论 5

$$\sum_{n=-\infty,n\neq 0}^{\infty}(-1)^n\frac{a}{n(n-a)}=\frac{1}{a}-\frac{\pi}{\sin\pi a},\quad a\notin\mathbf{Z}. \tag{70}$$

证明　令 $f(z)=\frac{1}{z(z-a)}$,于是 $z=0,z=a$ 为 $f(z)$ 的一阶级点,显然满足(14),故由式(7)、(8)得

$$\operatorname{Res}(f(z)\csc\pi z;0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{z(z-a)\sin\pi z}\right)=-\frac{1}{\pi a^2}, \tag{71}$$

$$\operatorname{Res}(f(z);a)=\lim_{z\to a}\frac{z-a}{z(z-a)}=\frac{1}{a}. \tag{72}$$

把式(71),(72)代入式(66)即得式(70)成立.

注 4　在(70)中,令 $a=\frac{1}{2}$ 有

$$2-\pi=\sum_{n=-\infty,n\neq0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)n}+\sum_{n=1}^{\infty}(1-)^n\frac{1}{(2n-1)n}=I+II. \tag{73}$$

又

$$I=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n\frac{1}{(2n-1)n}\overset{n=-t}{=}\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^t\frac{1}{t(2t+1)}\overset{t=n}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(2n+1)}, \tag{74}$$

因而

$$I+II=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n(2n-1)}+\frac{1}{n(2n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\left(\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}\right)\right]=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1}=III+IV. \tag{75}$$

又

$$IV=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1}\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{2}{2m-1}=2+III, \tag{76}$$

结合式(73),(75),(76)有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{2n-1}=-\frac{\pi}{2}, \tag{77}$$

即

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots, \tag{78}$$

式(78)是著名的 Madhava-Leibniz 级数(与文献[4]比较).

定理3　设$f(z)$具有m个孤立奇点$\{z_k\}_{k=1}^m$且$\{z_k\}_{k=1}^m$不是$\tan\pi z$的奇点,若$f(z)$满足式(14),则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}(\tan\pi z f(z);z_k). \tag{79}$$

证明　设$n\in\mathbf{Z}$,因为$z=n+\frac{1}{2}$是$\tan\pi z$的一阶级点,又

$$\mathrm{Res}\left(\tan\pi z;n+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\pi}, \tag{80}$$

只要选$C_N(N\in\mathbf{N}^*)$是以原点为中心,顶点为

$$(1+\mathrm{i})(N+1),(-1+\mathrm{i})(N+1),(-1-\mathrm{i})(N+1),(1-\mathrm{i})(N+1)$$

的具有正方向的正方形围线. 和定理1的证明类似,把(80)代入(6)并令$N\to+\infty$即得结论,证毕.

推论6

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{81}$$

证明　事实上,取$f(z)=\frac{1}{z^2}$,于是$z=0$是$f(z)$的二阶级点,又因为

$$\lim_{z\to0}z^2f(z)\tan\pi z=\lim_{z\to0}\tan\pi z=0, \tag{82}$$

故$z=0$是函数$f(z)\tan\pi z=\frac{\tan\pi z}{z^2}$的一阶级点. 由(8)有

$$\mathrm{Res}(f(z)\tan\pi z;0)=\lim_{z\to0}zf(z)\tan\pi z=\lim_{z\to0}\frac{\sin\pi z}{z\cos\pi z}=\pi. \tag{83}$$

把式(83)代入(79)得

$$\frac{\pi^2}{4}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=I+II. \tag{84}$$

而

$$I=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2n+1)^2}\overset{n=-m}{=}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(-2m+1)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\overset{n=m-1}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=II, \tag{85}$$

把式(85)代入式(84)即得式(81)(与文献[2]比较).

定理 4　设$f(z)$具有 m 个孤立奇点$\{z_k\}_{k=1}^m$且$\{z_k\}_{k=1}^m$不是 $\sec\pi z$ 的奇点,若$f(z)$满足式(14),则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\pi\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)\sec\pi z;z_k). \tag{86}$$

证明　只需注意

$$\operatorname{Res}\left(\sec\pi z;n+\frac{1}{2}\right)=-\frac{(-1)^n}{\pi},\quad n\in\mathbf{Z}, \tag{87}$$

即可.

推论 7

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}. \tag{88}$$

证明　令$f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$,于是 $z=0$、1 为$f(z)$的一阶级点,故有

$$\operatorname{Res}(f;0)=-1,\operatorname{Res}(f;1)=1. \tag{89}$$

应用式(11)得

$$\operatorname{Res}(f(z)\sec\pi z;0)=\sec 0\cdot\operatorname{Res}(f;0)=-1, \tag{90}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)\sec\pi z;1)=\sec\pi\cdot\operatorname{Res}(f;1)=-1. \tag{91}$$

把式(90),(91)代入式(86)即得结论.

定理 5　设$f(z)$是复域上的亚纯函数,$f(z)$的极点为$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,$0<|a_1|<|a_2|<\cdots$,且皆为一阶极点,记 $b_n=\operatorname{Res}(f;a_n)$,若令 C_n 为以原点为中心、半径为 R_n(R_n 与 n 等价)的圆周,且 C_n 上没有 $f(z)$的奇点,如果存在常数 $\varepsilon>0$,$M>0$ 使得$\max\limits_{z\in C_n}|f(z)|\leqslant MR_n^{1-\varepsilon}$,$\forall n\in\mathbf{N}^*$ 则,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n(z-a_n)}=\frac{f(z)-f(0)}{z}. \tag{92}$$

证明　令 $g(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)}$,$z\notin\{0,a_1,a_2,\cdots\}$,则 $g(\xi)$的极点为 $0,z,a_1,\cdots,a_n,\cdots$,且皆为一阶级点. 故由(11)有

$$\operatorname{Res}(g;0)=-\frac{f(0)}{z},\operatorname{Res}(g;z)=\frac{f(z)}{z},\operatorname{Res}(g;a_k)=\frac{b_k}{a_k(a_k-z)},k=1,2,\cdots \tag{93}$$

现取 C_N 为包含 $0,z,a_1,\cdots,a_N$ 的围线,于是由式(6)有

$$2\pi\mathrm{i}\left(\frac{f(z)-f(0)}{z}+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{a_n(a_n-z)}\right)=\oint_{C_N}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{94}$$

又因为

$$\left|\oint_{C_N}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right|\leqslant 2\pi R_N\times\max_{\xi\in C_N}\left|\frac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)}\right|\leqslant K\frac{R_N^{1-\varepsilon}}{R_N-|z|}, \tag{95}$$

这里 K 为常数,从而有

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N}g(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0.$$

故对式(94)两边取 $N\to\infty$ 的极限即得结论,证毕.

[参考文献]

[1]　Ahlfors L V. Complex Analysis[M]. 3rd ed. New York:McGraw-Hill Companies,Inc,1979:101-159.

[2]　Conway J B. Functions of One Complex Variable[M]. 2nd ed. New York:Springer-Verlag,1978:58-127.

[3]　许宁. 黎曼函数的两种求法[J]. 高等数学研究,2013,16(3):13-15.

[4]　Roy R. The discovery of the series formula for π by Leibniz,Gregory and Nilakantha[J]. Math Mag,1990,63:291-306.

[责任编辑:丁　蓉]