# 关于一类不完全Hanani三元系的存在性

王荣荣,单金炘,王成敏

(江南大学理学院,江苏 无锡 214122)

[摘要] 设$v\equiv 1 \bmod 6$. 一个阶为$v$的Hanani三元系是一个Steiner三元系,且满足所有区组可以划分成$(v-1)/2$个大小为$(v-1)/3$的部分平行类和1个大小为$(v-1)/6$的部分平行类. Hanani三元系被视作Kirkman三元系的自然推广. 本文研究Hanani三元系的嵌入问题,我们将完全确立洞大小为7的不完全Hanani三元系的存在性.

[关键词] Hanani三元系,不完全,嵌入,可分组设计

[中图分类号]O157.2 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0065-06

# Existence of a Class of Incomplete Hanani Triple Systems

Wang Rongrong,Shan Jinxin,Wang Chengmin

(School of Science,Jiangnan University,Wuxi 214122,China)

**Abstract**:Let $v\equiv 1 \bmod 6$. A Hanani triple system of order $v$(HATS($v$))is an STS($v$)satisfying that all the blocks can be partitioned into$(v-1)/2$ partial parallel classes of size$(v-1)/3$ and one partial parallel class of size$(v-1)/6$. A HATS is regarded as a generalization of Kirkman triple system. In this paper,we consider the embeddings of HATS and establish completely the existence of IHATS($v$,7).

**Key words**:Hanani triple systems,incomplete,embedding,group divisible designs

设$K$是一个正整数集合. 可分组设计($K$-GDD)是1个满足如下性质的三元集$(X,\Lambda,B)$[1-7]:

(1)$X$是1个有限点集;

(2)$\Lambda$是$X$的1个划分(称为组集);

(3)$B$是$X$的1簇大小取自于集合$K$的子集(称为区组),满足$X$中的任意一对不同的点恰恰出现在1个组上或1个区组中,但是两者不会同时发生.

GDD的型是指多元集合$\{|G|:G\in\Lambda\}$. 通常使用"指数"记号来表示GDD的型. 型为$g_1^{u_1} g_2^{u_2} \ldots g_s^{u_s}$的GDD表示该GDD包含$u_i$个大小为$g_i$的组,$1\le i\le s$. 当$K=\{k\}$时,记$K$-GDD为$k$-GDD.

型为$n^k$的$k$-GDD称为横截设计,记为TD$(k,n)$. 型为$1^v$的$k$-GDD称为平衡不完全区组设计,记作$(v,k,1)$-BIBD. 阶为$v$的Steiner三元系是$(v,3,1)$-BIBD,记作STS($v$). 众所周知,1个STS($v$)存在当且仅当$v\equiv 1,3 \bmod 6$.

GDD的1簇互不相交的区组称为该GDD的1个部分平行类. 如果GDD的1个部分平行类构成点集的1个划分,则称该部分平行类为平行类. 显然,平行类是1类特殊的部分平行类. 如果GDD的所有区组能够划分成若干个平行类,则称该GDD是可分解的. 通常使用前缀"R"来表示1个设计的可分解性. 例如,RBIBD和RTD分别表示可分解的BIBD和可分解的TD.

$(v,3,1)$-RBIBD是著名的$v$阶Kirkman三元系,记作KTS($v$). Kirkman三元系的存在性问题就是历史上著名的Kirkman女生问题,该问题在1972年由Ray-Chaudhuri和Wilson完全解决.

收稿日期:2014-12-16.

基金项目:国家自然科学基金(11271280、11471144).

通讯联系人:王成敏,博士,副教授,研究方向:组合设计. E-mail:wcm@jiangnan.edu.cn

**定理1**[3]　一个KTS($v$)存在当且仅当$v\equiv 3 \bmod 6$.

当$v\equiv 1 \bmod 6$时,由于$v$不是3的倍数,因此$(v,3,1)$-RBIBD存在的必要条件不满足.在这种情况下,Vanstone等[7]定义了Hanani三元系,其可视为Kirkman三元系的1个自然推广.设$v\equiv 1 \bmod 6$,1个阶为$v$的Hanani三元系是STS($v$),其满足所有区组可以划分成$(v-1)/2$个大小为$(v-1)/3$的部分平行类和1个大小为$(v-1)/6$的部分平行类,记作HATS($v$).

**定理2**[7]　1个HATS($v$)存在当且仅当$v\equiv 1 \bmod 6$且$v\neq 7,13$.

设$v\equiv w\equiv 1 \bmod 6$.不完全Hanani三元系(IHATS($v,w$))是1个满足如下性质的三元集$(X,Y,\boldsymbol{B})$:

(1)$X$是1个阶为$v$有限点集;

(2)$Y$是$X$的子集(称为洞),其阶为$w$;

(3)$\boldsymbol{B}$是$X$的一簇子集(称为区组),满足对每一个$B\in\boldsymbol{B}$,有$|B\cap \boldsymbol{Y}|\leqslant 1$;

(4)$\boldsymbol{B}$中区组可以划分为$(v-w)/2$个大小为$(v-1)/3$的部分平行类,$(w-1)/2$个大小为$(v-w)/3$的部分平行类和1个大小为$(v-w)/6$的部分平行类.

设$(X,Y,\boldsymbol{B})$是1个IHATS($v,w$),$(Y,\boldsymbol{B}')$是1个HATS($w$),则$(X,\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{B}')$是1个HATS($v$).称$(Y,\boldsymbol{B}')$能够被嵌入$(X,\boldsymbol{B}\cup\boldsymbol{B}')$中,称$(Y,\boldsymbol{B}')$为子设计.注意到,在IHATS($v,w$)中,子设计HATS($w$)可以不存在.另外,容易看出,Hanani三元系已经完全确立,故Hanani三元系的嵌入问题就可以转化为IHATS的存在性问题.

由如上定义知,1个IHATS($v,w$)应该包含$(v-w)/2$个大小为$(v-1)/3$的部分平行类,$(w-1)/2$个大小为$(v-w)/3$的部分平行类和1个大小为$(v-w)/6$的部分平行类.我们把第一种部分平行类称为几乎平行类,记作APC,第二种部分平行类称为带洞平行类,记作HPC,第三种部分平行类称为缺省平行类,记作DPC.

嵌入问题是组合设计理论中的1个基本问题.关于Kirkman三元系的嵌入问题,Stinson和Rees彻底解决了其存在性.

**定理3**[4-6]　1个KTS($w$)能够被嵌入到1个KTS($v$)中当且仅当$v\equiv w\equiv 3 \bmod 6$并且$v\geqslant 3w$.

本文,我们将完全确立IHATS($v$,7)的存在性.

# 1　预备知识

这一部分给出一些预备知识供后面使用.首先关于TD和RTD,有如下结论.

**引理1**[1]　(1)当$n\geqslant 4$且$n\neq 6,10$时,RTD($4,n$)存在;

(2)对于任何的素数幂$q$,存在TD($q+1,q$)和RTD($q,q$).

如果$k$-GDD$(X,\Lambda,B)$的区组集能够被划分成一些部分平行类,每一个部分平行类是$X\backslash G$($G\in\Lambda$)的1个划分,那么称该GDD为$k$-frame.我们仍然用GDD的型来表示frame的型.如果1个frame的区组长度为3,则称其为Kirkman frame.下面给出一些关于Kirkman frame的存在性供后面使用.

**引理2**[6]　1个型为$h^u$的Kirkman frame存在的充分必要条件是$h\equiv 0 \pmod 2$,$u\geqslant 4$且$h(u-1)\equiv 0 \pmod 3$.

**引理3**[2]　对于每一组$(h,u,m)\in\{(24,4,18),(24,4,36),(30,4,18)\}$,都存在1个型为$h^u m^1$的Kirkman frame.

下面的构造方法给出了1个从可分组设计得到Kirkman frame的有效方法,参见参考文献[6].

**构造1**　设$(X,\Lambda,\boldsymbol{B})$是1个可分组设计.设$w:X\to Z^+\cup 0$为1个定义在点集$X$上的加权函数.如果对每一区组$B\in\boldsymbol{B}$,都存在1个型为$\{w(x):x\in B\}$的Kirkman frame,那么存在1个型为$\{\Sigma_{x\in G}:w(x)\}$的Kirkman frame.

下面的"填洞构造"给出了1个从Kirkman frame得到IHATS十分有效的方法,该方法的证明类似于参考文献[6]中的定理5.4.

**构造2**　假设存在1个型为$T=\{t_i:i=1,2,\cdots,n\}$的Kirkman frame.设$b$为正整数.如果对于每一个$i$($1\leqslant i\leqslant n$),都存在IHATS($t_i+b,b$),则存在1个IHATS($\sum_{i=1}^{n}t_i+b,b$).

下面的构造是很直接的,但是在处理设计的嵌入问题中是十分有效的.

**构造3**　如果存在1个IHATS($v,w$)和1个IHATS($w,b$),那么存在1个IHATS($v,b$).

## 2 直接构造

在这一部分，我们对一些较小的$v$，构造IHATS($v$,7).

**引理4** 存在1个IHATS(18+7,7).

**证明** 简单计算表明IHATS(18+7,7)应该包含9个大小为8的APC，3个大小为6的HPC和1个大小为3的DPC. 在点集$(Z_9\times Z_2)\cup(Z_2\times\{a,b\})\cup\{x_0,x_1,x_2\}$上构造该设计，其中$(Z_2\times\{a,b\})\cup\{x_0,x_1,x_2\}$为洞. 下面的8个区组构成一个APC：

$$\{3_0,4_1,2_1\}\{0_a,2_0,1_0\}\{1_a,5_1,8_1\}\{0_b,7_0,0_0\}\{1_b,6_1,7_1\}\{x_0,4_0,0_1\}\{x_1,6_0,3_1\}\{x_2,8_0,1_1\}$$

通过(+1 mod 9,-)展开上面APC中的所有区组得到了9个APC. 这里带有下标$a$和$b$的元素按(+1 mod 2,-)展开.

另外，通过(+3 mod 9,-)展开$\{5_1,1_1,1_0\}$和$\{3_0,8_0,6_1\}$两个区组得到1个HPC. 对该HPC所有区组元素的第一分量分别加1和2得到另外两个HPC. 这里的运算都是在模9下进行.

最后，唯一的DPC由通过对区组$\{0_0,3_0,6_0\}$(+1 mod 9,-)展开得到.

**引理5** 对每一个$t\in\{5,7,9,11,13\}$，存在1个IHATS($6t$+7,7).

**证明** 简单计算表明，IHATS($6t$+7,7)应该包含$3t$个大小为size $2t$+2的APC，3个大小为$2t$的HPC和1个大小为$t$的DPC. 在$(Z_{3t}\times Z_2)\cup\{x_0,x_1,\cdots,x_6\}$上构造该设计，其中$\{x_0,x_1,\cdots,x_6\}$为洞. 初始区组分为两个部分，分别记为$P_1$和$P_2$. 通过(+3 mod $3t$,-)展开$P_1$中的区组，得到了$2t$个区组，这些区组构成了1个HPC. 对这个HPC中所有区组的第一分量分别加1和2得到了另外两个HPC. $P_2$中的区组构成1个APC，通过(+1 mod $3t$,-)展开这个APC中的所有区组得到了所有的APC. 最后，唯一1个DPC是由区组{(0,0),($t$,0),($2t$,0)}通过(+1 mod $3t$,-)展开得到. 对引理中所述的每一个$t$，下面给出对应的$P_1$和$P_2$. 这里为了方便，记元素($a$,$b$)为$a_b$.

$t=5$

$P_1$:$\{2_1,10_1,0_0\}\{2_0,4_0,3_1\}$

$P_2$:$\{14_0,13_0,5_0\}\{1_0,4_0,9_1\}\{2_0,6_0,6_1\}\{11_1,13_1,10_1\}\{1_1,7_1,12_1\}\{x_0,0_0,3_1\}$
$\{x_1,3_0,14_1\}\{x_2,7_0,5_1\}\{x_3,8_0,2_1\}\{x_4,9_0,0_1\}\{x_5,11_0,8_1\}\{x_6,12_0,4_1\}$

$t=7$

$P_1$:$\{15_1,17_1,16_0\}\{12_0,14_0,7_1\}$

$P_2$:$\{8_0,9_0,12_0\}\{6_0,0_0,16_0\}\{2_0,15_0,0_1\}\{20_0,11_0,14_1\}\{10_0,17_1,20_1\}\{3_0,3_1,11_1\}$
$\{1_0,5_1,6_1\}\{1_1,12_1,16_1\}\{4_1,13_1,18_1\}\{x_0,5_0,2_1\}\{x_1,7_0,19_1\}\{x_2,13_0,15_1\}$
$\{x_3,14_0,10_1\}\{x_4,17_0,9_1\}\{x_5,18_0,8_1\}\{x_6,19_0,7_1\}$

$t=9$

$P_1$:$\{17_0,15_1,23_1\}\{6_0,19_0,1_1\}$

$P_2$:$\{4_0,23_0,21_0\}\{12_0,19_0,15_0\}\{25_0,26_0,10_0\}\{18_0,24_0,25_1\}\{17_0,22_0,10_1\}\{1_0,17_1,5_1\}\{11_0,11_1,21_1\}$
$\{6_0,9_1,8_1\}\{9_0,20_1,26_1\}\{8_0,13_1,16_1\}\{7_0,4_1,6_1\}\{15_1,24_1,2_1\}\{12_1,23_1,19_1\}\{x_0,0_0,18_1\}$
$\{x_1,2_0,14_1\}\{x_2,3_0,22_1\}\{x_3,5_0,1_1\}\{x_4,13_0,7_1\}\{x_5,14_0,0_1\}\{x_6,16_0,3_1\}$

$t=11$

$P_1$:$\{6_0,10_1,24_1\}\{5_0,22_0,29_1\}$

$P_2$:$\{25_0,1_0,27_0\}\{29_0,10_0,16_0\}\{18_0,8_0,3_0\}\{30_0,5_0,26_0\}\{14_0,11_0,9_1\}\{19_0,20_0,29_1\}\{28_0,0_1,12_1\}$
$\{21_0,8_1,23_1\}\{13_0,27_1,19_1\}\{22_0,30_1,10_1\}\{12_0,1_1,5_1\}\{15_0,14_1,15_1\}\{0_0,16_1,25_1\}\{9_0,28_1,22_1\}$
$\{23_0,24_1,26_1\}\{2_1,7_1,18_1\}\{3_1,6_1,13_1\}\{x_0,4_0,31_1\}\{x_1,6_0,17_1\}\{x_2,7_0,4_1\}\{x_3,17_0,32_1\}$
$\{x_4,24_0,20_1\}\{x_5,31_0,21_1\}\{x_6,32_0,11_1\}$

$t=13$

$P_1$:$\{14_1,37_1,24_0\}\{27_1,25_0,23_0\}$

$P_2$:$\{6_0,25_1,26_1\}\{20_0,8_1,28_1\}\{34_1,17_1,10_1\}\{31_1,36_1,21_0\}\{11_1,2_0,33_0\}\{15_1,23_1,33_1\}\{6_1,9_1,22_0\}$
$\{34_0,18_0,12_0\}\{35_1,0_1,36_0\}\{35_0,18_1,24_1\}\{21_1,30_1,32_1\}\{4_1,29_1,16_1\}\{13_1,17_0,8_0\}\{30_0,3_1,9_0\}$
$\{28_0,31_1,16_0\}\{37_0,26_0,27_0\}\{7_0,14_0,7_1\}\{13_0,38_0,5_1\}\{4_0,24_0,38_1\}\{10_0,15_0,1_1\}\{19_0,23_0,20_1\}$
$\{x_0,0_0,37_1\}\{x_1,1_0,19_1\}\{x_2,3_0,27_1\}\{x_3,5_0,12_1\}\{x_4,11_0,22_1\}\{x_5,25_0,2_1\}\{x_6,32_0,14_1\}$

**引理6**　对每一个$t\in\{4,6,8,10,14\}$,存在1个IHATS$(6t+7,7)$.

**证明**　IHATS$(6t+7,7)$应该包含$3t$个大小为size $2t+2$的APC,3个大小为$2t$的HPC和1个大小为$t$的DPC. 在点集$(Z_{3t}\times Z_2)\cup\{\infty,a,b,c,d,e,f\}$上构造该设计,其中$\{\infty,a,b,c,d,e,f\}$为1个洞. 初始区组分为4个部分,分别记为$P_1,P_2,P_3$和$P_4$. 通过$(+3 \bmod 3t,-)$展开$P_1$得到1个HPC. 对这个HPC中所有区组的第一分量分别加1和2产生另外两个HPC. 另一方面,$P_2\cup P_4$和$P_3\cup P_4$分别构成1个APC. 对$P_2\cup P_4$中所有区组的第一分量依次加$0,1,\cdots,(3t/2)-1$得到$3t/2$个APC,对$P_3\cup P_4$中所有区组的第一分量依次加$3t/2,3t/2+1,\cdots,3t-1$得到另外$3t/2$个APC. 这样总共得到了$3t$个APC. 另外,区组$\{(0,0),(t,0),(2t,0)\}$按$(+1 \bmod 3t,-)$展开得到唯一1个DPC. 以上运算均按模$3t$进行. 对引理中所述的每一个$t$,下面给出对应的$P_1,P_2,P_3$和$P_4$. 为了方便,仍然记元素$(a,b)$为$a_b$.

$t=4$

$P_1$:$\{4_1,9_1,9_0\}\{2_0,1_0,5_1\}$

$P_2$:$\{\infty,0_0,6_0\}\{0_1,1_1,3_1\}\{6_1,7_1,9_1\}$

$P_3$:$\{\infty,0_1,6_1\}\{0_0,1_1,9_1\}\{6_0,7_1,3_1\}$

$P_4$:$\{1_0,4_0,11_0\}\{a,5_0,10_1\}\{b,8_0,4_1\}\{c,7_0,5_1\}\{d,2_0,8_1\}\{e,3_0,2_1\}\{f,9_0,11_1\}$

$t=6$

$P_1$:$\{5_1,13_0,3_0\}\{8_0,1_1,6_1\}$

$P_2$:$\{\infty,0_0,9_0\}\{0_1,1_1,3_1\}\{9_1,10_1,12_1\}$

$P_3$:$\{\infty,0_1,9_1\}\{0_0,1_1,12_1\}\{9_0,10_1,3_1\}$

$P_4$:$\{13_0,17_0,16_0\}\{2_0,15_0,4_0\}\{12_0,17_1,11_1\}\{7_0,2_1,16_1\}\{1_0,7_1,15_1\}\{a,3_0,6_1\}$
$\{b,5_0,5_1\}\{c,6_0,13_1\}\{d,10_0,14_1\}\{e,11_0,8_1\}\{f,14_0,4_1\}$

$t=8$

$P_1$:$\{19_1,12_1,5_0\}\{22_0,12_0,8_1\}$

$P_2$:$\{\infty,0_0,12_0\}\{0_1,1_1,3_1\}\{12_1,13_1,15_1\}$

$P_3$:$\{\infty,0_1,12_1\}\{0_0,1_1,12_1\}\{12_0,13_1,3_1\}$

$P_4$:$\{3_0,9_0,8_0\}\{19_0,21_0,6_0\}\{20_0,13_0,17_0\}\{14_0,20_1,16_1\}\{1_0,4_1,9_1\}\{2_0,2_1,18_1\}\{5_0,10_1,23_1\}$
$\{10_0,7_1,22_1\}\{18_0,5_1,11_1\}\{a,4_0,17_1\}\{b,11_0,6_1\}\{c,15_0,19_1\}\{d,16_0,14_1\}\{e,22_0,21_1\}\{f,23_0,8_1\}$

$t=10$

$P_1$:$\{8_1,27_1,29_0\}\{18_0,19_0,13_1\}$

$P_2$:$\{\infty,0_0,15_0\}\{0_1,1_1,3_1\}\{15_1,16_1,18_1\}$

$P_3$:$\{\infty,0_1,15_1\}\{0_0,1_1,18_1\}\{15_0,16_1,3_1\}$

$P_4$:$\{12_0,17_0,20_0\}\{10_0,21_0,19_0\}\{1_0,7_0,24_0\}\{23_0,5_0,9_0\}\{13_0,20_1,10_1\}\{25_0,21_1,5_1\}\{22_0,26_1,4_1\}$
$\{8_0,19_1,13_1\}\{2_0,2_1,23_1\}\{4_0,6_1,24_1\}\{26_0,25_1,29_1\}\{28_0,12_1,17_1\}\{9_0,7_1,14_1\}\{a,3_0,9_1\}$
$\{b,6_0,22_1\}\{c,11_0,28_1\}\{d,14_0,27_1\}\{e,16_0,8_1\}\{f,18_0,11_1\}$

$t=14$

$P_1$:$\{34_0,41_1,21_1\}\{28_1,11_0,9_0\}$

$P_2$:$\{\infty,0_0,21_0\}\{0_1,1_1,3_1\}\{21_1,22_1,24_1\}$

$P_3$:$\{\infty,0_1,21_1\}\{0_0,1_1,24_1\}\{21_0,22_1,3_1\}$

$P_4$:$\{14_0,3_0,9_1\}\{18_1,32_0,6_1\}\{17_1,13_1,23_1\}\{8_1,33_1,19_1\}\{20_1,4_1,28_0\}\{30_0,39_0,35_0\}\{37_0,38_0,2_0\}$

$\{15_1,28_1,34_0\}\{35_1,10_0,20_0\}\{16_0,41_0,29_0\}\{12_0,15_0,31_0\}\{24_0,4_0,26_1\}\{5_0,13_0,40_1\}$

$\{18_0,33_0,32_1\}$ $\{25_0,7_0,16_1\}\{1_0,12_1,27_1\}\{8_0,5_1,39_1\}\{11_0,7_1,14_1\}\{22_0,10_1,34_1\}\{36_0,36_1,41_1\}$

$\{40_0,2_1,11_1\}\{a,6_0,38_1\}\{b,9_0,30_1\}\{c,17_0,37_1\}\{d,19_0,29_1\}\{e,23_0,31_1\}\{f,27_0,25_1\}$

**引理7** 存在1个IHATS(109,7).

**证明** 首先在点集$(Z_{39}\times Z_2)\cup\{a_0,a_1,b_0,b_1,c_0,c_1,d_0,d_1,e_0,e_1,x_0,x_1,\cdots,x_{20}\}$上构造1个IHATS(109,31).简单计算表明IHATS(109,31)包含39个大小为36的APC,15个大小为26的HPC和1个大小为13的DPC.

下面10个区组中每一列的两个区组按(+3 mod 39,-)展开得到1个HPC,因此总共得到5个HPC.对每个HPC中所有区组的第一分量分别加1和2产生另外两个HPC.这样总共得到了15个所需的HPC.这里的运算按模39进行.

$$\{1_0,30_0,26_0\}\{2_0,22_0,24_0\}\{13_1,38_1,25_0\}\{35_0,30_0,6_1\}\ \{37_1,23_0,18_1\}$$

$$\{8_1,36_1,13_1\}\ \{12_1,25_1,8_1\}\ \{38_0,6_0,30_1\}\ \{37_1,29_1,31_0\}\{16_0,15_0,17_1\}$$

另一方面,下面所列的区组构成一个APC.把这个APC中的所有区组按(+1 mod 39,-)展开得到了39个所需的APC.这里$w\in\{a,b,c,d,e\}$的下标按模2进行运算,即$w_i+(j,-)=w_{(i+j)\bmod 2}$,$0\leqslant i<2$和$0\leqslant j<39$.

$$\{8_1,14_0,37_1\}\{21_1,12_1,19_1\}\{24_0,9_0,30_0\}\{26_1,20_1,37_0\}\{38_1,6_0,33_0\}\{a_0,36_1,35_1\}$$

$$\{a_1,36_0,13_0\}\{b_0,28_1,25_1\}\{b_1,16_0,7_0\}\{c_0,31_1,4_1\}\{c_1,27_0,38_0\}\{d_0,3_1,24_1\}$$

$$\{d_1,19_0,22_0\}\{e_0,15_1,0_1\}\{e_1,3_0,34_0\}\{x_0,25_0,29_1\}\{x_1,1_0,1_1\}\{x_2,30_1,4_0\}$$

$$\{x_3,23_0,9_1\}\{x_4,10_0,27_1\}\{x_5,21_0,17_1\}\{x_6,2_1,32_0\}\{x_7,6_1,26_0\}\{x_8,0_0,7_1\}$$

$$\{x_9,2_0,5_1\}\{x_{10},11_0,10_1\}\{x_{11},12_0,23_1\}\{x_{12},13_1,5_0\}\{x_{13},15_0,33_1\}\{x_{14},17_0,14_1\}$$

$$\{x_{15},18_0,34_1\}\{x_{16},20_0,32_1\}\{x_{17},28_0,18_1\}\{x_{18},29_0,11_1\}\{x_{19},31_0,22_1\}\{x_{20},35_0,16_1\}$$

另外,唯一1个DPC由区组{(0,0),(13,0),(26,0)}按(+1 mod 39,-)展开得到.

由引理6知,IHATS(31,7)存在.于是运用构造3,以1个IHATS(31,7)作为输入设计,得到了1个IHATS(109,7).

## 3 主要结果

这一部分将建立本文的主要结果,即完全确立IHATS($v$,7)的存在性.

**引理8** 如果存在1个点集大小为$t$的GDD,其组的大小取自集合$H$={3,4,5,6},区组大小取自集合$K=\{k:k\geqslant4\}$,那么存在1个IHATS($6t$+7,7).

**证明** 根据引理2,型为$6^u$($u\in K$)的Kirkman frames存在.运用构造1,使用一个型为$6^u$($u\in K$)的Kirkman frame作为输入设计,得到了点集大小为$6t$的Kirkman frame,且其组集取自集合$H'$={18,24,30,36}.另外,根据引理4~引理6,对于每一个$m\in${18,24,30,36},都有1个IHATS($m$+7,7)存在.于是运用构造2,得到了1个IHATS($6t$+7,7).

**引理9** 对于正整数$t$满足$12\leqslant t\leqslant30$且$t\notin${13,14,17},IHATS($6t$+7,7)存在.

**证明** 当$t\in${12,15,18,21}时,根据引理2,1个型为$18^{t/3}$的Kirkman frame存在.

运用构造2,使用1个IHATS(18+7,7)作为输入设计,得到了1个IHATS($6t$+7,7).类似地,当$t\in${16,20,24}时,根据引理2,型为$24^{t/4}$的Kirkman frame存在.以IHATS(24+7,7)作为输入设计,运用构造2得到了1个IHATS($6t$+7,7).

根据引理2和引理3,存在型为$24^4 18^1$,$24^4 36^1$,$30^4 18^1$和$30^5$的Kirkman frame.运用构造2,使用适当的IHATS作为输入设计,得到了1个IHATS($6t$+7,7),这里$t\in${19,22,23,25}.适当的输入设计来自引理4~引

理6.

根据引理1知TD(6,5)存在.在该TD的最后两个组中任意删去0,1和2个点得到1个型为$5^4w^1s^1$的(4,5,6)-GDD,这里$w,s\in\{3,4,5\}$.运用构造1,使用型为$6^u(u\in\{4,5,6\})$的Kirkman frame作为输入设计,得到1个Kirkman frame,其点集大小为$6\times(20+w+s)$,组的大小取自集合{18,24,30}.运用构造2,使用适当的IHATS作为输入设计,得到了1个IHATS$(6t+7,7)$,这里$26\leqslant t\leqslant 30$.同样,这里适当的输入设计来自引理4–引理6.

**引理10**　对于正整数$t$满足$t\geqslant 31$,IHATS$(6t+7,7)$存在.

**证明**　根据引理1,对于任意$n\geqslant 7$并且$n\neq 10$,RTD$(4,n)$存在,其包含$n$个平行类.把该RTD的所有组作为区组,某一个平行类中的区组作为组,得到了1个型为$4^n$的$\{4,n\}$-GDD,其中该GDD包含$n-1$个区组大小为4的平行类和1个区组大小为$n$的平行类.取$w$个点,把每一个点分别添加至某一个平行类的所有区组里,得到了型为$4^nw^1$的$\{4,5,n\}$-GDD,这里$w\in\{3,4,5,6\}$.运用引理8,对于任意$n\geqslant 7$,$n\neq 10$和$w\in\{3,4,5,6\}$,得到了IHATS$(6t+7,7)$,其中$t=4n+w$.

类似地,当$n=10$时,从RTD(5,8)出发,其存在性由引理1给出.把该RTD的所有组作为区组,某一个平行类中的区组作为组,得到了1个型为$5^n$的{5,8}-GDD.取$w\in\{3,4,5,6\}$个点,把每一个点分别添加至某一个平行类的所有区组里,得到了1个型为$5^8w^1$的{5,6,8}-GDD.运用引理8,对于$t=4\times 10+w$,得到了1个IHATS$(6t+7,7)$,这里$w\in\{3,4,5,6\}$.

根据以上讨论,对于任意的$t\geqslant 4\times 7+3=31$,IHATS$(6t+7,7)$存在.

**定理4**　1个IHATS$(6t+7,7)$存在的充分必要条件是$t\geqslant 3$.

**证明**　简单计算表明,1个IHATS$(v,w)$存在的必要条件是$v\geqslant 3w$.因此IHATS$(6t+7,7)$存在的必要条件是$6t+7\geqslant 3\times 7$,即$t\geqslant\lceil 7/3\rceil=3$.对于充分性,由引理4~引理7,引理9和引理10可得结论.

## [参考文献]


[1] COLBOURN C J,DINITZ J H. The CRC hankbook of combinatorial designs[M]. Boca Raton:CRC Press,2007.

[2] WEI H, GE G. Group divisible designs with block sizes from $K_{1(3)}$and Kirkman frames of type $h^um^1$[J]. Disc Math,2014,329:42–68.

[3] RAY-CHAUDHURI D K,WILSON R M. Solution of Kirkman's schoolgirl problem[J]. Amer Math Soc Symp on Pure Math,1971,19:187–203.

[4] REES R,STINSON D R. Kirkman triple systems with maximum subsystems[J]. Ars Combin,1988,25:125–132.

[5] REES R,STINSON D R. On the existence of Kirkman triple systems containing Kirkman subsystems[J]. Ars Combin,1988,26:3–16.

[6] STINSON D R. Frame for Kirkman triple systems[J]. Disc Math,1987,65:289–300.

[7] VANSTONE S A,STINSON D R,SCHELLENBERG P J,et al. . Hanani triple systems[J]. Israel J of Math,1993,83:305–319.


[责任编辑:顾晓天]