

# 不同方向缺陷磁场对量子自旋体系纠缠和信息传输的影响

李延标<sup>1</sup>, 秦 猛<sup>1,2</sup>, 王 晓<sup>1</sup>, 刘翠翠<sup>1</sup>, 王必利<sup>1</sup>

(1. 中国人民解放军理工大学理学院, 江苏 南京 211101)

(2. 南京大学物理学院, 江苏 南京 210093)

[摘要] 为了提高信息传输的保真度, 研究了缺陷磁场对自旋系统中纠缠和保真度的作用, 讨论了不同方向缺陷磁场、温度、各向异性作用对纠缠和量子通讯的影响. 研究发现, 由  $z$  方向的磁场诱导的纠缠一般较  $x$  方向磁场诱导的纠缠大.  $z$  方向磁场和  $x$  方向磁场对保真度的影响具有竞争作用, 反铁磁系统更适合于信息的传输.

[关键词] 量子通讯, 量子纠缠, 保真度

[中图分类号] O431.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2015)02-0038-05

## Effects of Different Defect Magnetic Fields on Entanglement and Information Transmission in Quantum Spin Systems

Li Yanbiao<sup>1</sup>, Qin Meng<sup>1,2</sup>, Wang Xiao<sup>1</sup>, Liu Cuicui<sup>1</sup>, Wang Bili<sup>1</sup>

(1. Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

(2. Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

**Abstract:** In order to enhance the fidelity in quantum communications, we investigate the effects of different defect magnetic field on the entanglement and information transmission in a quantum spin model. We discuss the effects of different defect magnetic field, temperature and anisotropy interaction on the entanglement and quantum communication. The results show that the entanglement in  $z$ -direction is stronger than  $x$ -direction. There is competition relation between the two different magnetic fields. We also find that the antiferromagnetic system is more proper for information transmission.

**Key words:** quantum communications, quantum entanglement, fidelity

量子信息科学<sup>[1]</sup>是将量子力学基本原理运用到信息论和计算机科学中而产生的新兴前沿交叉学科, 它有着比经典物理更加优越和丰富的特性, 是当前国内外研究最活跃和最重要的课题之一. 在完成量子信息处理任务的过程中, 作为一种物理资源的纠缠<sup>[2]</sup>扮演着非常重要的角色, 量子通信和量子计算<sup>[3]</sup>之所以可以实现诸多经典方法所不能完成的任务, 主要就是因为纠缠的存在, 因此纠缠的制备、操控、刻画、传输等方面的研究也成为了量子信息科学研究的热点领域.

固态系统中的热纠缠<sup>[4]</sup>, 因其稳定的优点不同于其他形式的纠缠, 它在制备过程中既不要求测量也不要求相互作用的控制, 因此研究各种系统中的热纠缠是很有价值的. 海森堡模型作为简单而又有实际意义的固态物理系统, 被认为是实现量子通信和量子计算最有前景的物理体系之一. 海森堡模型可以用来构造量子计算机和量子点<sup>[5]</sup>, 经过恰当编码, 海森堡链可以用作量子计算. 海森堡自旋链在热平衡状态下的热纠缠已经被广泛地应用于量子计算等各个领域<sup>[6-9]</sup>.

最近有研究人员指出<sup>[10]</sup>, 可以通过调整磁场方向得到更佳的纠缠控制参量, 从而更加有效地增加系统的纠缠, 亦即不同方向的磁场对固态系统中的纠缠具有很大的影响. 基于该项研究, 我们进而考虑到, 如果给系统所加的磁场并非均匀磁场, 而是现实环境中普遍存在的具有缺陷的磁场, 这时候会有什么结

收稿日期: 2014-05-02.

基金项目: 中国人民解放军理工大学预研基金.

通讯联系人: 李延标, 副教授, 研究方向: 量子信息. E-mail: liyanbiao@yeah. net

果? 本文首先对自旋为 1/2 的两量子位海森堡 XXZ 模型的纠缠进行了研究,然后分析了利用该系统传输信息的结果.

## 1 系统描述

周期性边界条件下自旋为 1/2 的粒子在沿  $z$  方向缺陷磁场下的哈密顿量可以写作

$$H = JS_1^x S_2^x + JS_1^y S_2^y + \Delta S_1^z S_2^z + B_z S_1^z. \quad (1)$$

这里,  $S_i^\alpha (\alpha=x, y, z)$  是自旋算符,  $J$  是  $x, y$  方向海森堡交换作用常数,  $\Delta$  是  $z$  方向各项异性参量, 表征各项异性的程度.  $B_z$  为沿着  $z$  方向的磁场, 这里只将磁场加在其中一个粒子上, 即缺陷磁场.

经过对角化处理, 我们可以得到该系统的本征值和本征态为:

$$\begin{aligned} E_1 &= \Delta - B_z, \\ E_2 &= \sqrt{B_z^2 + 4J^2} - \Delta, \\ E_3 &= -\sqrt{B_z^2 + 4J^2} - \Delta, \\ E_4 &= \Delta + B_z, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= |11\rangle, \\ \psi_2 &= (\xi_+ |01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{\xi_+^2 + 1}, \\ \psi_3 &= (\xi_- |01\rangle + |10\rangle) / \sqrt{\xi_-^2 + 1}, \\ \psi_4 &= |00\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

式中:  $\xi_{\pm} = \frac{B_z \pm \sqrt{B_z^2 + 4J^2}}{2J}$ .

在热平衡条件下的系统的态可写为  $\rho = Z^{-1} \exp(-\beta H)$ ,  $Z$  为系统的配分函数,  $Z = \text{Tr}(\exp(-\beta H))$ ,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  为玻尔兹曼常数, 为简单起见, 一般令  $k_B = 1$ . 在本征值和本征态的基础上, 我们可以写出系统的密度矩阵表示:

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (4)$$

周期性边界条件下自旋为 1/2 的粒子在沿  $x$  方向缺陷磁场下的哈密顿量可以写作

$$H = JS_1^x S_2^x + JS_1^y S_2^y + \Delta S_1^z S_2^z + B_x S_1^x. \quad (5)$$

各个符号的意义同上, 只有  $B_x$  表示沿着  $x$  方向的磁场. 我们进一步地可以得到当磁场沿着  $x$  方向时的本征值和本征态, 由于本征态表达式较为繁琐, 这里不拟给出, 其本征值为

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -J - \sqrt{B_x^2 + J^2 + 2J\Delta + \Delta^2}, \\ \Gamma_2 &= J + \sqrt{B_x^2 + J^2 - 2J\Delta + \Delta^2}, \\ \Gamma_3 &= J - \sqrt{B_x^2 + J^2 - 2J\Delta + \Delta^2}, \\ \Gamma_4 &= -J + \sqrt{B_x^2 + J^2 + 2J\Delta + \Delta^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2 度量方法

关于两体系统的纠缠, 现在有很多的度量方法, 有 1 个度量方法得到了广泛的应用, 那就是并发纠缠<sup>[11]</sup>. 设  $\rho_{AB}$  是两体二维系统中的 1 个混合态, 其并发纠缠定义为

$$C = \max \left[ 2 \max(\lambda_i) - \sum_{i=1}^4 \lambda_i, 0 \right], \quad (7)$$

式中:  $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$  为矩阵  $R = \rho_{AB} (\sigma_A^x \otimes \sigma_B^x) \rho_{AB}^* (\sigma_A^x \otimes \sigma_B^x)$  本征值的平方根, 且  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ .

如果我们采用上述系统来进行信息的传输, 使用文献[12, 13]所提出的通信协议, 考虑输入的态为  $|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2) |10\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |01\rangle$  ( $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ). 输出态由下式得到

$$\rho_{out} = \sum_{i,j} p_{ij} (\sigma_i \sigma_j) \rho_{in} (\sigma_i \sigma_j), \quad (8)$$

式中:  $\sigma_i (i=0, x, y, z)$  表示单位矩阵和 Pauli 矩阵,  $p_{ij} = \text{tr}[E^i \rho(T)] \text{tr}[E^j \rho(T)]$ ,  $\sum p_{ij} = 1$ ,  $\rho_{\text{in}} = |\psi\rangle_{\text{in}} \langle\psi|$ ,  $E^0 = |\psi^-\rangle \langle\psi^-|$ ,  $E^1 = |\Phi^-\rangle \langle\Phi^-|$ ,  $E^2 = |\Phi^+\rangle \langle\Phi^+|$ ,  $E^3 = |\psi^+\rangle \langle\psi^+|$ ,  $|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ ,  $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ .

输入态和输出态之间的相似程度可以使用保真度来描述,保真度被定义为<sup>[14]</sup>

$$F(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}) = \left\{ \text{tr} \left[ \sqrt{(\rho_{\text{in}})^{1/2} \rho_{\text{out}} (\rho_{\text{in}})^{1/2}} \right] \right\}^2. \quad (9)$$

保真度是量子信息科学中的一个重要物理量,它可以衡量量子隐形传态的性能,表征整个信息传输后所得到的量子态和输入态之间的相似程度,如果输出态和输入态完全正交,则  $F=0$ ,如果输出态和输入态完全一致,则  $F=1$ . 经典情形下的最高保真度只有  $2/3$ ,量子信息传输必须高于此保真度,才能显示出其具有的优越性.

### 3 结果和讨论

基于上述理论方法,我们对所研究的系统利用 Matlab 来编写相关程序,进行数值模拟计算.

图 1 给出了纠缠在不同的相互作用情况下伴随温度的变化图,虚线表示  $z$  方向磁场作用,实线表示  $x$  方向磁场作用. 从图中可见,在  $\Delta=0.5$  时,纠缠随温度是单调减小的,  $J=1$  和  $J=-1$  纠缠的变化情形一致,也就是说铁磁和反铁磁情形的变化相同. 在  $\Delta=-0.5$  时,铁磁和反铁磁仍然有相同的变化趋势,但是  $z$  方向磁场和  $x$  方向磁场的变化趋势不同,  $z$  方向磁场是先增大后减小,而  $x$  方向磁场是从最大单调递减的. 从图的总体趋势可见,  $z$  方向磁场的纠缠一般较  $x$  方向大.

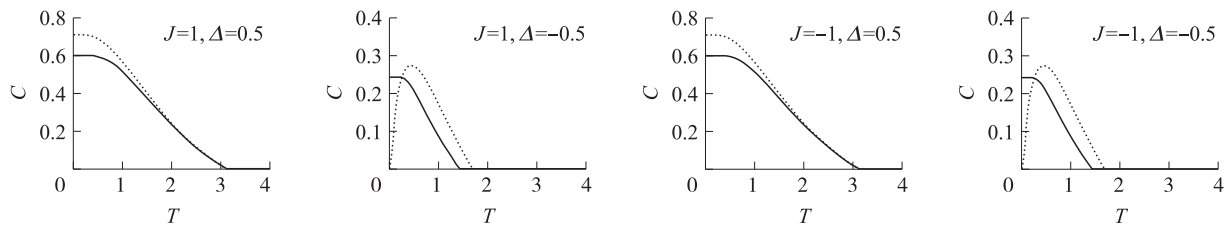


图 1 纠缠伴随温度的变化图:  $B=2$

Fig. 1 Entanglement variations of temperature:  $B=2$

图 2 给出了纠缠伴随磁场和各向异性作用  $\Delta$  的变化图, (a) 图是  $x$  方向磁场, (b) 图是  $z$  方向磁场. 从图(a)中可见,在铁磁和反铁磁时纠缠随磁场的变化是不同的,在铁磁情形,纠缠随着磁场的增加而增加,而反铁磁时,纠缠随磁场的增加是递减的,反铁磁情况下纠缠具有较大值. 由图(b)可见,  $z$  方向磁场作用下的纠缠在铁磁情况下为零.

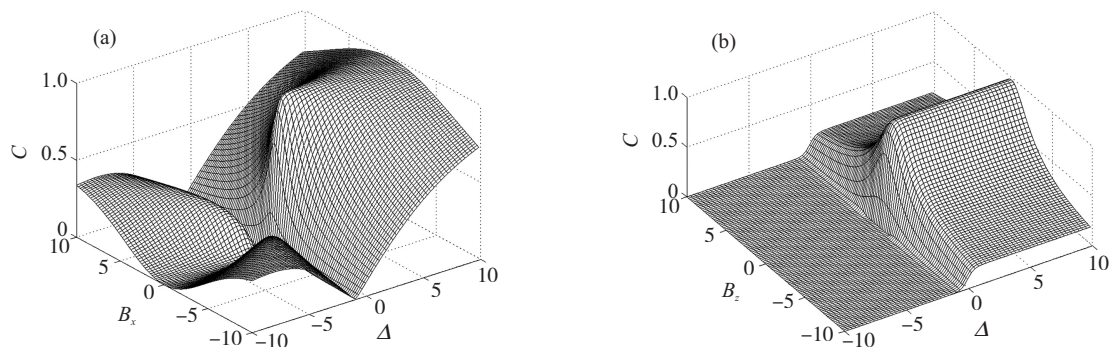


图 2 纠缠伴随磁场和各项异性作用的变化图:  $J=1, T=0.5$

Fig. 2 Entanglement variations of magnetic fields and anisotropic interaction:  $J=1, T=0.5$

图 3 给出了纠缠伴随  $x$  方向磁场和温度的变化图. 从图可见,纠缠随着磁场的增加是逐渐减小的,并且  $\Delta=0.5$  时纠缠的存在区域要远多于  $\Delta=-0.5$  时纠缠的存在区域.

图 4 给出了纠缠伴随  $z$  方向磁场和温度的变化图. 从图可见,纠缠随着  $z$  方向磁场的变化和  $x$  方向基本类似. 但是纠缠随温度的变化在磁场较小时基本单调递减,随着磁场的增加,纠缠随温度是先增大后减小.

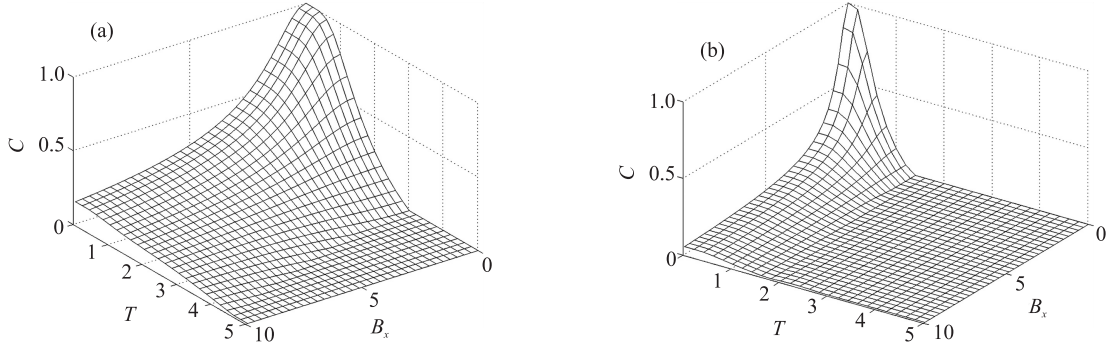

 图3 纠缠伴  $x$  方向磁场和温度的变化图:  $J=1$ (a)  $\Delta=0.5$ ; (b)  $\Delta=-0.5$ 

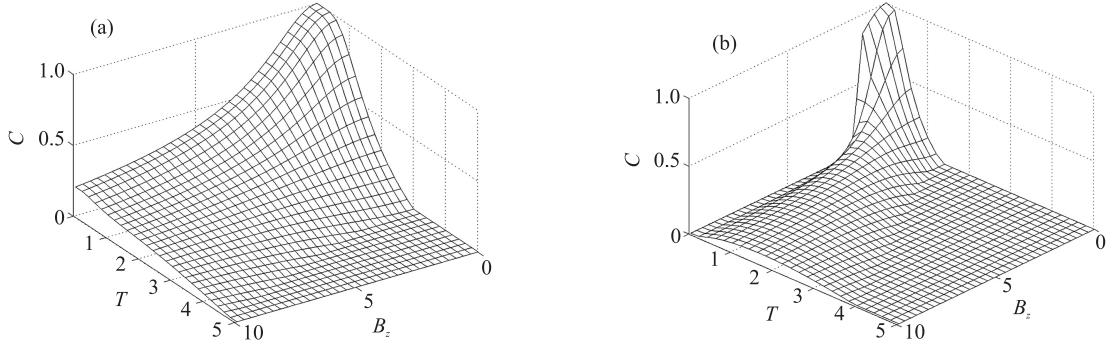
 Fig. 3 Entanglement variations of  $x$ -axes magnetic fields and temperature:  $J=1$ (a)  $\Delta=0.5$ ; (b)  $\Delta=-0.5$ 

 图4 纠缠伴  $z$  方向磁场和温度的变化图:  $J=1$ (a)  $\Delta=0.5$ ; (b)  $\Delta=-0.5$ 

 Fig. 4 Entanglement variations of  $z$ -axes magnetic fields and temperature:  $J=1$ (a)  $\Delta=0.5$ ; (b)  $\Delta=-0.5$ 

下面我们研究选定某一输入态  $|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2)|10\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|01\rangle$  后, 比如令  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi = 0$ , 则要传输的态为  $|\psi\rangle_{in} = \frac{\sqrt{3}}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle$ . 我们利用上述包含不同方向磁场的系统来进行量子态的传输, 计算传输后保真度的变化.

图5给出了保真度在不同的相互作用情况下随温度的变化图, 虚线表示  $z$  方向磁场作用, 实线表示  $x$  方向磁场作用. 从图中可以发现,  $z$  方向磁场的保真度要高于  $x$  方向的保真度, 并且在各种条件下都是这样. 这也就表明  $z$  方向磁场更适合用来进行信息的传输. 我们注意到, 在某些温度以下, 量子隐形传态的保真度高于  $2/3$ , 是优于经典通信方式的.

最后, 我们考察保真度随各向异性参数  $\Delta$  的变化情况. 图5(a)给出的是在绝对零度时保真度的变化, 虚线表示  $z$  方向磁场作用, 很明显在  $J_z = -0.7$  处保真度有一个跃变, 也就是说此处有量子相变发生. 在铁磁时,  $x$  方向磁场的保真度要比  $z$  方向磁场的保真度大, 但是在发生相变以后,  $z$  方向磁场的保真度在一定区域里能够比  $x$  方向磁场的保真度大. 结合图5(b)可见, 反铁磁系统更适合于信息的传输. 从图5、图6可知, 具体选择何种磁场方向来进行信息的传递, 要结合实际情况来判定.

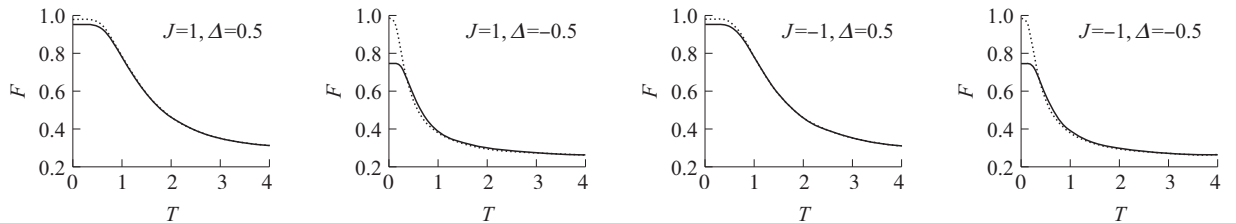
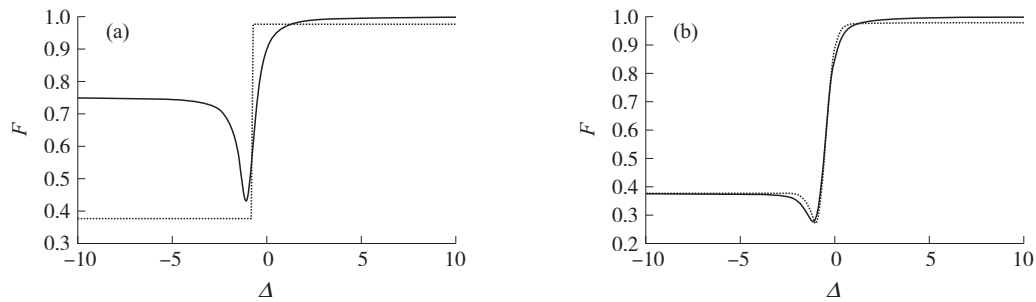

 图5 保真度伴随温度的变化图:  $B=0.5$ 

 Fig. 5 Fidelity variations of temperature:  $B=0.5$

图 6 保真度伴随各项异性参数  $\Delta$  的变化图:  $J=1, B=0.5$  (a)  $T=0$ ; (b)  $T=0.5$ Fig. 6 Fidelity variations of anisotropic interaction  $\Delta$ :  $J=1, B=0.5$  (a)  $T=0$ ; (b)  $T=0.5$ 

## 4 结论

本文在介绍量子信息和量子纠缠重要性的基础上,构造了包含缺陷磁场的自旋系统模型,并计算出了该模型的纠缠度和保真度.结果表明,不同方向缺陷磁场可以起到对纠缠大小的调控作用,并且可以根据具体的情况来选择磁场的方向以便信息的传输.

### [参考文献]

- [1] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum Computation and Quantum Information [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [2] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can Quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. Phys Rev, 1935, 47: 777-780.
- [3] Zhai X Y, Tong P Q. Thermal entanglement of anisotropic XY chains in a transverse field [J]. Chin Phys Lett, 2007, 24(9): 2 475-2 478.
- [4] Arnesen M C, Bose S, Vedral V. Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model [J]. Phys Rev Lett, 2001, 87: 017901.
- [5] Connor K M, William K W. Entangled rings [J]. Phys Rev A, 2001, 63: 052302.
- [6] Imamoglu A, Awschalom D D, Burkard G. Quantum information processing using quantum dot spins and cavity QED [J]. Phys Rev Lett, 1999, 83: 4 204-4 207.
- [7] Bose S. Quantum communication through an unmodulated spin chain [J]. Phys Rev Lett, 2003, 91: 207 901.
- [8] Cao M, Zhu S Q. Effects of anisotropy on pair-wise entanglement of a four-qubit Heisenberg XXZ chain [J]. Chin Phys Lett, 2006, 23: 2 888-2 891.
- [9] Zhang G F. Thermal entanglement and teleportation in a two-qubit Heisenberg chain with Dzyaloshinski-Moriya anisotropic antisymmetric interaction [J]. Phys Rev A, 2007, 75: 034304.
- [10] Li D C, Cao Z L. Entanglement in the anisotropic Heisenberg XYZ model with different Dzyaloshinskii-Moriya interaction and inhomogeneous magnetic field [J]. Eur Phys J D, 2008, 50: 207-214.
- [11] Wootters W K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits [J]. Phys Rev Lett, 1998, 80(10): 2 245-2 248.
- [12] Lee J, Kim M S. Entanglement teleportation via Werner states [J]. Phys Rev Lett, 2000, 84: 4 236-4 239.
- [13] Yeo Y. Teleportation via thermally entangled states of a two-qubit Heisenberg XX chain [J]. Phys Rev A, 2002, 66(6): 062312.
- [14] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states [J]. J Mod Opt, 1994, 41(12): 2 315-2 323.

[责任编辑:顾晓天]