一类分数阶 p-Laplacian 边值问题的正解

官琳琳

(南京信息工程大学滨江学院,江苏 南京 210044)

[摘要] 本文运用单调有界原理和一个算子不动点定理研究一类分数阶 p-Laplacian 边值问题正解的存在性,并且给出了正解的迭代序列.

[关键词] 分数阶 p-Laplacian 边值问题,单调有界原理,算子不动点定理,正解,迭代

[中图分类号]O29 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2014)04-0041-05

Positive Solutions for a Class of Fractional p-Laplacian Boundary Value Problems

Guan Linlin

(Binjiang College of Nanjing University of Information Science and Technology,Nanjing 210044,China)

Abstract: By virtue of monotone bounded theorem and a fixed point theorem of operator, the existence of positive solutions for a class of fractional p-Laplacian boundary value problems is studied, furthermore, a sequence of iterations for positive solution is also offered.

Key words: fractional p-Laplacian boundary value problem, monotone bounded theorem, fixed point theorem of operator, positive solution, iteration

本文研究以下分数阶 p-Laplacian 边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} -D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(-D_{0+}^{\alpha}u(t)))=f(t,D_{0+}^{\gamma}u(t)),t\in[0,1], \\ D_{0+}^{\alpha}u(0)=D_{0+}^{\alpha+1}u(0)=D_{0+}^{\alpha}u(1)=0,D_{0+}^{\gamma}u(0)=0,D_{0+}^{\gamma}u(1)=\int_0^1 D_{0+}^{\gamma}u(s)\mathrm{d}\eta(s), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0<\gamma\leqslant 1<\alpha\leqslant 2<\beta<3$, $\alpha-\gamma>1$, D_{0+}^{α}, D_{0+}^{β}, D_{0+}^{γ} 为 Riemann-Liouville 分数阶导数, $\int_0^1 u(s)\mathrm{d}\eta(s)$ 为 Riemann-Stieltjes 积分, φ_p 的定义为 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $p>1$.

近年来对于分数阶微分方程的研究受到越来越多的关注. 正因为它在工程等实际领域中的频繁出现,许多分数阶初边值问题解(包括正解)的存在性理论已经被讨论,参见文献[1-8]及其所附参考文献. 文献[4]中作者利用范数型拉伸与压缩不动点定理研究了以下分数阶边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+f(t,u(t))=0,0<t<1, \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

文献[5]中作者利用单调迭代方法研究了以下分数阶积分边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha}u(t)+q(t)f(t,u(t))=0,0<t<1, \\ u(0)=u'(0)=0,u(1)=\int_0^1 g(s)u(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

其中 f 满足以下条件:

存在 $a>0$,使得 $f(t,x)\leqslant f(t,y)\leqslant a$, $\forall\, 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a, t\in[0,1]$.

此条件在文献[5]中起着至关重要的作用,但有界性大大降低了处理问题的难度. 本文将突破非线性

收稿日期:2014-11-13.

通讯联系人:官琳琳,硕士,讲师,研究方向:应用数学. E-mail:llguan77@163.com

项有界的限制,运用单调有界原理研究问题(1)正解的存在性,并给出正解的迭代序列. 文章最后运用一个算子不动点定理获得问题(1)正解的存在唯一性.

1　预备知识

以下只给出与本文有关的分数阶的定义和相关结论,关于分数阶微积分学的其他相关知识可参考分数阶书籍[1-3].

定义 1　函数 $y:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 积分是指

$$I_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,$$

其中右端在 $\mathbf{R}^+$ 上是逐点定义的.

定义 2　函数 $y:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 导数是指

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 $n=[\alpha]+1$, $[\alpha]$ 是 α 的整数部分,右端在 $\mathbf{R}^+$ 上是逐点定义的.

引理 1[4]　若 $\alpha>0$, $y\in C(0,1)\cap L(0,1)$,则分数阶方程 $D_{0+}^{\alpha}y(t)=0$ 有唯一解,且

$$y(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N},c_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,N,$$

其中 N 是大于或等于 α 的最小正整数.

引理 2[4]　若 $\alpha>0$, $y,D_{0+}^{\alpha}y\in C(0,1)\cap L(0,1)$. 则

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}y(t)=y(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N},c_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,N,$$

其中 N 是大于或等于 α 的最小正整数.

以下把问题(1)转化成与其等价的积分方程. 令 $u(t)=I_{0+}^{\gamma}v(t)$, $v(t)\in C[0,1]$,则根据定义 1、2 与引理 1、2,我们有

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t),D_{0+}^{\alpha+}u(t)=D_{0+}^{\alpha-\gamma+1}v(t),D_{0+}^{\gamma}u(t)=v(t).$$

从而问题(1)可以转化为以下修正过的边值问题

$$\begin{cases}-D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(-D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t)))=f(t,v(t)),t\in[0,1],\\ D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma+1}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(1)=0,v(0)=0,v(1)=\int_0^1v(s)\mathrm{d}\eta(s).\end{cases}\tag{2}$$

且易知(1)与(2)是等价的. 因此转向问题(2),问题(2)解的存在性就等价于问题(1)解的存在性. 令

$$G(\alpha-\gamma,t,s):=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\begin{cases}[t(1-s)]^{\alpha-\gamma-1}-(t-s)^{\alpha-\gamma-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1,\\ [t(1-s)^{\alpha-\gamma-1}, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1,\end{cases}\tag{3}$$

$k=\int_0^1t^{\alpha-\gamma-1}\mathrm{d}\eta(t)$, $K_{\eta}(s)=\int_0^1G(\alpha-\gamma,t,s)\mathrm{d}\eta(t)$. 在以下的行文中,始终假设以下条件成立:$0\leqslant k<1$, $K_{\eta}(s)\geqslant0$, $\forall s\in[0,1]$.

根据文献[6]有以下的结论:给定 $h\in L(0,1)$,则边值问题

$$\begin{cases}-D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t)=h(t),t\in[0,1],\\ v(0)=0,v(1)=\int_0^1v(s)\mathrm{d}\eta(s)\end{cases}\tag{4}$$

有唯一解,可表示为

$$v(t)=\int_0^1H(\alpha-\gamma,t,s)h(s)\mathrm{d}s,\tag{5}$$

其中 $H(\alpha-\gamma,t,s)=\dfrac{t^{\alpha-\gamma-1}}{1-k}K_{\eta}(s)+G(\alpha-\gamma,t,s)$.

引理 3[6]　若 $h\in L(0,1)$, $0<\gamma\leqslant1<\alpha\leqslant2<\beta<3$, $\alpha-\gamma>1$. 则边值问题

$$\begin{cases}-D_{0+}^{\beta}(\varphi_p(-D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t)))=h(t),t\in[0,1],\\ D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma+1}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(1)=0,v(0)=0,v(1)=\int_0^1v(s)\mathrm{d}\eta(s),\end{cases}$$

等价于

$$v(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)h(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,$$

其中 $q=\dfrac{p}{p-1}$.

证明 令 $y(t):=\varphi_p(-D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t))$，则由边界条件

$$D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma+1}v(0)=D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(1)=0,$$

可知

$$y(t)=-I_{0+}^{\beta}h(t)=c_1t^{\beta-1}+c_2t^{\beta-2}+c_3t^{\beta-3},c_1,c_2,c_3\in\mathbf{R}.$$

根据文献[6]中的引理2.2，我们可知 $c_2=c_3=0$. 再根据 $D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(1)=0$ 有 $y(1)=0$，从而

$$-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s+c_1=0,$$

因此可得 $c_1=\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s$. 从而

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t(t-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-s)^{\beta-1}h(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 G(\beta,t,s)h(s)\mathrm{d}s.$$

这表明

$$-D_{0+}^{\alpha-\gamma}v(t)=\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,t,s)h(s)\mathrm{d}s\right).$$

鉴于(4)和(5)，我们有

$$v(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)h(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.$$

证毕.

引理4[6] $G(\beta,t,s)$，$H(\alpha-\gamma,t,s)$ 有以下性质：

(i) $G(\beta,t,s)>0,H(\alpha-\gamma,t,s)>0,\ \forall t,s,\in(0,1)$，

(ii) $\dfrac{t^{\beta-1}(1-t)s(1-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\leqslant G(\beta,t,s)\leqslant\dfrac{\beta-1}{\Gamma(\beta)}t^{\beta-1}(1-t),\ \forall t,s\in[0,1]$，

(iii) 存在正常数 k_1,k_2 使得

$$k_1t^{\alpha-\gamma-1}K_\eta(s)\leqslant H(\alpha-\gamma,t,s)\leqslant k_2t^{\alpha-\gamma-1},\ \forall t,s\in[0,1].$$

令 $E:=C[0,1]$，$\|u\|:=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$，$P:=\{u\in E:u(t)\geqslant0,\ \forall t\in[0,1]\}$，则 $(E,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，P 是其上的锥. 定义算子 A 如下：

$$(Av)(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,v(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,\ \forall v\in E.$$

则由 H,G,f 的连续性和非负性可知 $A:P\to P$ 上的全连续算子，并且问题(2)解的存在性就等价于算子 A 不动点的存在性.

引理5[9] 若 h 为一非负函数，P 是 Banach 空间 E 中的锥，并且以下条件成立：

(i) $A:P\to P$ 是一增算子，且存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$ 使得 $\delta_1h\leqslant Ah\leqslant\delta_2h$，

(ii) 对任意的 $v\in P,t\in(0,1)$，存在 $\zeta(t)\in(t,1)$ 使得 $A(tv)\geqslant\zeta(t)Av$.

则算子方程 $v=Av$ 有唯一的正解.

2 主要结论

为简便计，令 $\xi(t)=t^{\alpha-\gamma-1},\ \forall t\in[0,1]$，并取以下3个正常数为：

$k_3:=\int_{10}\int_0^1 G(\beta,s,r)(\xi(r))^{p-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0,k_3:=\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)\xi(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0,k_5:=\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)\mathrm{d}r\mathrm{d}s>0.$

以下是本文使用的假设条件.

(H1) $f\in C([0,1]\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$ 且 $f(t,0)\neq0,\ \forall t\in[0,1]$，

(H2) 对所有的 $t\in[0,1]$，f 关于第二个变量 v 是增函数，

(H3) $0<\int_0^1 K_\eta(s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s:=k_6<+\infty$,

$$0<\int_0^1 \varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s:=k_7<+\infty.$$

定理 1　若(H1)、(H2)和以下条件成立:

$$\lim_{v\to\infty}\sup\frac{f(t,v)}{v^{p-1}}<\lambda_1^{p-1} \tag{6}$$

对 $t\in[0,1]$一致成立,其中 $\lambda_1=\begin{cases}(k_2k_3^{\frac{1}{p-1}})^{-1}, & p\geqslant 2,\\ (2^{\frac{2-p}{p-1}}k_2k_4)^{-1}, & 1<p\leqslant 2,\end{cases}$ 则问题(1)至少有一个正解.

证明　由(6)知存在 $\varepsilon_1\in(0,\lambda_1)$, $c_1>0$ 使得

$$f(t,v)\leqslant(\lambda_1-\varepsilon_1)^{p-1}v^{p-1}+c_1,\ \forall v\in\mathbf{R}^+,t\in[0,1].$$

定义 $v_0(t)=M\xi(t)$,其中 $M\geqslant\begin{cases}\varepsilon_1^{-1}(c_1k_5)^{\frac{1}{p-1}}k_3^{\frac{1}{p-1}}, p\geqslant 2,\\ c_1^{\frac{1}{p-1}}\varepsilon_1^{-1}k_4^{-1}k_5, & 1<p\leqslant 2.\end{cases}$

以下分两种情况考虑.

情形 1　$p\geqslant 2$ 即$\dfrac{1}{p-1}\leqslant 1$.

$$((AM\xi)(t))^{p-1}=\left(\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)(G(\beta,s,r)f(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\leqslant$$

$$\left(\xi(t)k_2\int_0^1\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\leqslant(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)[(\lambda_1-\varepsilon_1)^{p-1}M^{p-1}(\xi(r))^{p-1}+c_1]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant(\lambda_1-\varepsilon_1)^{p-1}M^{p-1}(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}k_3+$$

$$(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}c_1k_5.$$

从而

$$(AM\xi)(t)\leqslant[(\lambda_1-\varepsilon_1)^{p-1}M^{p-1}(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}k_3+(\xi(t))^{p-1}k_2^{p-1}c_1k_5]^{\frac{1}{p-1}}\leqslant$$

$$(\lambda_1-\varepsilon_1)M\xi(t)k_2k_3^{\frac{1}{p-1}}+\xi(t)k_2(c_1k_5)^{\frac{1}{p-1}}\leqslant M\xi(t).$$

此即$(Av_0)(t)\leqslant v_0(t)$, $\forall t\in[0,1]$.

情形 2　$p\leqslant 2$ 即$\dfrac{1}{p-1}\geqslant 1$.

$$(AM\xi)(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\xi(t)k_2\int_0^1\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}s\leqslant\xi(t)k_2\int_0^1\int_0^1 G^{\frac{1}{p-1}}(\beta,s,r)f^{\frac{1}{p-1}}(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\xi(t)k_2\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)f^{\frac{1}{p-1}}(r,M\xi(r))\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant\xi(t)k_2\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)[(\lambda_1-\varepsilon_1)^{p-1}M^{p-1}\xi^{p-1}(r)+c_1]^{\frac{1}{p-1}}\mathrm{d}r\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\xi(t)2^{\frac{2-p}{p-1}}k_2\int_0^1\int_0^1 G(\beta,s,r)[(\lambda_1-\varepsilon_1)M\xi(r)+c_1^{\frac{1}{p-1}}]\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s=(\lambda_1-\varepsilon_1)M\xi(t)2^{\frac{2-p}{p-1}}k_2k_4+\xi(t)2^{\frac{2-p}{p-1}}c_1^{\frac{1}{p-1}}k_2k_5\leqslant M\xi(t).$$

此即$(Av_0)(t)\leqslant v_0(t)$, $\forall t\in[0,1]$.

构造序列 $v_{n+1}=Av_n$, $n=0,1,2,\cdots$. 下证序列$\{v_n\}$是单调递减序列. 事实上由(H2)知

$$v_1=Av_0\leqslant v_0,$$

$$v_2=Av_1=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,v_1(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,v_0(r))\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=Av_0=v_1.$$

如此继续下去可证明 $v_{n+1}\leqslant v_n, n=0,1,2,\cdots$. 另一方面易知 $v_0(t)$ 为一有界函数,并注意到算子 A 的非负性. 从而序列 $\{v_n\}$ 是一单调递减的有界序列,根据单调有界原理,存在 $v^*(t), t\in[0,1]$ 使得 $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v^*(t), t\in[0,1]$. 再由算子 A 的全连续性,在 $v_{n+1}=Av_n$ 两边同时取极限可得 $v^*=Av^*$. 另外 $f(t,0)\neq 0$, $\forall t\in[0,1]$ 表明 0 不是 A 的不动点,从而 v^* 是(1)的正解. 证毕.

定理 2 若(H1)~(H3)和以下条件成立:

对任意的 $\lambda_2\in(0,1), u\geqslant 0$,存在 $0<\eta(\lambda_2)<\dfrac{1}{\lambda_2}-1$ 使得

$$f(t,\lambda_2 v)\geqslant((1+\eta(\lambda_2))\lambda_2)^{p-1}f(t,v),\ \forall t\in[0,1]. \tag{7}$$

则问题(1)有唯一的正解.

证明 仍沿用锥 $P:=\{u\in E: u(t)\geqslant 0, \forall t\in[0,1]\}$. 由前面的讨论和(H2)知 $A:P\to P$ 上的全连续、增算子. 根据引理 4 和(H3)可得

$$(A\xi)(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$k_1\xi(t)\int_0^1 K_\eta(s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\geqslant k_1k_6\xi(t),$$

$$(A\xi)(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$k_2\xi(t)\int_0^1 \varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\xi(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\leqslant k_2k_7\xi(t).$$

注意到 $\xi(t)$ 是一非负函数,从而引理 5 中的条件(i)满足. 另一方面,令 $\zeta(\lambda_2)=\lambda_2(1+\eta(\lambda_2))$,则 $\zeta(\lambda_2)\in(\lambda_2,1)$,且由(7)可得

$$(A\lambda_2 v)(t)=\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,\lambda_2 v(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda_2(1+\eta(\lambda_2))\int_0^1 H(\alpha-\gamma,t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 G(\beta,s,r)f(r,v(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s=\zeta(\lambda_2)(Av)(t).$$

从而引理 5 中的条件(ii)也成立. 因此根据引理 5 可知算子方程 $v=Av$ 有唯一的正解,此即问题(1)有唯一的正解. 证毕.

[参考文献]

[1] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及应用[M]. 北京:中国科学出版社,2013.

[2] 郭柏灵,蒲学科,黄凤辉. 分数阶偏微分方程及其数值解[M]. 北京:科学出版社,2011.

[3] Samko S, Kilbas A, Marichev O. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications[M]. Yverdon: Gordon and Breach, 1993.

[4] Bai Z, L H. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 311: 495-505.

[5] Sun Yongping, Zhao Min. Positive solutions for a class of fractional differential equations with integral boundary conditions[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 34: 17-21.

[6] Zhang X, Liu L, Wu Y. The uniqueness of positive solution for a fractional order model of turbulent flow in a porous medium[J]. Applied Mathematics Letters, 2014, 37: 26-33.

[7] Zhai C, Hao M. Fixed point theorems for mixed monotone operators with perturbation and applications to fractional differential equation boundary value problems[J]. Nonlinear Anal, 2012, 75: 2 542-2 551.

[8] Nieto J J, Pimentel J. Positive solutions of a fractional thermostat model[J]. Bound, 2013, 5: 1-11.

[9] Yang Chen, Yan Jurang, Existence and uniqueness of positive solutions to three-point boundary value problems for second order impulsive differential equations[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011, 70: 1-10.

[责任编辑:陆炳新]