

一类浅水波模型的数值方法

张 俊¹, 范馨月²

(1. 贵州财经大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)

(2. 贵州大学理学院, 贵州 贵阳 550025)

[摘要] 考虑 BBM 型非线性水波方程的数值方法. 本文构造了二种半隐的数值格式. 以 BBM 方程为例, 严格分析了二种格式的稳定性与误差估计, 证明了二种格式都是无条件稳定的. 误差估计显示, 线性 Euler 时间离散加谱 Galerkin 空间离散的收敛阶是 $O(\Delta t + N^{1-m})$, 线性 Crank-Nicolson 时间离散加谱 Galerkin 空间离散的收敛阶是 $O(\Delta t^2 + N^{1-m})$. 最后我们用数值例子讨论这两类方程解的长时间衰减率, 并讨论扩散项、色散项、非线性项对解的衰减率的影响. 数值例子表明, 这两类浅水波方程的衰减率是: L^2 范接近 $-\frac{1}{4}$; L^∞ 范接近 $-\frac{1}{2}$; H^1 半范接近 $-\frac{3}{4}$, 这与已知的理论结果是吻合的.

[关键词] BBM 方程, 无条件稳定, 有限差分法, 谱方法, 衰减率

[中图分类号] O156.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2015)01-0032-09

Numerical Methods for a Class of Shallow Water Equation

Zhang Jun¹, Fan Xinyue²

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

(2. College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: We turn to study the numerical solution of the shallow water equation. We propose two different schemes to numerically solve this equation. A detailed analysis is carried out for these schemes, and we prove that the overall schemes are unconditionally stable. The error estimation shows that the linearized Euler schema in time plus Fourier spectral method in space is convergent with the convergence order $O(\Delta t + N^{1-m})$, and higher order convergences can be obtained if the second order backward differentiation or Crank-Nicolson schema are used to discretize the equation in time. At last, we use the proposed methods to investigate the asymptotical decay rate of the solutions to the shallow water wave equation. We equally discuss the role of the diffusion terms, the geometric dispersion and the nonlinearity respectively. The performed numerical experiment confirms that the decay rates in L^2 -norm, L^∞ -norm, and H^1 -seminorm are very close to $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, and $-\frac{3}{4}$ respectively. These numerical results are consistent with the known theoretical prediction.

Key words: BBM equation, unconditionally stable, finite difference method, spectral method, decay rate

1 研究背景及现状

浅水波问题的研究, 最早起源于 1834 年英国数学家 Russell 对浅底运河中孤立波的实际观察. 他在 1844 年发表的《波动论》^[1] 中详细地阐述观察到的孤立波现象. KdV 方程最主要的性质是它具有孤立波解, 并且孤立波是孤立子. 由于小波锋的线性理论不能推导出孤立波, 所以研究这类问题的一个方法是对长波极限情形时控制方程的非线性逼近. 1895 年荷兰数学家 Kortew 和他的学生 de Vries 建立了非线性浅水波动方程, 即著名的 Kortew-de Vries (KdV)^[2] 方程:

收稿日期: 2014-05-16.

基金项目: 2013 贵州财经大学引进人才项目、贵州省科学技术基金(黔科合 J 字[2013]2028 号).

通讯联系人: 张俊, 博士, 副教授, 研究方向: 计算数学. E-mail: zj654440@163.com

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u \partial_x u = 0,$$

并从中求出了孤立子解,理论上证明了孤立子的存在. 1972 年 Benjamin, Bona 和 Mahony^[3]用 Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbf{R})} = O(t^{-\frac{1}{4}})$$

来描述水道中的表面波. 与 KdV 方程相比, BBM 方程具有更好的光滑性质,也具有 Hamilton 结构,可是它不是可积的,并且孤立波不是孤立子. 它的解都是整体存在的^[4],而且孤立波解是光滑的和轨道稳定的. 由于在一些实际问题上的应用,各种广义的 BBM 方程被人们逐渐认识. 在描述小振幅的长波在非线性色散介质中传播的时候必须考虑耗散机制的影响,这种耗散会影响解所反应的真实情况. 很多时候耗散会让波变得很复杂,不被我们所知. 探究这类方程解的衰减率同样是一个挑战性的问题. Albert^[5,6]考虑了如下广义 BBM 方程:

$$\partial_t u - \partial_t \partial_x^2 u + \partial_x u + u^p \partial_x u = 0, p > 4 \quad (1)$$

解的衰减率, Biler^[7]考虑了广义 BBM 方程:

$$\partial_t u - \Delta \partial_t u + \nabla \beta u + u^p (\alpha \cdot \nabla u) = 0, p > 3, \alpha, \beta \in \mathbf{R}^3, \beta \neq 0 \quad (2)$$

解的衰减率,并证明了方程(1)-(2)解的衰减率分别为: $\|u\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{1}{3}})$, $\|u\|_{L^\infty} = O(t^{-\frac{2}{3}})$, 当 $t \rightarrow \infty$. Amick, Bona 和 Schonbek^[8]以一类 KdV 和 BBM 方程为例,对任意的初值,从理论上证明了这些方程解的衰减率是:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbf{R})} = O(t^{-\frac{1}{4}}), \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = O(t^{-\frac{1}{2}}), t \rightarrow \infty. \quad (3)$$

相继又有很多人从事一类大时间 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBMB) 方程的衰减率的研究,如 Mei^[9], Chen 和 Goubet^[10], 张^[11], 方和郭^[12]研究了 n -维 BBM 方程解的衰减率,并都得到了与式(3)类似的结果. 但是,这些结果在很大程度上都需要数值实验去验证,特别是当时间很大的时候,我们很有必要知道我们的数值格式是否合理,计算结果是否可靠. 随着浅水波方程在实际问题中受到越来越广泛的关注,该模型的理论研究及数值模拟成为研究热点,在理论方面取得了很多重要的结果. Dogan^[13-15]提出了线性元,二次和五次 B-样条有限元来求解一类正则长波方程. 对 BBM 方程和 BBMB 方程, Omrani^[16,17]提出了一个时间二阶格式,空间有限元方法/有限差分的数值方法. 但是,目前用数值方法讨论这类方程解的渐进衰减率的工作还很少. Chen 等人^[10,18]提出了一种时间有限差分,空间谱方法的半隐格式. 但是这种格式是条件稳定的. 对这类方程而言,数值格式的难点在于,一方面要求所构造的格式必须尽可能的稳定,另一方面计算复杂度尽可能小.

本文用 BBM 方程的二种无条件稳定的数值格式来研究方程的衰减率,格式的优势在于我们不仅能选取较大的时间步长,而且每步迭代只需要解一个线性方程,最后我们用所提的数值格式研究了解的渐进衰减率,数值结果显示这类模型的解衰减率与已知的理论证明是吻合的.

2 BBM 方程

我们考虑如下耗散型 BBM 方程:

$$\partial_t u + \partial_x u - \partial_t \partial_x^2 u + u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, t \in (0, T], x \in \Lambda \quad (4)$$

满足下面初值条件:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \bar{\Lambda} \quad (5)$$

和边界条件:

$$u(x, t) = u(x+L, t), t \in (0, T], x \in \bar{\Lambda}, \quad (6)$$

这里 ν 是非负常数, $\Lambda = (0, L)$, $\bar{\Lambda} = [0, L]$, T 表示时间.

引理 1 方程(4)-(6)的解 u 满足如下能量不等式:

$$E(u) \leq E(u_0), \quad (7)$$

这里

$$E(u) = \|u\|_0^2 + \|\partial_x u\|_0^2.$$

证明 方程(4)两边与 u 做内积,可得:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \partial_t u \|_0^2 + \| \partial_t u \|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \partial_x u \|_0^2 + \nu \| \partial_x u \|_0^2 = 0.$$

于是

$$\frac{d}{dt} E(u) \leq 0.$$

两边对 t 积分即得式(7).

3 时间离散格式

在这里介绍 BBM 方程二个线性化的时间半离散格式并考察它们的稳定性. 对于一个给定的正整数 $K > 0, t = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, K$, 这里时间步长 $\Delta t = T/K$.

3.1 Euler 一阶半隐式格式

考虑如下基于 Euler 方法的一阶半隐式格式:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \partial_x u^{n+1} - \frac{1}{\Delta t} (\partial_x^2 u^{n+1} - \partial_x^2 u^n) + \frac{1}{3} (2u^n \partial_x u^{n+1} + u^{n+1} \partial_x u^n) - \nu \partial_x^2 u^{n+1} = 0, n \geq 0. \quad (8)$$

Euler 半隐格式有下列稳定性结果.

定理 1 Euler 格式, 即式(8)是无条件稳定的, 即对任意的 $\Delta t > 0$, 都有:

$$\| u^{n+1} \|_1 \leq \| u^n \|_1, n \geq 0. \quad (9)$$

证明 方程(8)与 $2\Delta t u^{n+1}$ 做内积, 注意到

$$(2u^n \partial_x u^{n+1} + u^{n+1} \partial_x u^n, u^{n+1}) = (u^n \partial_x u^{n+1} + \partial_x (u^{n+1} u^n), u^{n+1}) = 0.$$

则:

$$\| u^{n+1} \|_0^2 - \| u^n \|_0^2 + \| u^{n+1} - u^n \|_0^2 + \| \partial_x u^{n+1} \|_0^2 - \| \partial_x u^n \|_0^2 + \| \partial_x u^{n+1} - \partial_x u^n \|_0^2 + 2\nu \| \partial_x u^{n+1} \|_0^2 = 0.$$

因此我们有:

$$\| u^{n+1} \|_1^2 \leq \| u^n \|_1^2, n \geq 0.$$

定理得证.

注 从形式上来看, 上述格式在时间方向只有一阶精度. 显然, 这对长时间的数值模拟是不够的. 我们希望改进计算方法, 提高截断误差阶数. 因此, 我们考虑一个更高阶的数值格式.

3.2 C-N 基于 Crank-Nicolson 的二阶半隐格式

我们考虑如下基于 Crank-Nicolson 方法的二阶半隐格式:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \partial_x u^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t} (\partial_x^2 u^{n+1} - \partial_x^2 u^n) + \frac{1}{6} (2\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}) + u^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u^n - u^{n-1})) - \nu \partial_x^2 u^{n+\frac{1}{2}} = 0, n \geq 1, \quad (10)$$

这里 $u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2}$.

定理 2 设 $\{u^n\}$ 是时间半离散式(10)的解, 则有:

$$\| u^{n+1} \|_1 \leq \| u^n \|_1, n \geq 1. \quad (11)$$

证明 方程(10)与 $2\Delta t u^{n+\frac{1}{2}}$ 做内积, 注意到

$$(2\partial_x u^{n+\frac{1}{2}} (3u^n - u^{n-1}) + u^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u^n - u^{n-1}), u^{n+\frac{1}{2}}) = 0.$$

可得:

$$\| u^{n+1} \|_0^2 - \| u^n \|_0^2 + (\| \partial_x u^{n+1} \|_0^2 - \| \partial_x u^n \|_0^2) + 2\Delta t \nu \| \partial_x u^{n+\frac{1}{2}} \|_0^2 = 0.$$

因此, 我们有:

$$\| u^{n+1} \|_1^2 \leq \| u^n \|_1^2, n \geq 1.$$

定理得证.

4 空间谱方法

在这节我们讨论方程(4)、(5)的空间谱方法. 由于 Fourier 谱方法对周期问题特别适用, 因此我们用

Fourier-Galerkin 谱方法对空间进行离散. 首先引入一些基本的定义与记号. 我们定义 N 次 (正整数) 多项式空间 $S_N = \text{span} \{ \exp(-ikx) : |k| \leq N \}$, 定义 L^2 投影算子 $\pi_N: L^2(\Lambda) \rightarrow S_N$, 使得:

$$(\pi_N v - v, \psi) = 0, \forall \psi \in S_N$$

和 H^1 投影算子 $\pi_N^1: H^1(\Lambda) \rightarrow S_N$, 使得:

$$(\partial_x(\pi_N^1 v - v), \partial_x \psi) = 0, (\pi_N^1 v - v, \psi) = 0, \forall \psi \in S_N.$$

由文献[19,20]可知下面的误差估计式成立:

$$\begin{aligned} \|u - \pi_N u\|_0 &\leq N^{-m} \|u\|_m, \forall u \in H^m(\Lambda), m > 0, \\ \|u - \pi_N^1 u\|_0 &\leq N^{k-m} \|u\|_m, \forall u \in H^m(\Lambda), m > 0, k = 0, 1. \end{aligned} \quad (12)$$

4.1 Euler/F-G

基于 Fourier-Galerkin 谱方法的全离散一阶半隐格式是: 求 $u_N^{n+1} \in S_N$, 使得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(u_N^{n+1} - u_N^n, \psi_N) + (\partial_x u_N^{n+1}, \psi_N) + \frac{1}{\Delta t}(\partial_x^2 u_N^{n+1} - \partial_x^2 u_N^n, \partial_x \psi_N) + \frac{1}{3}(2u_N^n \partial_x u_N^{n+1} + u_N^{n+1} \partial_x u_N^n, \psi_N) + \\ \nu(\partial_x u_N^{n+1}, \partial_x \psi_N) = 0, n \geq 0, \forall \psi_N \in S_N. \end{aligned} \quad (13)$$

下面推导全离散误差. 为此定义误差函数:

$$\tilde{e}_N^n = \pi_N^1 u(\cdot, t_n) - u_N^n, \hat{e}_N^n = u(\cdot, t_n) - \pi_N^1 u(\cdot, t_n), e_N^n = u(\cdot, t_n) - u_N^n = \tilde{e}_N^n + \hat{e}_N^n, n > 0,$$

与截断误差 $R_1^{n+1}(x) = r_1^{n+1}(x) + r_2^{n+1}(x)$, $n \geq 0$, 这里

$$r_1^{n+1}(x) = \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} - \partial_t u(x, t_{n+1}), r_2^{n+1}(x) = \frac{\partial_x^2 u(x, t_{n+1}) - \partial_x^2 u(x, t_n)}{\Delta t} - \partial_x^2 \partial_t u(x, t_{n+1}).$$

由 Taylor 展开式可得:

$$\|r_1^{n+1}\|_0^2 \leq c \Delta t^2, \|r_2^{n+1}\|_0^2 \leq c \Delta t^2. \quad (14)$$

首先我们有如下稳定性结果:

定理 3 全离散问题 (13) 的解满足如下能量不等式:

$$\|u_N^{n+1}\|_1 \leq \|u_N^n\|_1, n \geq 0. \quad (15)$$

证明 与定理 1 的证明相似.

定理 4 设 u 为式 (4)-(6) 的精确解, $\{u_N^k\}_{k=0}^K$ 为式 (13) 的数值解. 假设 u 足够光滑 (至少对时间二阶可导, 对空间 m 阶可导), 则下面的误差估计式成立:

$$\|u(\cdot, t_k) - u_N^k\|_1 \leq c(\Delta t + N^{1-m}), k = 0, 1, \dots, K, \quad (16)$$

这里 c 只与 ν, T, u 有关, 与 $\Delta t, N$ 无关.

证明 方程 (4) 与 $\psi_N \in S_N$ 做内积并减去方程 (13), 有:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{e}_N^{n+1} - \tilde{e}_N^n}{\Delta t}, \psi_N\right) + (\partial_x \tilde{e}_N^{n+1}, \psi_N) + \frac{1}{\Delta t}(\partial_x \tilde{e}_N^{n+1} - \partial_x \tilde{e}_N^n, \partial_x \psi_N) + (u(\cdot, t_{n+1}) \partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \frac{1}{3}(2u_N^n \partial_x u_N^{n+1} + u_N^{n+1} \partial_x u_N^n), \psi_N) + \\ \nu(\partial_x \tilde{e}_N^{n+1}, \partial_x \psi_N) = (R_1^{n+1}, \psi_N) + ((\pi_N^1 - I) \partial_x u(\cdot, t_{n+1}), \psi_N) + \frac{1}{\Delta t}((\pi_N^1 - I)(u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t_n)), \psi_N) + \\ \frac{1}{\Delta t}((\pi_N^1 - I)(\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u(\cdot, t_n)), \partial_x \psi_N). \end{aligned}$$

取 $\psi_N = 2\Delta t \tilde{e}_N^{n+1}$, 可得:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2 - \|\tilde{e}_N^n\|_1^2 &\leq 2\Delta t \|R_1^{n+1}\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0 + 2\Delta t \|\partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0 + 2\|(\pi_N^1 - I)(u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t_n))\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0 + \\ &\quad + 2\|(\pi_N^1 - I)(\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u(\cdot, t_n))\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0 + \\ &\quad + 2\Delta t \|u(\cdot, t_{n+1}) \partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \frac{1}{3}(2u_N^n \partial_x u_N^{n+1} + u_N^{n+1} \partial_x u_N^n)\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0 =: T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \end{aligned} \quad (17)$$

现在逐项估计 $T_i, i = 1, \dots, 4$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young's 不等式, 我们有:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \Delta t (\|R_1^{n+1}\|_0^2 + \|(\pi_N^1 - I) \partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2) + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2, \\ T_2 &\leq 2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I) \partial_t u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 dt + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2, \end{aligned}$$

$$T_3 \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I) \partial_x \partial_t u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 dt + 2\Delta t \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2,$$

$$T_4 \leq \Delta t (\|A_1\|_0^2 + \|A_2\|_0^2 + \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2),$$

这里

$$A_1 = u(\cdot, t_{n+1}) \partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - u_N^n \partial_x u_N^{n+1}, A_2 = u(\cdot, t_{n+1}) \partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - u_N^{n+1} \partial_x u_N^n.$$

利用积分余项的 Taylor 展开式和 Young's 不等式,可以得到:

$$\begin{aligned} \|A_1\|_0^2 &\leq 3 \|(u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t_n)) \partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 + 3 \|(u(\cdot, t_n) - u_N^n) \partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 + \\ &3 \|u_N^n (\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u_N^{n+1})\|_0^2 \leq 3\Delta t \|\partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_{L^\infty}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t u(\cdot, t)\|_0^2 dt + \\ &3 \|\partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_{L^\infty}^2 \|e_N^n\|_0^2 + 3 \|u_N^n\|_{L^\infty}^2 \|\partial_x e_N^{n+1}\|_0^2, \\ \|A_2\|_0^2 &\leq 3 \|(\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u(\cdot, t_n)) u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 + 3 \|(u(\cdot, t_{n+1}) - u_N^{n+1}) \partial_x u(\cdot, t_n)\|_0^2 + \\ &3 \|u_N^{n+1} (\partial_x u(\cdot, t_n) - \partial_x u_N^n)\|_0^2 \leq 3\Delta t \|\partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_{L^\infty}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|\partial_t \partial_x u(\cdot, t)\|_0^2 dt + \\ &3 \|\partial_x u(\cdot, t_n)\|_{L^\infty}^2 \|e_N^{n+1}\|_0^2 + 3 \|u_N^{n+1}\|_{L^\infty}^2 \|\partial_x e_N^n\|_0^2, \end{aligned}$$

由定理 3 中的稳定性结果,可得 $\|u_N^n\|_{L^\infty}$ 的有界性. 因此

$$\|A_1\|_0^2 + \|A_2\|_0^2 \leq c(\Delta t^2 + \|e_N^n\|_0^2 + \|e_N^{n+1}\|_0^2 + \|\partial_x e_N^n\|_0^2 + \|\partial_x e_N^{n+1}\|_0^2).$$

将上述结果代入式(17)可得:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2 - \|\tilde{e}_N^n\|_1^2 &\leq \Delta t \|R_1^{n+1}\|_0^2 + \Delta t \|(\pi_N^1 - I) \partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2 + \\ &2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I) \partial_t u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 dt + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2 + 2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I) \partial_t \partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0^2 dt + \\ &2\Delta t \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+1}\|_0^2 + c(\Delta t^2 + \|e_N^n\|_0^2 + \|e_N^{n+1}\|_0^2 + \|\partial_x e_N^n\|_0^2 + \|\partial_x e_N^{n+1}\|_0^2). \end{aligned}$$

不等式两边对 $n=0, 1, \dots, k$ 求和,并注意到式(12)和式(14),得:

$$\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_1^2 - \|\tilde{e}_N^0\|_1^2 \leq c(\Delta t^2 + N^{2-2m}) + c\Delta t \sum_{n=0}^k (\|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2 + \|\tilde{e}_N^n\|_1^2), k=0, \dots, K-1.$$

由离散的 Gronwall 引理,有:

$$\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_1^2 \leq c(\Delta t^2 + N^{2-2m}), k=0, \dots, K-1.$$

最后利用三角不等式可得式(16).

4.2 C-N/F-G

二阶格式(10)的 Fourier 谱方法是:对给定的 $u_N^0 = \pi_N u_0$,求 $u_N^{n+1} \in S_N$,使得:

$$\begin{aligned} &(\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t}, \psi_N) + (\partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) - (\frac{\partial_x^2 u_N^{n+1} - \partial_x^2 u_N^n}{\Delta t}, \psi_N) - \nu (\partial_x^2 u_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) + \frac{1}{6} (2\partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}} (3u_N^n - u_N^n) + \\ &u_N^{n+\frac{1}{2}} \partial_x (3u_N^n - u_N^{n-1}), \psi_N) = 0, n \geq 1, \psi_N \in S_N. \end{aligned} \quad (18)$$

为了方便分析上述数值格式的误差估计,我们定义截断误差 $R_3^{\frac{1}{2}}(x) = r_5^{\frac{1}{2}}(x) + r_6^{\frac{1}{2}}(x)$, $n \geq 0$, 这里:

$$r_5^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\Delta t} - \partial_t u(x, t_{n+1}), r_6^{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\partial_x^2 u(x, t_{n+1}) - \partial_x^2 u(x, t_n)}{\Delta t} - \partial_x^2 \partial_t u(x, t_{n+1}).$$

由 Taylor 展开式可得:

$$\|r_1^{n+1}\|_0^2 \leq c\Delta t^4, \|r_2^{n+1}\|_0^2 \leq c\Delta t^4. \quad (19)$$

定理 5 C-N/F-G 格式是无条件稳定的,即对任意的 $\Delta t \geq 0$,都有如下能量不等式成立:

$$\|u_N^{n+1}\|_1 \leq \|u_N^n\|_1, n \geq 0.$$

证明 与定理 2 的证明相似.

定理 6 离散格式(18)具有时间二阶精度,空间谱精度,即 C-N/F-G 格式解有如下估计式:

$$\|u(\cdot, t_k) - u_N^k\|_1 \leq c(\Delta t^2 + N^{1-m}), k=0, 1, \dots, K. \quad (20)$$

证明 由方程(4)和(18)可得:

$$(\frac{\tilde{e}_N^{n+1} - \tilde{e}_N^n}{\Delta t}, \psi_N) + (\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) + \frac{1}{\Delta t} (\partial_x \tilde{e}_N^{n+1} - \partial_x \tilde{e}_N^n, \partial_x \psi_N) + \nu (\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}, \partial_x \psi_N) + (u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}}) \partial_x u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}}) -$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}(2\partial_x u_N^{n+1}(3u_N^n - u_N^{n-1}) + u_N^{n+\frac{1}{2}}\partial_x(3u_N^n - u_N^{n-1}), \psi_N) = (R_3^{n+\frac{1}{2}}, \psi_N) + ((\pi_N^1 - I)\partial_x u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}}), \psi_N) + \\ & \frac{1}{\Delta t}((\pi_N^1 - I)(u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t_n)), \psi_N) + \frac{1}{\Delta t}((\pi_N^1 - I)(\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u(\cdot, t_n)), \partial_x \psi_N). \end{aligned}$$

在上式中取 $\psi_N = 2\Delta t \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}$, 可得:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2 - \|\tilde{e}_N^n\|_1^2 \leq 2\Delta t \|R_3^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + 2\Delta t \|\partial_x u(\cdot, t_{n+1})\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + \\ & 2\|(\pi_N^1 - I)(u(\cdot, t_{n+1}) - u(\cdot, t_n))\|_0 \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + 2\|(\pi_N^1 - I)(\partial_x u(\cdot, t_{n+1}) - \partial_x u(\cdot, t_n))\|_0 \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0 + \\ & 2\Delta t \|u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}})\partial_x u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{6}(2\partial_x u_N^{n+1}(3u_N^n - u_N^{n-1}) + u_N^{n+\frac{1}{2}}\partial_x(3u_N^n - u_N^{n-1}))\|_0 \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0 =: \\ & Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4. \end{aligned} \quad (21)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和 Young's 不等式, 我们有:

$$\begin{aligned} Q_1 & \leq \Delta t (\|R_3^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \|(\pi_N^1 - I)\partial_x u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}})\|_0^2) + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2, \\ Q_2 & \leq 2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I)\partial_t u(\cdot, t)\|_0^2 dt + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2, \\ Q_3 & \leq 2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I)\partial_x \partial_t u(\cdot, t)\|_0^2 dt + 2\Delta t \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2, \\ Q_4 & \leq \Delta t (\|D_1\|_0^2 + \|D_2\|_0^2 + \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2), \end{aligned}$$

类似的有:

$$\|D_1\|_0^2 + \|D_2\|_0^2 \leq c(\Delta t^4 + \|3e_N^n - e_N^{n-1}\|_1^2 + \|e_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2).$$

将上述估计全部代入式(21)可得:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2 - \|\tilde{e}_N^n\|_1^2 & \leq \Delta t \|R_3^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \Delta t \|(\pi_N^1 - I)\partial_x u(\cdot, t_{n+\frac{1}{2}})\|_0^2 + 2\Delta t \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I)\partial_t u(\cdot, t)\|_0^2 dt + \\ & \Delta t \|\tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|(\pi_N^1 - I)\partial_x \partial_t u(\cdot, t)\|_0^2 dt + \Delta t \|\partial_x \tilde{e}_N^{n+\frac{1}{2}}\|_0^2 + c(\Delta t^4 + \|3e_N^n - e_N^{n-1}\|_1^2 + \|e_N^{n+\frac{1}{2}}\|_1^2). \end{aligned}$$

不等式两边对 $n=0, 1, \dots, k$ 求和, 并由式(12)和式(18), 可得:

$$\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_1^2 \leq c(\Delta t^4 + N^{2-2m}) + c\Delta t \sum_{n=0}^k \|\tilde{e}_N^{n+1}\|_1^2, k=0, \dots, K-1.$$

由 Gronwall 引理可得:

$$\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_1^2 \leq c(\Delta t^4 + N^{2-2m}), k=1, 2, \dots, K-1.$$

由 $e_N^n = \hat{e}_N^n + \tilde{e}_N^n, n \geq 0$, 即有式(20)成立.

5 BBM 方程的数值结果

5.1 数值有效性

在这节, 我们将讨论 BBM 方程的数值格式的有效性. 考虑如下 BBM 方程:

$$\begin{aligned} & \partial_t u + \partial_x u - \beta \partial_x^2 u + \gamma u \partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0, t \in (0, T], x \in \Lambda, \\ & u(x, 0) = u_0(x), u(x, t) = u(x+L, t), t \in (0, T], x \in \bar{\Lambda}, \end{aligned} \quad (22)$$

这里我们引入参数 β, γ 以便我们考察色散项、非线性项对衰减率的影响. 我们对空间用 Fourier-Galerkin 谱方法离散, 类似可以得到关于 $\{\hat{u}_k^{n+1}\}$ 的一系列方程组.

5.1.1 Euler/F-G 格式

$$\frac{1}{\Delta t}(\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n)(1 + \beta(2\pi k/L)^2) + (i2\pi k/L + \nu(2\pi k/L)^2)\hat{u}_k^{n+1} + \frac{\gamma}{3}\{2u_N^n \partial_x u_N^{n+1} + u_N^{n+1} \partial_x u_N^n\}_k = 0.$$

5.1.2 C-N/F-G 格式

$$\frac{1}{\Delta t}(\hat{u}_k^{n+1} - \hat{u}_k^n)(1 + \beta(2\pi k/L)^2) + (i2\pi k/L + \nu(2\pi k/L)^2)\hat{u}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{6}\{2(3u_N^n - u_N^{n-1})\partial_x u_N^{n+\frac{1}{2}} + u_N^{n+\frac{1}{2}}\partial_x(3u_N^n - u_N^{n-1})\}_k = 0.$$

下面,我们将验证数值方法的有效性. 由文献[21]知,当 $\beta=\gamma=1, \nu=0$ 时方程(22)存在唯一准确解:

$$u(x, t) = 3 \operatorname{sech}^2(\sqrt{0.5^3}(x - 2t - x_0))^2, \quad (23)$$

这里 $x_0=L/2$. 对应的初值条件为 $u(x, 0) = 3 \operatorname{sech}^2(\sqrt{0.5^3}(x - x_0))^2, L=400, T=1$. 为了观察数值解的精度, 我们计算 L^2 和 H^1 范数下的 $\|u(T) - u_N^K\|$ 误差.

图 1 给出了多项式逼近阶数分别取 $N=500, 700$ 时 L^2, H^1 范数下的误差, 分别对 Δt -轴与 Error-轴取对数. 由图可知 Euler/F-G 格式在时间方向上的误差阶接近 1 阶, Euler/F-G 格式和 C-N/F-G 格式在时间方向上的误差阶接近 2 阶. 这与理论证明是一致的.

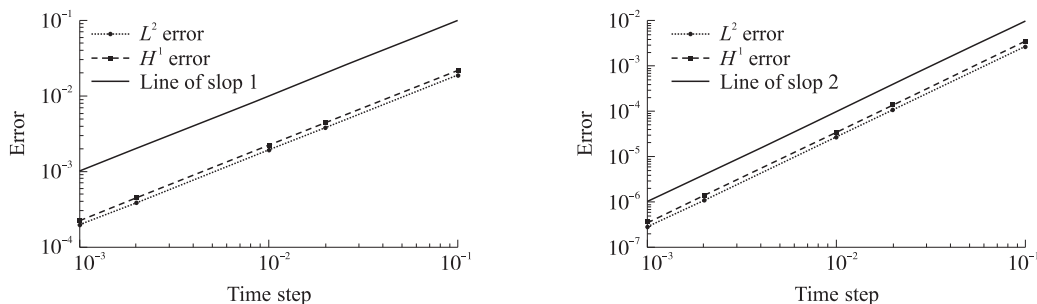


图 1 Euler/F-G 格式和 C-N/F-G 格式, 不同范数下的误差随时间步长 Δt 的变化情况

Fig. 1 Convergence rate in time for the Euler/F-G and C-N/F-G

5.2 解的长时间衰减率

我们利用 C-N/F-G 格式计算解在半 H^1, L^2, L^∞ 范数下的衰减率(分别记为 R_1, R_2, R_∞). 取 $u(x, 0) = 3 \operatorname{sech}^2(\sqrt{0.5^3}(x - x_0))^2, \Delta t = 1, T = 1\,000$. 结果如表 1 所示, 我们可以看到 R_1, R_2, R_∞ 分别接近 $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$. 这些结果验证了理论的衰减率.

表 1 不同参数下解的衰减率

Table 1 Decay rates in time of the solution for different parameters

扩散项 ν	色散项 β	非线性项 γ	R_1	R_2	R_∞
1	1	1	-0.760 7	-0.254 2	-0.516 8
1	1	0	-0.749 8	-0.249 8	-0.499 6
1	0	1	-0.751 0	-0.250 0	-0.496 4
0.1	1	0	-0.741 3	-0.245 6	-0.431 3
0.1	1	0.1	-0.664 7	-0.253 1	-0.446 7
0.1	0	0	-0.732 8	-0.243 9	-0.486 6
0.5	0.1	0.1	-0.748 4	-0.249 6	-0.497 2
0.5	0	0.1	-0.747 7	-0.249 3	-0.499 0
0.5	0.1	0	-0.748 1	-0.249 3	-0.498 7

5.3 各种参数对衰减率的影响

这节讨论不同的参数 β, γ, ν 对解的衰减率的影响. 取 $T=5\,000, L=2\,000, N=300, \Delta t=1$, 初值不变.

由图 2 可知 β 对两个范数下的衰减率的影响明显, 随着 β 逐渐增大, 解的衰减率减小.

由图 3、4 可知, 随着 γ, ν 逐渐增大, 解的衰减率轻微下降.

6 结语

数值格式的难点在于, 一方面要求所构造的格式必须尽可能的稳定, 另一方面计算复杂度尽可能小. 本文提出 BBM 方程的 2 种无条件稳定的数值格式, 格式的优势在于我们不仅能选取较大的时间步长, 而且每步迭代只需要解一个线性方程, 这使得格式在计算浅水波模型的衰减率上特别适用. 最后我们用所提的数值格式研究了解的渐进衰减率, 数值结果显示这两类模型的解衰减率是: L^2 范数接近 $-\frac{1}{4}, L^\infty$ 范数

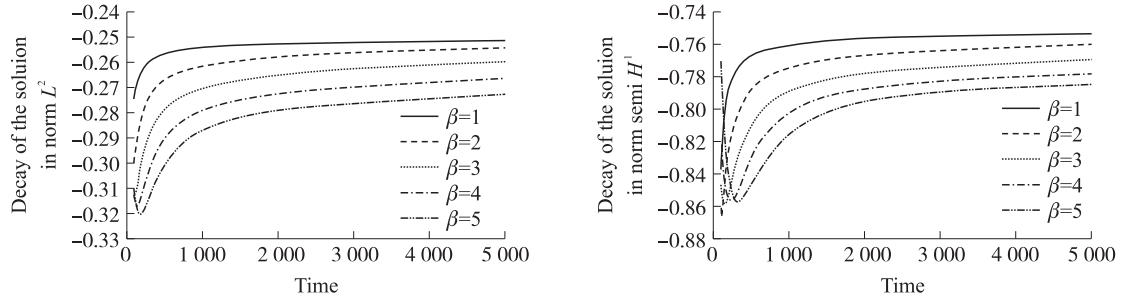

 图 2 $\gamma=\nu=1$ 时,不同时刻 L^2 与半 H^1 范数下的衰减率

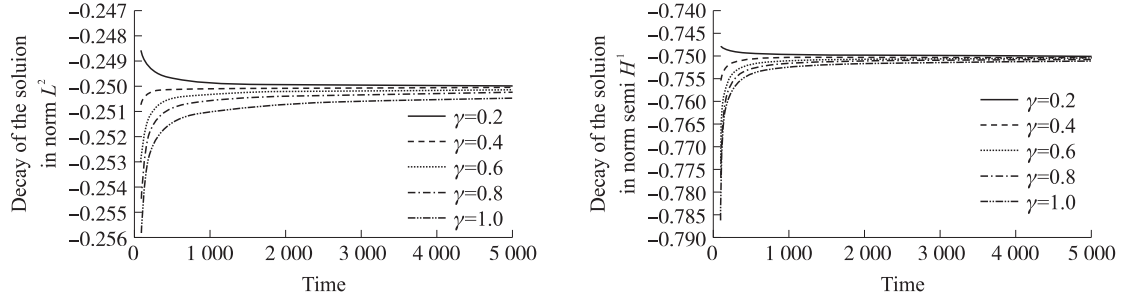
 Fig. 2 Decay rate in the L^2 -norm(left) and H^1 -norm(right) as a function of time for $\gamma=\nu=1$

 图 3 $\beta=1, \nu=0.1$ 时,不同时刻 L^2 与半 H^1 范数下的衰减率

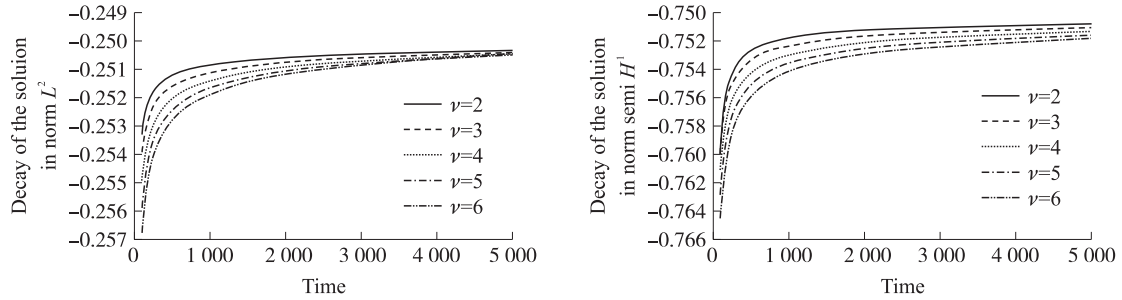
 Fig. 3 Decay rate in the L^2 -norm(left) and H^1 -norm(right) as a function of time for $\beta=1, \nu=0.1$

 图 4 $\beta=0.1, \gamma=1$ 时,不同时刻 L^2 与半 H^1 范数下的衰减率

 Fig. 4 Decay rate in the L^2 -norm(left) and H^1 -norm(right) as a function of time for $\beta=0.1, \gamma=1$

接近 $-\frac{1}{2}$, H^1 半范数接近 $-\frac{3}{4}$. 这些数值结果与 Amick, Bona 和 Schonbek^[8], Mei^[9], Chen 和 Goubet^[10] 等人的理论证明是吻合的.

[参考文献]

- [1] Russell J. Report on waves[C]//14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science.London,1844:311-390.
- [2] Korteweg D D J, deVries D G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240):422-443.
- [3] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1972, 272(1220):47-78.
- [4] Medeiros L A, Menzala G P. Existence and uniqueness for periodic solutions of the benjamin-bona-mahony equation[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1977, 8(5):792-799.
- [5] Albert J. Dispersion of low-energy waves for the generalized benjamin-bona-mahony equation[J]. Journal of Differential Equations, 1986, 63(1):117-134.

- [6] Albert J. On the decay of solutions of the generalized benjamin-bona-mahony equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989, 141(2): 527–537.
- [7] Biler P. Long time behavior of solutions of the generalized Benjamin-Bona-Mahony equation in two space dimensions[D]. Paris: Departement de Mathematiques, Universite de Paris-sud, 1991.
- [8] Amick C, Bona J, Schonbek M E. Decay of solutions of some nonlinear wave equations[J]. Journal of Differential Equations, 1989, 81(1): 1–49.
- [9] Mei M. l_q -decay rates of solutions for benjamin-bona-mahony-burgers equations[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 158(2): 314–340.
- [10] Chen M, Dumont S, Dupaigne L, et al. Decay of solutions to a water wave model with a nonlocal viscous dispersive term[J]. Discrete Cont Dyn Syst-Ser A, 2010, 27(4): 1 473–1 492.
- [11] Zhang L. Decay of solutions of generalized benjamin-bona-mahony equations in n -space dimensions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 1995, 25: 1 345–1 369.
- [12] Fang S, Guo B. The decay rates of solutions of generalized benjamin-bona-mahony equations in multi-dimensions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(7): 2 230–2 235.
- [13] Dogan A. Numerical solution of rlw equation using linear finite elements withi galerkin's method[J]. Applied Mathematical Modelling, 2002, 26(7): 771–783.
- [14] Saka B, Dag I, Dogan A. Galerkin method for the numerical solution of the rlw equation using quadratic b -splines[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2004, 81(6): 727–739.
- [15] Dag I, Saka B, Irk D. Galerkin method for the numerical solution of the rlw equation using quintic b -splines[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 190(1): 532–547.
- [16] Omrani K. The convergence of fully discrete galerkin approximations for the Benjamin-bona-mahony (bbm) equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 180(2): 614–621.
- [17] Omrani K, Ayadi M. Finite difference discretization of the benjaminbona-mahony-burgers equation[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2008, 24(1): 239–248.
- [18] Chen M. Numerical investigation of a two-dimensional boussinesq system[J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2009, 28(4): 1 169–1 190.
- [19] Quarteroni A, Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
- [20] Khismatullin D, Renardy Y, Renardy M. Development and implementation of vof-prost for 3d viscoelastic liquid simulations[J]. Journal of Non-Newtonian Uid Mechanics, 2006, 140(1): 120–131.
- [21] Chen M. Exact traveling-wave solutions to bi-directional wave equations[J]. International Journal of Theoretical Physics, 1998, 37(5): 1 547–1 567.

[责任编辑: 丁 蓉]