Clifford分析中Isotonic函数向量带位移的非线性边值问题

鄢盛勇

(成都师范学院数学系,四川 成都 611130)

[摘要] 讨论了Isotonic函数向量的一类带位移非线性边值问题,利用积分方程方法和Schauder不动点原理证明了问题解的存在性,并给出了解的积分表达式.

[关键词] Clifford分析,Isotonic函数向量,非线性边值问题

[中图分类号]O175.5 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0028-04

A Nonlinear Boundary Value Problem with Shift for Isotonic Functional Vector in Clifford Analysis

Yan Shengyong

(Department of Mathematics,Chengdu Normal University,Chengdu 611130,China)

Abstract:This paper discusses a class of nonlinear boundary value problem with haseman shift for isotonic functional vector in Clifford analysis.By the integral equation method and Schauder fixed-point theorem,we prove the existence of the solution for the problem,and give the integral representation of solution.

Key words:Clifford analysis,Isotonic functional vector,nonlinear boundary value problem

Clifford分析是近代分析的重要分支,它有非常重要的理论意义和应用价值,如在Maxwell方程,Yang-Mill场理论以及量子力学等方面都应用它的一些结论[1].在文[2-4]中利用Plemelj公式解决了高维空间中某些边值问题.最近文[5-10]研究了定义于 $\mathbf{R}^{2m}$ 中子区域而取值于复Clifford代数 $\mathbb{C}_m$ 且满足 $\partial_{\underline{x}_1} f(x)+i\tilde{f}(x)\partial_{\underline{x}_2}=0$ 的Isotonic函数,其中 $\partial_{\underline{x}_1}=\sum_{j=1}^{m}e_j\partial_{x_j},\partial_{\underline{x}_2}=\sum_{j=1}^{m}e_j\partial_{x_{j+m}}$,得到了其柯西积分公式,Plemelj公式,并建立其与多复变全纯函数、Hermitean单演函数、双正则函数的紧密联系.本文讨论了Isotonic函数向量的一类带位移的非线性边值问题

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(x)\otimes\boldsymbol{\Phi}^{+}(x)+\boldsymbol{B}(x)\otimes\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x))+\boldsymbol{C}(x)\otimes\boldsymbol{\Phi}^{-}(x)+\boldsymbol{D}(x)\otimes\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x))=\\&\boldsymbol{E}(x)\otimes\boldsymbol{L}(x,\boldsymbol{\Phi}^{+}(x),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x)),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x)))\ ,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $\alpha(x)$ 是 $\partial\Omega$ 到自身的同构映射,证明了其解的存在唯一性,并给出了解的积分表达式.

1 预备知识与记号

记 $\mathbb{C}_n$ 为 2^n 维的复Clifford代数,其正交基为 $\{e_A:A=\{h_1,\cdots,h_n\},1\leq h_1<\cdots<h_r\leq n\}$,常记 $e_{\varnothing}=e_0$, $e_A=e_{h_1}\cdot e_{h_2}\cdots e_{h_r}$,其基底元适合下列规则:$e_ke_j=-e_je_k,k\neq j;e_j^2=-1,k,j=1,\cdots,n$.$\mathbb{C}_n$ 中的元 $a=\sum_A a_Ae_A,a_A\in\mathbb{C}$,其主对合,共轭分别定义为 $\tilde{a}=\sum_A a_A\tilde{e}_A,\tilde{e}_A=(-1)^r e_A;\bar{a}=\sum_A\bar{a}_A\bar{e}_A$,$\bar{e}_A=(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}e_A$,其模为 $|a|=(\sum_A|a_A|^2)^{\frac{1}{2}}$.设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具光滑定向的Liapunove边界 $\partial\Omega$ 的有界域,定义于 Ω 取值于 $\mathbb{C}_n$ 的函数可表示为 $f(x)=\sum_A f_A(x)e_A$,这里

收稿日期:2014-09-12.

基金项目:教育部科学技术研究重点项目(212147)、四川省教育厅科研基金项目(10ZC127).

通讯联系人:鄢盛勇,副教授,研究方向:函数论与偏微分方程的边值问题.E-mail:459138166@qq.com

$f_A(x)$ 是复值函数. Dirac算子定义为 $\partial_x=\sum_{j=1}^{n}e_j\partial_{x_j}$，若 $\partial_x f(x)=0,x\in\Omega$，则称 $f(x)$ 是 Ω 上的（左）正则函数.

用 $\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n),(0<\beta<1)$ 表示定义于 $\partial\Omega$ 取值于 $\mathbb{C}_n$ 的 Hölder 连续函数的集合. 设 $\boldsymbol{F}(x)=(f_1(x),\cdots,f_p(x)),G(x)=(g_1(x),\cdots,g_p(x))$（其中 $f_i(x)),g_i(x)\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n)$）是函数向量，定义加法和乘法运算为 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}=(f_1+g_1,\cdots,f_p+g_p)$，$\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G}=(f_1\cdot g_1,\cdots,f_p\cdot g_p)$. 定义其绝对值为 $|\boldsymbol{F}|=(\sum_{j=1}^{p}|f_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. 若 $|\boldsymbol{F}(x)-\boldsymbol{F}(y)|=(\sum_{j=1}^{p}|f_j(x)-f_j(y)|^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant M_0|x-y|^{\beta}$，（$M_0$ 是一个与 $\partial\Omega$ 无关的正常数，以下 $M_1,M_2,\cdots$ 都与此类似），则称函数向量 $\boldsymbol{F}(x),x\in\partial\Omega$ 在 $\partial\Omega$ 上依绝对值 Hölder 连续. 由[4]有 $|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}|\leqslant|\boldsymbol{F}|+|\boldsymbol{G}|,|\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G}|\leqslant M_1|\boldsymbol{F}\|\boldsymbol{G}|$. 显然若函数向量 Hölder 连续，等价于其每一个分量函数都是 Hölder 连续的. 用 $H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n),(0<\beta<1)$ 表示依绝对值 Hölder 连续的 p 维函数向量的集合，对 $\forall\boldsymbol{F}(x)\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n)$，定义模为 $\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}=C(\boldsymbol{F},\partial\Omega)+H(\boldsymbol{F},\partial\Omega,\beta)=\sup_{x\in\partial\Omega}|\boldsymbol{F}(x)|+\sup_{x\neq y,x,y\in\partial\Omega}\frac{|\boldsymbol{F}(x)-\boldsymbol{F}(y)|}{|x-y|^{\beta}}$. 于是 $H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n)$ 构成Banach空间，且 $\forall\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_n)$，$\|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}\|_{\beta}\leqslant\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}+\|\boldsymbol{G}\|_{\beta},\|\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{G}\|_{\beta}\leqslant M_2\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}\|\boldsymbol{G}\|_{\beta}$.

2 Isotonic函数与Isotonic柯西型积分

以后设 $n=2m$，考虑函数向量空间 $H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$. 令 $I_j=\frac{1}{2}(1+ie_je_{j+m}),j=1,\cdots,m$，$I=\prod_{j=1}^{m}I_j$ 称为相应的素幂等元，其基本性质有：$\forall a\in\mathbb{C}_m$, 有 $aI=0\Leftrightarrow a=0$；$e_{j+m}aI=i\tilde{a}e_jI$，$e_jaI=-i\tilde{a}e_{j+m}I,j=1,\cdots,m$; Clifford 向量 x 及相应Dirac算子可改写成 $x=\sum_{j=1}^{m}(x_je_j+x_{j+m}e_{j+m})$，$\partial_x=\sum_{j=1}^{m}(e_j\partial_{x_j}+e_{j+m}\partial_{x_{j+m}})$. 引进如下Clifford向量及相应Dirac算子：$\underset{-1}{x}=\sum_{j=1}^{m}x_je_j,\partial_{\underset{-1}{x}}=\sum_{j=1}^{m}e_j\partial_{x_j}$，$\underset{-2}{x}=\sum_{j=1}^{m}x_{j+m}e_j,\partial_{\underset{-2}{x}}=\sum_{j=1}^{m}e_j\partial_{x_{j+m}}$.

定义 2.1 若函数向量 $\boldsymbol{F}(x)$ 的每一分量 $f_j(x)$ 在 Ω 中是Isotonic的，则称 $\boldsymbol{F}(x)$ 是Isotonic的.

定义 2.2 设 $f_j(y)\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$，称 $\varphi_j(x)$ 为Isotonic柯西型积分，

$$\varphi_j(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underset{-1}{x}-\underset{-1}{y})(\underset{-1}{n}f_j(y)+i\tilde{f}_j(y)\underset{-2}{n})}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(f_j(y)\underset{-2}{n}-i\underset{-1}{n}\tilde{f}_j(y))(\underset{-2}{x}-\underset{-2}{y})}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y,x\in\mathbf{R}^{2m}\backslash\partial\Omega.$$

其中 ω_{2m} 是 $\mathbf{R}^{2m}$ 中单位球面的面积，$\underset{-}{n}(y)=\sum_{j=1}^{2m}e_jn_j$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 点的外法方向单位向量，而 $\underset{-1}{y},\underset{-1}{n},\underset{-2}{y},\underset{-2}{n}$ 分别类似于 $\underset{-1}{x},\underset{-2}{x}$.

记 $\Omega^+=\Omega,\Omega^-=\mathbf{R}^{2m}\backslash\bar{\Omega}$，易证 $\boldsymbol{\Phi}(x)=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_p(x))$ 在 $\Omega^{\pm}$ 内都是Isotonic的.

引理 2.1 [8] （Plemelj公式）设 $f_j(y)\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$，则在Cauchy主值意义下有

$$\varphi_j^{\pm}(z)\triangleq\lim_{x\in\Omega^{\pm},x\to z}\varphi_j(x)=\pm\frac{1}{2}f_j(z)+\varphi_j(z),z\in\partial\Omega. \tag{2}$$

定理 2.1 设 $\boldsymbol{F}(y)=(f_1(y),\cdots,f_p(y))\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$，则在柯西主值意义下有

$$\boldsymbol{\Phi}^{\pm}(z)\triangleq\lim_{x\in\Omega^{\pm},x\to z}\boldsymbol{\Phi}(x)=\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(z)+\theta\boldsymbol{F}(z),z\in\partial\Omega \tag{3}$$

其中 $\theta\boldsymbol{F}=(\theta f_1,\cdots,\theta f_p)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underset{-1}{z}-\underset{-1}{y})(\underset{-1}{n}\boldsymbol{F}(y)+i\tilde{\boldsymbol{F}}(y)\underset{-2}{n})}{\omega_{2m}|z-y|^{2m}}+\frac{(\boldsymbol{F}(y)\underset{-2}{n}-i\underset{-1}{n}\tilde{\boldsymbol{F}}(y))(\underset{-2}{z}-\underset{-2}{y})}{\omega_{2m}|z-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y$.

定理 2.2 设 $\boldsymbol{F}(y)\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$，$\alpha(x)$ 是 $\partial\Omega$ 到自身的同构映射，则在柯西主值意义下有

$$\boldsymbol{\Phi}^{\pm}(\alpha(z))=\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'(z)+\theta'\boldsymbol{F}(z),z\in\partial\Omega, \tag{4}$$

其中 $\theta'\boldsymbol{F}(z)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underset{-1}{\alpha}(z)-\underset{-1}{y})(\underset{-1}{n}\boldsymbol{F}(y)+i\tilde{\boldsymbol{F}}(y)\underset{-2}{n})}{\omega_{2m}|\alpha(z)-y|^{2m}}+\frac{(\boldsymbol{F}(y)\underset{-2}{n}-i\underset{-1}{n}\tilde{\boldsymbol{F}}(y))(\underset{-2}{\alpha}(z)-\underset{-2}{y})}{\omega_{2m}|\alpha(z)-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y$，$\underset{-1}{\alpha}(z),\underset{-2}{\alpha}(z)$ 分别类似于

$\underset{-1}{x},\underset{-2}{x},\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F}(\alpha(z))$.

3 问题的提出与解法

$\Omega,\partial\Omega$ 如前所述，$\boldsymbol{A}(x),\boldsymbol{B}(x),\boldsymbol{C}(x),\boldsymbol{D}(x),\boldsymbol{E}(x)\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$ 为给定的 p 维函数向量，$\alpha(x)$ 为 $\partial\Omega$ 上的Haseman位移，p 维函数向量 $\boldsymbol{L}(x,\boldsymbol{\Phi}^{+}(x),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x)),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x))$ 在 $\partial\Omega\times\mathbb{C}_m\times\mathbb{C}_m\times\mathbb{C}_m\times\mathbb{C}_m$ 连续,我们要找在 $\Omega^{\pm}$ 内Isotonic的,在 $\overline{\Omega^{\pm}}$ 上连续,且满足边界条件(1)和 $\boldsymbol{\Phi}^{-}(\infty)=0$ 的 p 维函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(x)$. 称此边值问题为问题NR.

首先将此边值问题转化为积分方程.将(3)(4)代入(1)式,得

$$\boldsymbol{A}\otimes(\frac{1}{2}\boldsymbol{F}+\theta\boldsymbol{F})+\boldsymbol{B}\otimes(\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'+\theta'\boldsymbol{F})+\boldsymbol{C}\otimes(-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}+\theta\boldsymbol{F})+\boldsymbol{D}\otimes(-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'+\theta'\boldsymbol{F})=\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{L}. \tag{5}$$

令 $\boldsymbol{I}_p$ 表示每一个分量为1的 p 维向量. 引入算子：$Q\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})\otimes(\theta\boldsymbol{F}-\frac{1}{2}\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D})\otimes(\theta'\boldsymbol{F}-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}')+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_p)\otimes\boldsymbol{F}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{F}'-\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{L}$,则边值条件(1)可改写成

$$Q\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}, \tag{6}$$

这样求解边值问题NR转化为了求解积分方程组(6).

引理3.1[10]　对任意函数 $g\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_{2m})$ ，有 $\left\|(S_{\partial\Omega}g)(x)-\frac{1}{2}g(x)\right\|_{\beta}\leqslant M_3\|g\|_{\beta}$ ，其中 $(S_{\partial\Omega}g)(x)=\int_{\partial\Omega}\frac{\bar{y}-\bar{x}}{\omega_{2m}|y-x|^{2m}}\mathrm{d}\sigma_y g(y),x\in\partial\Omega$.

定理3.1　对 $\forall f_j\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$,有 $\|\theta f_j\|_{\beta}\leqslant M_{11}\|f_j\|_{\beta}$.

证明　由前述素幂等元 I 及其性质有 $f_jI\in\tilde{H}^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_{2m})$,结合引理3.1易得证.

定理3.2　若 $\boldsymbol{F}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$,有 $\|\theta\boldsymbol{F}\|_{\beta}\leqslant M_{12}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}$.

证明　由定义首先易得 $\|f_j\|_{\beta}\leqslant\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}$,由定理3.1及模定义有

$$C(\theta\boldsymbol{F},\partial\Omega)\leqslant M_{13}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}；H(\theta\boldsymbol{F},\partial\Omega,\beta)\leqslant[\sum_{j=1}^{p}(M_{11}\|f_j\|_{\beta})^2]^{\frac{1}{2}}\leqslant M_{14}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}\|\theta\boldsymbol{F}\|_{\beta}\leqslant M_{13}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}+M_{14}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}=M_{12}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}.$$

定理3.3　同胚映射 $\alpha(z):\partial\Omega\to\partial\Omega$ 满足Lipschitz条件：$|\alpha(z)-\alpha(y)|\leqslant M_{15}|z-y|,z,y\in\partial\Omega$ ，$\boldsymbol{F}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$,有 $\|\boldsymbol{F}'\|_{\beta}\leqslant M_{16}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}$.

定理3.4　设 $\boldsymbol{F}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m),\alpha(x)$ 满足定理3.3的条件,则有 $\|\theta'\boldsymbol{F}\|_{\beta}\leqslant M_{17}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}$

定理3.5　设 $\boldsymbol{F}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m),\alpha(x)$ 满足定理3.3的条件,则有

$$\left\|\theta\boldsymbol{F}\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}\leqslant M_{18}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta},\left\|\theta'\boldsymbol{F}\pm\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'\right\|_{\beta}\leqslant M_{19}\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}.$$

定理3.6　设 Ω 是 $\mathbb{R}^{2m}$ 中具光滑定向的Liapunove边界 $\partial\Omega$ 的有界域,同胚映射 $\alpha(x)$ 满足Lipschitz条件,而函数向量 $\boldsymbol{L}(x,\boldsymbol{\Phi}^{+}(x),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x)),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x)))$ 满足：

$$\begin{aligned}&\left|\boldsymbol{L}(x',\boldsymbol{\Phi}^{+}(x'),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x')),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x'),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x')))-\boldsymbol{L}(x'',\boldsymbol{\Phi}^{+}(x''),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x'')),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x''),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x'')))\leqslant M_{20}|x'-x''|^{\beta}+\right.\\&M_{21}\left|\boldsymbol{\Phi}^{+}(x')-\boldsymbol{\Phi}^{+}(x'')\right|+M_{22}\left|\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x'))-\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x''))\right|+M_{23}\left|\boldsymbol{\Phi}^{-}(x')-\boldsymbol{\Phi}^{-}(x'')\right|+M_{24}\left|\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x'))-\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x''))\right|.\end{aligned} \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{L}(x_0,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p)=0$,其中 x_0 为 $\partial\Omega$ 上一点,而 $\boldsymbol{O}_p$ 表示每一个分量都是0的 p 维向量. 设 $\boldsymbol{A}(x),\boldsymbol{B}(x),\boldsymbol{C}(x),\boldsymbol{D}(x),\boldsymbol{E}(x)\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$, 且 $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\|_{\beta},\|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\|_{\beta},\|\boldsymbol{A}+1_p\|_{\beta},\|\boldsymbol{B}\|_{\beta}<h<1$ ，$\|\boldsymbol{E}\|_{\beta}=\delta$ ，且 $0<\delta<\frac{M[1-hM_2(M_{18}+M_{19}+1+M_{16})]}{M_2(M_{27}+M_{28}M)}$,则问题NR可解,解表达式为(12)式.

证明　令 $T=\{\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m),\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}\leqslant M\}$,是Banach空间 $H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$ 的一闭子空间,由定理2.1,定理2.2,定理3.3,定理3.5以及已知条件可得：

$$\|Q\boldsymbol{F}\|_{\beta}\leqslant M_2h[M_{18}+M_{19}+1+M_{16}]\|\boldsymbol{F}\|_{\beta}+M_2\|\boldsymbol{E}\|_{\beta}\|\boldsymbol{L}\|_{\beta}, \tag{8}$$

$$|\boldsymbol{L}|=\left|\boldsymbol{L}(x,\boldsymbol{\Phi}^{+}(x),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x)),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x)))-\boldsymbol{L}(x_0,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p,\boldsymbol{O}_p)\right|\leqslant M_{20}|x-x_0|^{\beta}+M_{21}\left|\boldsymbol{\Phi}^{+}(x)\right|+M_{22}\left|\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x))\right|+$$

$$M_{23}\left|\boldsymbol{\Phi}^{-}(x)\right|+M_{24}\left|\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x))\right|\leqslant M_{20}\left|x-x_{0}\right|^{\beta}+M_{21}\left|\theta\boldsymbol{F}(x)+\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(x)\right|+M_{22}\left|\theta'\boldsymbol{F}(x)+\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'(x)\right|+M_{23}\left|\theta\boldsymbol{F}(x)-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}(x)\right|+$$
$$M_{24}\left|\theta'\boldsymbol{F}(x)-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'(x)\right|\leqslant M_{25}+(M_{21}M_{18}+M_{22}M_{19}+M_{23}M_{18}+M_{24}M_{19})\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}=M_{25}+M_{26}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}. \tag{9}$$

$$\left|\boldsymbol{L}(x',\boldsymbol{\Phi}^{+}(x'),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x')),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x'),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x')))-\boldsymbol{L}(x'',\boldsymbol{\Phi}^{+}(x''),\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x'')),\boldsymbol{\Phi}^{-}(x''),\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x'')))\right|\leqslant(M_{20}+M_{21}\left\|\boldsymbol{\Phi}^{+}(x)\right\|_{\beta}+$$
$$M_{22}\left\|\boldsymbol{\Phi}^{+}(\alpha(x))\right\|_{\beta}+M_{23}\left\|\boldsymbol{\Phi}^{-}(x)\right\|_{\beta}+M_{24}\left\|\boldsymbol{\Phi}^{-}(\alpha(x))\right\|_{\beta})\left|x'-x''\right|^{\beta}\leqslant(M_{20}+M_{26}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta})\left|x'-x''\right|^{\beta}. \tag{10}$$

所以有 $H(\boldsymbol{L},\partial\Omega,\beta)\leqslant M_{20}+M_{26}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}$，结合(9)式得：

$$\left\|\boldsymbol{L}\right\|_{\beta}\leqslant(M_{25}+M_{26}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta})+(M_{20}+M_{26}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta})=M_{27}+M_{28}\left\|\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}.$$

再由已知条件和(8)式得 $\left\|Q\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}<M$，这说明算子 Q 是由 T 到 T 到自身的映射.

下证 Q 是连续映射.对任意的在 $\partial\Omega$ 上一致收敛函数列向量 $\{\boldsymbol{F}_n\}\subset T$，其收敛于 $\boldsymbol{F}\in T$，(指函数向量列 $\{\boldsymbol{F}_n\}$ 的每一个分量函数列 $\{f_{nj}\}$ 都在 $\partial\Omega$ 上一致收敛于函数向量 $\boldsymbol{F}$ 的对应分量 $f_j, j=1,\cdots,p$).即对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{Z}^{+}$，当 $n>N, x\in\partial\Omega$ 时，恒有 $\left\|\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}<\varepsilon$.

$$\left|Q\boldsymbol{F}_n-Q\boldsymbol{F}\right|\leqslant hM_1[\left|\theta(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})\right|+\left|\theta'(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}'_n-\boldsymbol{F}')\right|+\left|\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}\right|+\left|\boldsymbol{F}'_n-\boldsymbol{F}'\right|]+$$
$$\delta M_1\left|\boldsymbol{L}(x,\theta\boldsymbol{F}_n+\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_n,\theta'\boldsymbol{F}_n+\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'_n,\theta\boldsymbol{F}_n-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}_n,\theta'\boldsymbol{F}_n-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}'_n)-\boldsymbol{L}(x,\theta\boldsymbol{F}+\frac{1}{2}\boldsymbol{F},\theta'\boldsymbol{F}+\frac{1}{2}\boldsymbol{F}',\theta\boldsymbol{F}-\frac{1}{2}\boldsymbol{F},\theta'\boldsymbol{F}-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}')\right|\leqslant$$
$$hM_1[M_{18}+M_{19}+1+M_{16}]\left\|\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}+\delta M_1[M_{21}\left|\theta(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})\right|+M_{22}\left|\theta'(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}'_n-\boldsymbol{F}')\right|+$$
$$M_{23}\left|\theta(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})\right|+M_{24}\left|\theta'(\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{F}'_n-\boldsymbol{F}')\right|]\leqslant M_1[h(M_{18}+M_{19}+1+M_{16})+\delta M_{26}]\left\|\boldsymbol{F}_n-\boldsymbol{F}\right\|_{\beta}\leqslant M_{29}\varepsilon. \tag{11}$$

所以 Q 是映射 T 到自身的连续映射.根据Arzela-Ascoli定理知，T 是 p 维连续函数向量空间 $C(\partial\Omega)$ 中的紧子集.因此 $Q(T)$ 也是 $C(\partial\Omega)$ 中的紧子集.由Schauder不动点定理知，至少存在一个 p 维函数向量 $\boldsymbol{F}_0\in H^{\beta}(\partial\Omega,\mathbb{C}_m)$ 满足 $Q\boldsymbol{F}_0=\boldsymbol{F}_0$.因此问题NR至少存在一个解：

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underset{-1}{x}-\underset{-1}{y})(\underset{-1}{n}\boldsymbol{F}_0(y)+\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{F}}_0(y)\underset{-2}{n})}{\omega_{2m}\left|x-y\right|^{2m}}+\frac{(\boldsymbol{F}_0(y)\underset{-2}{n}-\mathrm{i}\underset{-1}{n}\tilde{\boldsymbol{F}}_0(y))(\underset{-2}{x}-\underset{-2}{y})}{\omega_{2m}\left|x-y\right|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y, x\in\Omega^{\pm}. \tag{12}$$

显然满足 $\boldsymbol{\Phi}^{-}(\infty)=0$，由文[10]知 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 的每一个分量函数在 $\overline{\Omega^{\pm}}$ 内连续，从而 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 在 $\overline{\Omega^{\pm}}$ 内连续.

［参考文献］

[1] BRACKX F，DELANGHE R，SOMMEN F. Clifford analysis[M]. Pitman，London：Res Notes Math，1982：76.

[2] HUANG S. Nonlinear boundary value problem for biregular functions in Clifford analysis[J]. Science in China Ser A，1996，39(3)：1152-1164.

[3] QIAO Y Y. A boundary value problem for hypermonogenic functions in Clifford analysis[J]. Science in China Ser A Mathematics，2005，48：324-332.

[4] 鄢盛勇.四元数分析中正则函数向量的非线性边值问题[J].华南师范大学学报(自然科学版)，2012，44(4)：24-27.

[5] SOMMEN F，PEÑA-PEÑA D. Martinelli-Bochner formula using Clifford analysis[J]. Arch Math，2007，88：358-363.

[6] ABREU-BLAYA R，BORY-REYES J. A Martinelli-Bochner formula on fractal domains[J]. Arch Math，2009，92：335-343.

[7] ABREU-BLAYA R，BORY-REYES J，PEÑA-PEÑA D，et al. A holomorphic extension theorems using Clifford analysis[J]. Complex Anal Oper Theory，2011，5：113-130.

[8] 库敏，杜金元，王道顺. Clifford分析中Isotonic柯西型积分的边界性质[J].数学学报，2011，54(2)：177-186.

[9] 李婧.复Clifford分析中Isotonic函数的性质及其边值问题[D].石家庄：河北师范大学，2010.

[10] 鄢盛勇. Clifford分析中Isotonic函数带位移的非线性边值问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(2)：34-38.

［责任编辑：黄　敏］