关于Diophantine方程$x^3-1=13qy^2$的整数解

杜先存[1],管训贵[2],万　飞[1]

(1.红河学院教师教育学院,云南 蒙自 661199)
(2.泰州学院数理信息学院,江苏 泰州 225300)

[摘要]　设 $D=\prod_{i=1}^{s}p_i(s\geqslant 2)$,$p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)(1\leqslant i\leqslant s)$为不同的奇素数.关于Diophantine方程$x^3-1=Dy^2$的初等解法至今仍未解决.主要利用同余式、平方剩余、Pell方程的解的性质、递归序列,证明了$q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$为奇素数,$\left(\frac{q}{13}\right)=-1$时,Diophantine方程$x^3-1=13qy^2$仅有整数解$(x,y)=(1,0)$.

[关键词]　Diophantine方程,奇素数,整数解,同余式,平方剩余,递归序列

[中图分类号]O156　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2015)04-0103-03

On the Diophantine Equation $x^3-1=13qy^2$

Du Xiancun[1],Guan Xungui[2],Wan Fei[1]

(1.College of Teachers' Education,Honghe University,Mengzi 661199,China)
(2.School of Mathematics and Physics,Taizhou University,Taizhou 225300,China)

Abstract: Let $D=\prod_{i=1}^{s}p_i(s\geqslant 2)$,$p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 6)(i=1,2,\cdots,s)$,$p_i(i=1,2,\cdots,s)$be different odd primes. The primary solution of the Diophantine equation $x^3-1=Dy^2$ still remains unresolved. We use congruence, quadratic residue, some properties of the solutions to Pell equation and recurrent sequence, to prove that the Diophantine equation $x^3-1=13qy^2$ only has integer solution$(x,y)=(1,0)$when q be odd prime with $q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$ and $\left(\frac{q}{13}\right)=-1$.

Key words: Diophantine equation, odd prime, integer solution, congruence, quadratic remainder, recurrent sequence

设Z表示全体整数的集合.方程

$$x^3\pm 1=Dy^2\quad (D>0,D\text{无平方因子},x,y\in \mathbf{Z}) \tag{1}$$

是一类重要的Diophantine方程,其整数解已有研究.柯召、孙琦[1]证明了当$D>2$、D无平方因子且不含3及$6k+1$型的素因子时,方程(1)无非平凡解.D含素因子3时,杜先存等[2]给出了方程(1)无非平凡解的两个充分条件.但当D含$6k+1$型的素因子时,方程(1)的求解较为困难,尤其是D含两个或两个以上$6k+1$型的素因子时方程(1)的求解更为困难.当D含一个$6k+1$型的素因子时,罗明、黄勇庆[3]给出了方程$x^3-1=26y^2$的所有解;牟全武、吴强[4]给出了方程$x^3-1=103y^2$的所有解;李鑫、梁艳华[5]给出了方程$x^3-1=111y^2$的所有解;韩云娜[6]给出了方程$x^3-1=38y^2$的所有解.本文利用初等方法给出了D含两个$6k+1$型的素因子时方程$x^3-1=Dy^2$只有平凡解的一个充分条件.

引理1[7]　设p是一个奇素数,则丢番图方程$4x^4-py^2=1$除开$p=3,x=y=1$和$p=7,x=2,y=3$外,无其他的正整数解.

引理2[7]　方程$x^2-3y^4=1$仅有整数解$(x,y)=(\pm 2,\pm 1),(\pm 7,\pm 2),(\pm 1,0)$.

引理3[7]　设p是一个奇素数,则丢番图方程$x^4-py^2=1$除$p=5,x=3,y=4$和$p=29,x=99,y=1\ 820$外,无其他的正整数解.

收稿日期:2014-03-15.

基金项目:云南省教育厅科研基金(2012C199、2014Y462).

通讯联系人:杜先存,副教授,研究方向:初等数论.E-mail:liye686868@163.com

定理　设$q\equiv 7 \pmod{24}$为奇素数,模13的Legendre符号$\left(\frac{q}{13}\right)=-1$,则Diophantine方程

$$x^3-1=13qy^2 \tag{2}$$

仅有整数解$(x,y)=(1,0)$.

证明　因为$\gcd(x-1,x^2+x+1)=1$或3,故方程(2)给出以下8种可能的分解:

Ⅰ　$x-1=13qu^2, x^2+x+1=v^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅱ　$x-1=u^2, x^2+x+1=13qv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅲ　$x-1=13u^2, x^2+x+1=qv^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅳ　$x-1=qu^2, x^2+x+1=13v^2, y=uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅴ　$x-1=39qu^2, x^2+x+1=3v^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅵ　$x-1=3u^2, x^2+x+1=39qv^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅶ　$x-1=39u^2, x^2+x+1=3qv^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1$;

Ⅷ　$x-1=3qu^2, x^2+x+1=39v^2, y=3uv, \gcd(u,v)=1$.

以下讨论这8种情况所给的方程(2)的整数解.

对于情形Ⅰ　解第二式,得$x=0$或-1,均不适合第一式,故该情形方程(2)无整数解.

因为$u^2\equiv 0,1,4 \pmod 8$,利用同余的性质可知情形Ⅳ不成立.

对于情形Ⅱ　将第一式代入第二式得$(2u^2+3)2+3=52qv^2$,则有$(2u^2+3)^2\equiv -3 \pmod{13}$,解得$u^2\equiv 2,-5 \pmod{13}$.但模13的Legendre符号$\left(\frac{2}{13}\right)=\left(-\frac{5}{13}\right)=-1$,故该情形方程(2)无整数解.

对于情形Ⅲ　将第一式代入第二式得$(26u^2+3)^2+3=4qv^2$,则有$3\equiv qv^2 \pmod{13}$.又Legendre符号$\left(\frac{3}{13}\right)=1$,而Legendre符号$\left(\frac{q}{13}\right)=-1$,矛盾,故该情形方程(2)无整数解.

对于情形Ⅴ　将第一式代入第二式得$(2v)^2-3(26qu^2+1)2=1$,故有

$$2v+(26qu^2+1)\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n,\quad n\in\mathbf{Z},$$

这里$2+\sqrt{3}$是Pell方程$X^2-3Y^2=1$的基本解,因此有$26qu^2+1=\pm y_n(n\in\mathbf{Z})$,即$26qu^2=\pm y_n-1$.又$y_{-n}=-y_n$,所以只需考虑:

$$26qu^2=y_n-1. \tag{3}$$

由(3)得,$y_n\equiv 1 \pmod{26}$,则有$y_n\equiv 1 \pmod{13}$.

容易验证下式成立:

$$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n, y_0=0, y_1=1. \tag{4}$$

对递归序列(4)取模13,得周期为12的剩余类序列,且仅当$n\equiv 1,5 \pmod{12}$时,$y_n\equiv 1 \pmod{13}$.所以(3)要成立,需$n\equiv 1,5 \pmod{12}$,则只需$n\equiv 1 \pmod 4$.

设$n=4m+1(m\in\mathbf{Z})$,由(3)得,$26qu^2=y_{4m+1}-1=x_{4m}+2y_{4m}-1=x_{2m}^2+3y_{2m}^2+4x_{2m}y_{2m}-1=2y_{2m}(2x_{2m}+3y_{2m})=2y_{2m}x_{2m+1}$,即

$$13qu^2=x_{2m+1}y_{2m}.$$

又因$\gcd(x_{2m+1},y_{2m})=\gcd(2x_{2m}+3y_{2m},y_{2m})=\gcd(2x_{2m},y_{2m})=\gcd(2,y_{2m})=2$,所以下列情形之一成立:

$$x_{2m+1}=2a^2, y_{2m}=26qb^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1; \tag{5}$$

$$x_{2m+1}=26qa^2, y_{2m}=2b^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1; \tag{6}$$

$$x_{2m+1}=26a^2, y_{2m}=2qb^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1; \tag{7}$$

$$x_{2m+1}=2qa^2, y_{2m}=26b^2, u=2ab, \gcd(a,b)=1. \tag{8}$$

将(5)的第一式代入$x_{2m+1}^2-3y_{2m+1}^2=1$,得$4a^4-3y_{2m+1}^2=1$.根据引理1知,$a^2=1$,此时$x_{2m+1}=2$,则$m=0$,于是给出方程(2)的整数解$(x,y)=(1,0)$.

由(6)的第二式得$x_my_m=b^2$,又$\gcd(x_m,y_m)=1$,有$x_m=c^2, y_m=d^2$,故$(c^2)^2-3d^4=1$,根据引理2知,$c^2=1$,此时$x_m=1$,则$m=0$.但$x_1=2$,故$x_1\neq 26qa^2$,所以该情形下方程(2)无整数解.

由(7)的第二式得$x_my_m=qb^2$,考虑到$\gcd(x_m,y_m)=1$,则有以下情形之一成立:

$$x_m=c^2, y_m=qd^2, b=cd, \gcd(c,d)=1; \tag{9}$$

$$x_m=qc^2,\ y_m=d^2,\ b=cd,\ \gcd(c,d)=1. \tag{10}$$

将(9)的前两式代入 $x_m^2-3y_m^2=1$，得 $c^4-3(qd^2)^2=1$. 由引理3知，$d=0$，此时 $y_m=0$，则 $m=0$. 但 $x_1=2$，故 $x_1\neq 26a^2$，故此时(7)不成立，所以该情形方程(2)无整数解.

将(10)的前两式代入 $x_m^2-3y_m^2=1$，得 $(qc^2)^2-3d^4=1$. 由引理2知，方程仅有整数解 $(q,c,d)=(1,\pm1,0)$，$(7,\pm1,\pm2)$ 和 $(2,\pm1,\pm1)$，但 $q\equiv7\pmod{24}$ 为素数，所以 $(q,c,d)=(7,\pm1,\pm2)$，从而 $x_m=7$，则 $m=2$. 但 $x_5=362\neq26a^2$，故此时(7)不成立，所以该情形方程(2)无整数解.

由(8)的第二式得 $x_my_m=13b^2$，仿(7)式的讨论可知情形方程(2)无整数解.

对于情形Ⅵ 将第一式代入第二式得 $3(2u^2+1)2-13q(2v)^2=-1$，故有 $3(2u^2+1)^2\equiv-1\pmod{13}$，解得 $u^2\equiv7,5\pmod{13}$. 但模13的Legendre符号 $\left(\frac{7}{13}\right)=\left(\frac{5}{13}\right)=-1$，故该情形方程(2)无整数解.

对于情形Ⅶ 将第一式代入第二式得 $(78u^2+3)^2+3=12qv^2$，则有 $1\equiv qv^2\pmod{13}$. 又模13的Legendre符号 $\left(\frac{q}{13}\right)=-1$，矛盾，故该情形方程(2)无整数解.

对于情形Ⅷ 将第一式代入第二式得 $(6qu^2+3)^2+3=156v^2$，则有 $1\equiv13v^2\pmod{q}$. 又Legendre符号 $\left(\frac{13}{q}\right)=\left(\frac{q}{13}\right)=-1$，矛盾，故该情形方程(2)无整数解.

综上有，Diophantine方程(2)在题设条件下仅有整数解 $(x,y)=(1,0)$.

［参考文献］

［1］ 柯召，孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm1=Dy^2$［J］. 中国科学，1981，24(12)：1 453-1 457.

［2］ 杜先存，吴丛博，赵金娥. 关于Diophantine方程 $x^3\pm1=3Dy^2$［J］. 沈阳大学学报（自然科学版），2013，25(1)：84-86.

［3］ 罗明，黄勇庆. 关于不定方程 $x^3-1=26y^2$［J］. 西南大学学报（自然科学版），2007，29(6)：5-7.

［4］ 牟全武，吴强. 关于不定方程 $x^3-1=103y^2$［J］. 西南大学学报（自然科学版），2008，30(10)：38-40.

［5］ 李鑫，梁艳华. 关于不定方程 $x^3-1=111y^2$［J］. 西南师范大学学报（自然科学版），2009，34(1)：12-15.

［6］ 韩云娜. 关于Diophantine方程 $x^3-1=38y^2$［J］. 科学技术与工程，2010，10(1)：169-171.

［7］ 曹珍富. 丢番图方程引论［M］. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989.

［责任编辑：陈 庆］