适于风险厌恶型投资的美式看涨期权定价分析

岑苑君[1],易法槐[2]

(1.顺德职业技术学院高职数学教研室,广东 佛山 528333)
(2.华南师范大学数学科学学院,广东 广州 510631)

[摘要] 介绍了为风险厌恶型投资者所设计的新型美式看涨期权的数学模型.它的定价问题是一个退化的抛物型变分不等式,也是一个自由边界(即最佳实施边界)问题.与标准美式看涨期权不同,这种新型期权在股票分红时有两条光滑单调的自由边界,而当股票不分红时仅有一条直线型的自由边界.本文运用偏微分方程方法分析讨论解的存在唯一性,自由边界的单调性、连续性、可微性以及关于事先承诺的价格 l 的相关性质.

[关键词] 美式看涨期权,期权定价,最佳实施边界
[中图分类号]O175.26 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2015)04-0071-05

An American Call Option Pricing Model for Risk-Averse Invertors

Cen Yuanjun[1],Yi Fahuai[2]

(1.Section of Higher Vocational Mathematics,Shunde Polytechnic,Foshan 528333,China)
(2.School of Mathematics,South China Normal University,Guangzhou 510631,China)

Abstract: There is a new American call option which is designed for risk-averse invertors. The mathematical pricing model of this option can be formulated as a one-dimensional parabolic variational inequality, or equivalently, a free boundary problem. Different from the standard American call, it has two monotonous smooth free boundaries with dividends and has only one linear free boundary without dividends. To solve this problem, PDE arguments are applied. We can prove the existence and uniqueness of the solution. Then the properties of the free boundaries, such as monotonicity, smoothness, and location, are presented.

Key words: the standard American options, option pricing, optimal exercise boundary

期权的价值依赖于原生资产的价格变化.看涨期权持有者具有在确定时间按某一确定价格购入一定数量的原生资产的权利,但不负有必须购入的义务.人们对于期权的定价已经完成了许多研究工作,1973年,欧式期权定价公式,即Black-Scholes公式[1,2]问世.与欧式期权不同,美式期权具有提前实施特点,因此,获利的机会多,也比欧式期权贵.越来越多不同类型的美式期权被开发出来,而期权持有者最关注的问题仍然是何时实施可以获得最大利益.

本文讨论的新型美式看涨期权来自参考文献[3]中的第三种类型.这类期权假设风险厌恶型投资者期望即使市场急剧崩盘,风险也可以通过得到某个事先承诺的价格 l ($l>0$)得以部分转移.但这个事先承诺的价格 l 与一般的敲定价格不同,导致这类期权基本"无风险"——允许持有者在任何时刻 t 实施,获得 $\max\{l,S(t)\}$ 或记为 $\left[S(t)-l\right]^{+}+l$,即现金 l 或是股票 $S(t)$.期权持有人自然会寻求最佳的实施策略,最大化他未来收益的贴现值.

美式期权定价的数学模型是1个抛物型变分不等式,也是非线性自由边界(即最佳实施边界)问题,一般得不到解的显式表达式,通过引入惩罚方法,若求解区域是凸的,则问题解的存在唯一性及自由边界的一些分析性质已经得到证明[1,4].

收稿日期:2014-12-23.
基金项目:国家自然科学基金(11271143、11371155)、顺德职业技术学院校级科研项目(2015-KJZX017)、高等学校博士学科点专项科研基金(20124407110001).
通讯联系人:岑苑君,讲师,研究方向:金融数学. E-mail:yuanjuncen@163.com

1　模型

期权作为一种金融衍生产品,它的定价模型取决于原生资产价格的演化.要对期权进行定价,首先必须建立描述原生资产价格变化趋势的模型.假设原生资产的价格变化过程 $S(t)$ 满足:

$$\mathrm{d}S(t)=(r-q)S(t)\mathrm{d}t+\sigma S(t)\mathrm{d}W_t . \tag{1}$$

其中, $r>0$ 是无风险利率, $q\geqslant 0$ 是原生资产的红利率, σ 是波动率, W_t 是标准布朗运动.

与参考文献[4]第124~126页中的讨论相似,可以推导出该期权价格的数学模型.

对于任意确定的 $l>0$,设 $V(S,t)$ 是这种新型美式看涨期权的价格,则它适合两可问题:

$$\begin{cases}\min\left\{-LV,V-\left[(S-l)^+ +l\right]\right\}=0, & (S,t)\in\Sigma,\\ V(S,T)=(S-l)^+ +l, & S\in(0,+\infty).\end{cases} \tag{2}$$

其中, $L=\partial_t+\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}+(r-q)S\partial_S-r$, $\Sigma=\left\{(S,t)\middle|S\geqslant 0,T>t\geqslant 0\right\}$, T 是合约到期日.

2　问题(2) $W_{p,loc}^{2,1}$ 解的存在唯一性

在(2)中,令 $x=\ln S$, $\tau=T-t$,并设 $u(x,\tau)=V(S,t)$,则 $u(x,\tau)$ 满足

$$\begin{cases}\min\left\{L_0u,u-\left[(\mathrm{e}^x-l)^+ +l\right]\right\}=0, & (x,\tau)\in\Omega_T\\ u(x,0)=(\mathrm{e}^x-l)^+ +l, & x\in(-\infty,+\infty)\end{cases} \tag{3}$$

其中 $L_0=\partial_\tau-\dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}-(r-q-\dfrac{\sigma^2}{2})\partial_x+r$, $\Omega_T=\left\{(x,\tau)\middle|x\in\mathbf{R},0<\tau\leqslant T\right\}$.

现用有界区域逼近无界区域 Ω_T .在有界区域 $\Omega_T^n=(-n,n)\times(0,T],n\in\mathbf{Z}^+$ 考虑问题

$$\begin{cases}\min\left\{L_0u_n,u_n-\left[(\mathrm{e}^x-l)^+ +l\right]\right\}=0,(x,\tau)\in\Omega_T^n,\\ u_n(-n,\tau)=l,\partial_xu_n(n,\tau)=\mathrm{e}^n,\tau\in(0,T],\\ u_n(x,0)=(\mathrm{e}^x-l)^+ +l,x\in(-n,n).\end{cases} \tag{4}$$

为证明问题(4)解的存在性,构造惩罚函数 $\beta_\varepsilon(t)$ (见图1),满足

$$\beta_\varepsilon(t)\in C^2(-\infty,+\infty)\text{ , }\beta_\varepsilon(t)\leqslant 0\text{ , }\beta_\varepsilon{}'(t)\geqslant 0\text{ , }\beta_\varepsilon{}''(t)\leqslant 0$$

其中 $\beta_\varepsilon(0)=-C_0=-\left[q\mathrm{e}^n+r(\mathrm{e}^n+l)\right]\leqslant 0$ 且 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\beta_\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t>0\\ -\infty, & t<0\end{cases}$.

同时定义一个逼近 t^+ 的磨光函数 $\pi_\varepsilon(t)$ (见图2), $\pi_\varepsilon(t)=\begin{cases}t, & t\geqslant\varepsilon\\ \nearrow, & |t|\leqslant\varepsilon\\ 0, & t\leqslant-\varepsilon\end{cases}$.

$\pi_\varepsilon(t)\in C^\infty$, $0\leqslant\pi_\varepsilon{}'(t)\leqslant 1$, $\pi_\varepsilon{}''(t)\geqslant 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\pi_\varepsilon(t)=t^+$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

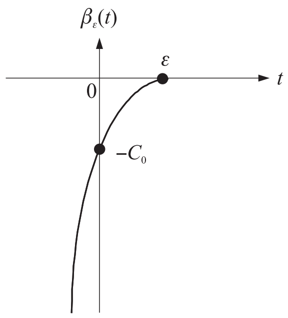

图1　惩罚函数 $\beta_\varepsilon(t)$

Fig.1　The penalty function $\beta_\varepsilon(t)$

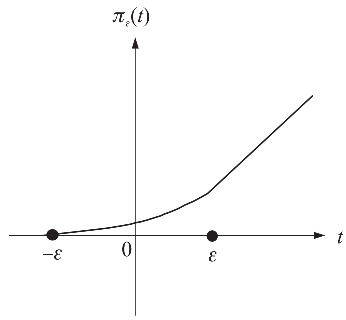

图2　磨光函数 $\pi_\varepsilon(t)$

Fig.2　The smoothing function $\beta_\varepsilon(t)$

参考文献[5]中的方法,构造问题(4)的惩罚问题,对任意固定的 $\varepsilon>0$, $u_{\varepsilon,n}(x,\tau)$ 满足:

$$\begin{cases} L_0 u_{\varepsilon,n} + \beta_\varepsilon\left[u_{\varepsilon,n} - \pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) - l\right] = 0, & (x,\tau) \in \Omega_T^n \\ u_{\varepsilon,n}(-n,\tau) = l, \partial_x u_{\varepsilon,n}(n,\tau) = e^n, & \tau \in (0,T] \\ u_n(x,0) = \pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) + l, & x \in (-n,n) \end{cases} \tag{5}$$

引理 1　$\forall n \in \mathbf{Z}^+$，问题(4)存在唯一解 $u_n \in C\left(\overline{\Omega_T^n}\right) \cap W_p^{2,1}\left(\Omega_T^n \backslash B_\delta\left(P_0\right)\right)$，其中 $1 < p < +\infty$，$P_0 = (\ln l, 0)$，$B_\delta\left(P_0\right)$ 是以 P_0 为中心，以 δ 为半径的圆盘. 当 n 足够大时，有

$$\left(e^x - l\right)^+ + l \leqslant u_n \leqslant e^x + 2l, \tag{6}$$

$$\partial_\tau u_n \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\partial_x u_n \geqslant 0. \tag{8}$$

证明　分别应用Schauder不动点定理和极值原理可证明问题(5) $W_p^{2,1}$ 解 $u_{\varepsilon,n}$ 的存在性和唯一性. 由于证明过程步骤标准，这里不再叙述.

不难通过比较原理，得到

$$\pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) + l \leqslant u_{\varepsilon,n} \leqslant e^x + 2l. \tag{9}$$

由于 $u_{\varepsilon,n}$ 是问题(5)的 $W_p^{2,1}$ 唯一解，结合(9)，参照[4]中的方法，应用Sobolev嵌入定理，可证明当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，有 $u_{\varepsilon,n} \to u_n$ 在 $W_p^{2,1}\left(\Omega_T^n \backslash B_\delta\left(P_0\right)\right)$ 中弱收敛，在 $C\left(\overline{\Omega_T^n}\right)$ 中一致收敛，且(6)成立，其中，u_n 是问题(4)的解.

下证(7). $\forall \delta > 0$，$u_{\varepsilon,n}(x,\tau+\delta)$ 满足

$$\begin{cases} L_0 u_{\varepsilon,n}(x,\tau+\delta) + \beta_\varepsilon\left[u_{\varepsilon,n}(x,\tau+\delta) - \pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) - l\right] = 0, & (x,\tau) \in (-n,n) \times (0, T-\delta], \\ u_{\varepsilon,n}(-n,\tau+\delta) = l, \partial_x u_{\varepsilon,n}(n,\tau+\delta) = e^n, & \tau \in (0, T-\delta], \\ u_{\varepsilon,n}(x,\delta) \geqslant \left(e^x - l\right)^+ + l = u_{\varepsilon,n}(x,0), & x \in (-n,n). \end{cases}$$

根据抛物方程的比较原理，有 $u_{\varepsilon,n}(x,\tau+\delta) \geqslant u_{\varepsilon,n}(x,\tau), (x,\tau) \in (-n,n) \times (0, T-\delta]$.

令 $\varepsilon \to 0^+$，得 $u_n(x,\tau+\delta) \geqslant u_n(x,\tau), (x,\tau) \in (-n,n) \times (0,T-\delta]$. 则(7)成立.

下证(8). 在问题(5)两边同时对 x 求偏导，记 $v(x,\tau) = \partial_x u_{\varepsilon,n}(x,\tau)$，则 $v(x,\tau)$ 满足：

$$\begin{cases} L_0 v + \beta_\varepsilon'\left[u_{\varepsilon,n} - \pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) - l\right] v = e^x \beta_\varepsilon'\left[u_{\varepsilon,n} - \pi_\varepsilon\left(e^x - l\right) - l\right] \pi_\varepsilon'\left(e^x - l\right) \geqslant 0, & (x,\tau) \in \Omega_T^n, \\ v(-n,\tau) = \partial_x u_{\varepsilon,n}(-n,\tau), & \tau \in (0,T], \\ v(n,\tau) = e^n \geqslant 0, & \tau \in (0,T], \\ v(x,0) = e^x \pi_\varepsilon'\left(e^x - l\right) \geqslant 0, & x \in (-n,n). \end{cases}$$

在区域 Ω_T^n 上，$u_{\varepsilon,n}$ 在 $x = -n$ 处取得最小值 l，因此 $v(x,\tau) \geqslant 0$，应用极值原理，有 $\partial_x u_{\varepsilon,n}(x,\tau) = v(x,\tau) \geqslant 0$. 令 $\varepsilon \to 0^+$，(8)得证.

最后证明问题(4)解的唯一性. 假设 u_1 和 u_2 是问题(4)属于 $C\left(\overline{\Omega_T^n}\right) \cap W_{p,loc}^{2,1}\left(\Omega_T^n\right)$ 的两个解. 设 $A = \left\{(x,\tau) \middle| u_1(x,\tau) < u_2(x,\tau), -n < x < n, 0 < \tau \leqslant T\right\}$. 若 A 非空，即 $\forall (x,\tau) \in A$，有 $u_2(x,\tau) > u_1(x,\tau) \geqslant \left(e^x - l\right)^+ + l$，则 $L_0 u_2 = 0, L_0 u_1 \geqslant 0$ 在 A 中成立. 记 $\omega = u_2 - u_1$，则 ω 满足：

$$\begin{cases} L_0 \omega \leqslant 0, & \text{在}A\text{中}, \\ \partial_x \omega(n,\tau) = 0, & (x,\tau) \in \partial_p A \cap \{n\} \times [0,T], \\ \omega(x,0) = 0, & (x,\tau) \in \partial_p A \cap \{n\} \times [0,T]. \end{cases}$$

应用A-B-P极值原理，得 $\omega \leqslant 0$ 在 A 中成立，这与 A 的定义矛盾. 唯一性得证.

定理 1　$\forall R > 0$，$\forall \delta > 0$，$1 < p < +\infty$，问题(3)存在唯一解 $u \in C\left(\overline{\Omega_T}\right) \cap W_p^{2,1}\left(\Omega_T^R \backslash B_\delta\left(P_0\right)\right)$，且有

$$\left(e^x - l\right)^+ + l \leqslant u \leqslant e^x + 2l, \tag{10}$$

$$\partial_\tau u \geqslant 0, \tag{11}$$

$$\partial_x u \geqslant 0. \tag{12}$$

证明 在(4)中，当 $u_n > \left(e^x - l\right)^+ + l$ 时，$L_0 u_n = 0$；当 $u_n = \left(e^x - l\right)^+ + l$ 时，$L_0 u_n \geqslant 0$. 而 $L_0 l = rl$，$L_0 e^x = -\frac{\sigma^2}{2} e^x - (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) e^x + r e^x = q e^x$. 将问题(4)改写为以下形式

$$\begin{cases} L_0 u_n = f(x,\tau), & (x,\tau) \in \Omega_T^n, \\ u_n(-n,\tau) = l, \partial_x u_n(n,\tau) = e^n, & \tau \in (0,T], \\ u_n(x,\delta) = \left(e^x - l\right)^+ + l, & x \in (-n,n). \end{cases}$$

其中，$f(x,\tau) \in L_{loc}^p\left(\Omega_T^n\right)$ 且 $f(x,\tau) = I_{\{u_n = l\}} rl + I_{\{u_n = e^x\}} q e^x a.e. \text{ in } \Omega_T^n$，$I_A$ 表示集合 A 的特征函数.

显然，$\forall R > 0$，在 $-R \leqslant x \leqslant R$ 上，有 $\left|f(x,\tau)\right| \leqslant C$，其中 C 与 R 有关，与 n 无关.

因此，$\forall R > \delta > 0$，当 $n > R$ 时，结合(6)，在 $\Omega_T^R \backslash B_\delta(P_0)$ 中有如下估计[6]：

$$\left|u_n\right|_{W_p^{2,1}\left(\Omega_T^R \backslash B_\delta(P_0)\right)} \leqslant C_1 \left(\left|u_n\right|_{L^\infty\left(\Omega_T^R\right)} + \left|\left(e^x - l\right)^+ + l\right|_{C^2\left([-R,R] \backslash (\ln l - \delta, \ln l + \delta)\right)} + \left|f(x,\tau)\right|_{L^\infty\left(\Omega_T^R\right)} \right) \leqslant C_2 .$$

其中 C_2 与 R 有关，与 n 无关. 由 $W_p^{2,1}\left(\Omega_T^R \backslash B_\delta(P_0)\right)$ 的弱列紧性知，存在 $\{u_n\}$ 的子列（仍记为 $\{u_n\}$）使得：$u_n \to u_R$ 在 $W_p^{2,1}\left(\Omega_T^n \backslash B_\delta(P_0)\right)$ 中弱收敛. 由Sobolev嵌入定理有：

$$u_n \to u_R \text{ 在 } C\left(\overline{\Omega_T^R}\right) \text{ 中一致收敛；} \partial_x u_n \to \partial_x u_R \in C\left(\Omega_T^R\right).$$

定义 $u = u_R$，$x \in [-R,R]$，则 u 是良定义的，u 就是问题(3)的解，且 $\partial_x u_R \in C\left(\Omega_T\right)$，由 C^α 估计知 $u \in C\left(\overline{\Omega_T}\right)$. 而(11)(12)就是(7)(8)的直接结果. 唯一性的证明与引理1相似.

3 最佳实施边界的性质

定理2 $V(S,t) \geqslant V_c(S,t)$. 其中，$V(S,t)$ 是问题(2)的解，$V_c(S,t)$ 是敲定价格为 l 的标准美式看涨期权的解.

这恰好说明在敲定价格相同的条件下，本文所述的看涨期权要比标准美式看涨期权获利更多，自然也更贵.

下面研究期权的最佳实施边界（自由边界）的性质.

引理2 设 $u(x,\tau)$ 是问题(3)的解，则

$$0 \leqslant u_x \leqslant e^x . \tag{13}$$

定义 继续持有区域 $S(u) = \{(x,\tau) | u(x,\tau) > \left(e^x - l\right)^+ + l\}$.

终止持有区域 $C_1(u) = \{(x,\tau) | u(x,\tau) = l\}$，$C_2(u) = \{(x,\tau) | u(x,\tau) = e^x\}$.

其中，$C_1(u)$ 为实施期权得到现金收益 l 的区域，$C_2(u)$ 为实施期权得到股票的区域.

显然，$C_1(u) \cup C_2(u) = \{(x,\tau) | u(x,\tau) = \left(e^x - l\right)^+ + l\}$. $\forall\,(x_1,\tau_1) \in C_1(u)$，$u(x_1,\tau_1) = \left(e^{x_1} - l\right)^+ + l = l$，则 $x_1 \leqslant l$，即 $C_1(u) \subseteq (0, \ln l] \times (0,T]$. 同理，$C_2(u) \subseteq (\ln l, +\infty) \times (0,T]$. 因此，最多在 $\{\ln l\} \times (0,T]$ 两侧各有1条最佳实施边界.

1）当 $q > 0$ 时，结合(13)，即 $0 \leqslant u_x \leqslant e^x$，知当 $x < \ln l$ 时，有 $\partial_x u - \partial_x(l) = \partial_x u \geqslant 0$. 而当 $x > \ln l$ 时，有 $\partial_x u - \partial_x\left(e^x\right) = \partial_x u - e^x \leqslant 0$.

因此，定义在 $\{\ln l\} \times (0,T]$ 左侧和右侧的自由边界分别为

$$h_1(\tau) = \max\left\{x \middle| u(x,\tau) = l\right\}, h_2(\tau) = \min\left\{x \middle| u(x,\tau) = e^x\right\}, \text{其中 } 0 < \tau \leqslant T .$$

参照[4]中的讨论，类似可得自由边界 $h_1(\tau)$ 和 $h_2(\tau)$ 的有界性、单调性和连续性.

引理3[3] 稳态问题 $\min\left\{-L_1 V_1, V_1 - \left[(S - l)^+ + l\right]\right\} = 0$ 的解 $V(S, al, bl)$ 为

$$V(S,al,bl) = \begin{cases} l, & S \leqslant al, \\ l/(\gamma_0 - \gamma_1)\{\gamma_0[S/(al)]^{\gamma_1} - \gamma_1[S/(al)]^{\gamma_0}\}, & al \leqslant S \leqslant bl, \\ S, & S \geqslant bl. \end{cases} \tag{14}$$

其中，$L_1=\dfrac{\sigma^2}{2}S^2\partial_{SS}+(r-q)S\partial_S-r$. $\gamma_1<0<1<\gamma_0$ 是 $r=(r-q)\gamma+\sigma^2\gamma(\gamma-1)/2$ 的解，$0<a<1<b$ 满足：$a=\gamma_1/(\gamma_1-1)\{\gamma_1(\gamma_0-1)/[\gamma_0(\gamma_1-1)]\}^{(1-\gamma_0)/(\gamma_0-\gamma_1)}$，$b=\gamma_0/(\gamma_0-1)\{\gamma_0(\gamma_1-1)/[\gamma_1(\gamma_0-1)]\}^{\gamma_1/(\gamma_0-\gamma_1)}$.

定理3　$h_1(\tau)$ 和 $h_2(\tau)$ 满足

$$\ln al\leqslant h_1(\tau)\leqslant\ln l\leqslant h_2(\tau)\leqslant\ln bl .\tag{15}$$

定理4　在 $(0,T]$ 上，$h_1(\tau)$ 严格单调减少，$h_2(\tau)$ 严格单调增加.

从金融的角度分析，若合约马上临近到期日，即当 $\tau\to0^+$ 时，$h_1(\tau)$ 越来越大，但若此时股价 $S(t)<l$，则应立即实施期权得到现金 l，再存进银行赚取利息. 而当 $\tau\to0^+$ 时，$h_2(\tau)$ 越来越小，若此时股价 $S(t)>l$，则应立即实施期权得到股票 $S(t)$，否则将蒙受股价波动带来的损失.

不妨定义 $h_1(0)=\lim\limits_{\tau\to0^+}h_1(\tau)$，$h_2(0)=\lim\limits_{\tau\to0^+}h_2(\tau)$. 则有

定理5　$h_1(\tau)$ 和 $h_2(\tau)$ 在 $[0,T]$ 上连续，且 $h_1(0)=h_2(0)=\ln l$.（见图3）

定理6　$h_1(\tau)$，$h_2(\tau)\in C^\infty(0,T]$.

结合参考文献[5,7,8]，利用靴带原理即可证明.

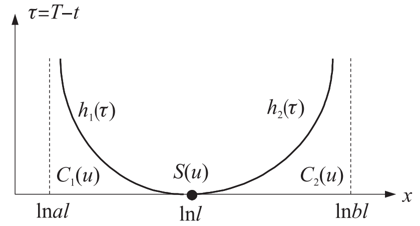

图3　$q>0$ 时自由边界的情形

Fig.3　The free boundaries with $q>0$

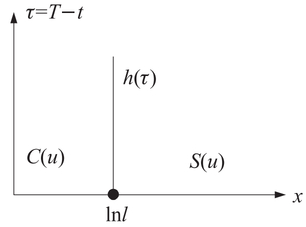

图4　$q=0$ 时自由边界的情形

Fig.4　The free boundaries with $q=0$

接下来给出问题(3)的解 u 和自由边界 $h_1(\tau)$、$h_2(\tau)$ 关于事先承诺的价格 l 的单调性.

定理7　问题(3)的解 $u(x,\tau,l)$ 关于 l 单调增加.

证明　设 $l_1<l_2$，$u_i(x,\tau,l_i)$，$i=1$、2 是下面问题的解：

$$\begin{cases}\min\{L_0u_i,u_i-[(\mathrm{e}^x-l_i)^++l_i]\}=0, & (x,\tau)\in\Omega_T,\\ u(x,0,l_i)=(\mathrm{e}^x-l_i)^++l_i, & x\in(-\infty,+\infty).\end{cases}$$

由变分不等式的解对初值和障碍的单调性可知 $u_1(x,\tau,l_1)\geqslant u_2(x,\tau,l_2)$，即 $u(x,\tau,l)$ 关于 l 单调增加.

这与标准美式看涨期权关于敲定价格 l 单调减少的性质截然不同，说明文中所讨论的看涨期权的事先承诺的价格 l 跟敲定价格并不是一回事. 期权金的高低主要还是跟持有者的权益大小有关，当 l 越大，期权持有者的收益就越高，吸引力就越大，因此期权要更贵，但反过来，发行该期权的金融机构的成本就越高，需谨慎选择合适的 l .

定理8　$h_1(\tau,l)$ 和 $h_2(\tau,l)$ 关于 l 严格单调增加.

2）当 $q=0$ 时. 由参考文献[4]第16页知，不支付红利的标准美式看涨期权不存在最佳实施边界.

引理4　当 $q=0$ 时，设 $u(x,\tau)$ 是问题(3)的解，而 $u_*(x,\tau)$ 是下面问题

$$\begin{cases}\min\{L_0u_*,u_*-(\mathrm{e}^x-l)^+\}=0, & (x,\tau)\in\Omega_T,\\ u_*(x,0)=(\mathrm{e}^x-l)^+, & x\in(-\infty,\infty).\end{cases}\tag{16}$$

的解，则 $u(x,\tau)\geqslant u_*(x,\tau),(x,\tau)\in\Omega_T$.

由引理4知 $C(u)\subset C(u_*)$，而 $u_*(x,\tau)$ 是敲定价格为 l 的永久美式看涨期权变换后的解，在 $\{\ln l\}\times(0,T]$ 右侧没有自由边界，故 $u(x,\tau)$ 只在 $\{\ln l\}\times(0,T]$ 左侧有1条自由边界. 结合(13)，即 $0\leqslant u_x\leqslant\mathrm{e}^x$，知当 $x<\ln l$ 时，有 $\partial_xu-\partial_xl=\partial_xu\geqslant0$. 因此，定义在 $\{\ln l\}\times(0,T]$ 左侧的自由边界为 $h(\tau)=\max\{x|u(x,\tau)=l\},0<\tau\leqslant T$.

定理9　当 $q=0$ 时，设问题(3)的最佳实施边界为 $h(\tau)=\ln l$.（见图4）

（下转第112页）

[16] 王长清,祝西里.电磁场计算中的时域有限差分法[M].北京:北京大学出版社,1993.
[17] NAKAMURA O,MORITA N,OKAZAKI K. Quantitative evaluation of trigger pulse reflected waves in supersonic extracorporeal shock wave lithotripter[J]. Trans IEICE,1995,78(10):1 263-1 275.
[18] PENNES H H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm[J]. Journal of applied physiology, 1948,1:93-122.
[19] GINTER S. Numerical simulation of ultrasound-thermotherapy combining nonlinear wave propagation with broadband soft-tissue absorption[J]. Ultrasonics,2000,37:693-696.

[责任编辑:顾晓天]

(上接第75页)

当 $q=0$ 时,在引理3中的稳态问题中, $\gamma_0=1$, $a=1$, $b\to+\infty$,因此有且只有一个自由边界点 $S=l$,则 $\ln l\leqslant h(\tau)\leqslant\ln l$ 成立,因此 $h(\tau)=\ln l$.

这种情况相当特殊,说明当股票不分红时,立即实施期权,获得现金 l 是最合理的.

[参考文献]

[1] BLANK F,SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Political economy,1973,81(3):637-654.
[2] WILMOTT P,DEWYNNE J,HOWISON S. Option pricing[M]. London:Oxford Financial Press,1993.
[3] GUO X,SHEPP L. Some optimal stopping problems with nontrival boundaries for pricing exotic options[J]. Appl Prob,2001, 38:647-658.
[4] JIANG L S. Mathematical modeling and methods of option pricing[M]. Singapore:World Scientific,2005.
[5] AVNER FRIEDMAN. Variational principle and free boundary problems[M]. New York:John Wiley & Sons,1982.
[6] 陈亚浙.二阶抛物型偏微分方程[M].北京:北京大学出版社,2003.
[7] CONNON J R,HENRY D B,KOTLOV D B. Continuous differentiability of the free boundary for weak solutions of the Stefan problem[J]. Bull Ane Math Soc,1974,80:45-48.
[8] FRIEDMAN A. Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary[J]. J Funct Anal,1975,18:151-176.

[责任编辑:顾晓天]