doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.01.006

双参数算子半群概率逼近问题

仓定帮[1],闫守峰[1],陈　藏[2],许　璐[1]

(1.华北科技学院基础部,河北 三河 065201)
(2.华北科技学院教务处,河北 三河 065201)

[摘要]　借助Riemann-Stieltjes积分、随机过程、矩生成函数及算子值数学期望,对双参数算子半群的概率逼近问题进行了研究,给出了双参数算子半群的指数型概率逼近形式及生成定理.

[关键词]　双参数半群,概率逼近,生成定理
[中图分类号]O177.2　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2016)01-0036-05

Approximation Theoretic Aspects of Probabilistic Representation for Two Parameter Operator Semigroups

Cang Dingbang[1],Yan Shoufeng[1],Chen Cang[2],Xu Lu[1]

(1.Department of Basic,North China Institute of Science and Technology,Sanhe 065201,China)
(2.Department of Dean's Office,North China Institute of Science and Technology,Sanhe 065201,China)

Abstract:By means of Riemann-Stieltjes stochastic process,moment-generating functions and operator-valued mathematical expect,the problem of probabilistic approximation for two parameter operator semigroups was studied and the probabilistic approximation of exponential formulas,the generating theorems were given.

Key words:two parameter operator semigroups,probabilistic approximations,generating theorems

20世纪四五十年代,为了解决偏微分方程的初值问题,以Hille与Yosida K为代表的一些数学家提出了Banach空间上强连续半群(C_0)理论[1-2].当今,强连续半群的理论已经成为许多领域的重要工具.这些领域除了传统的偏微分方程和随机过程外,还包括量子力学、无穷维控制理论、积分-微分方程、泛函微分方程及无穷维动力系统等等[1].文献[3]给出了双参数算子半群及其无穷小生成元的定义,使得对单参数算子半群各方面的理论得以应用到双参数半群的研究中.近年来双参数算子半群由于与下面的双参数抽象柯西问题的密切关系重新得到重视与研究[4].

$$2-ACP(A_1,A_2;x)\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t_i}\mu(t_1,t_2)=A_i\mu(t_1,t_2), & t_i>0,i=1,2,\\ \mu(0,0)=x, & x\in(D(A_1)\bigcap D(A_2)),\end{cases}$$

其中 $H_i:D(H_i)\subseteq X\rightarrow X$,i=1、2是线性算子.

20世纪80年代开始,数学家们开始利用概率论这一有力工具解决算子半群中的逼近问题,并取得了丰富的成果[5-9].本文将概率论方法引入到双参数算子半群理论中,借助Riemann-Stieltjes积分、随机过程、矩生成函数及算子值数学期望对双参数半群的概率逼近问题进行研究,给出了双参数算子半群的概率逼近指数公式及生成定理.

1　定义及引理

定义1[4]　设L为Banach空间,$(T(s,t))_{s,t\geq 0}$是L中的有界线性算子,$T(s,t)$称为双参数半群如其满足:

收稿日期:2015-02-17.
基金项目:中央高校基本科研资助基金(3142014039、3142013039、3142014127)、华北科技学院重点学科资助基金(HKXJZD201402).
通讯联系人:仓定帮,副教授,研究方向:泛函分析及应用.E-mail:cdbjd@163.com.

（1）$T(0,0)=I$ ，I 是单位算子；

（2）$T(s_1+t_1,s_2+t_2)=T(s_1,t_1)T(s_2,t_2)$ ，$\forall s_1,s_2 t_1,t_2>0$.

若进一步存在常数 $\omega,M>0$ ，使得 $T(s,t)=M\mathrm{e}^{\omega(s+t)}$ 成立，则称双参数半群是指数有界的．

引理 1[4] 双参数算子半群 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元是变换 $R^{+^2}\to B(L)$, 由下面的表达式定义：

$$L(a,b)=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}x=aA_1x+bA_2x\ ,$$

其中 A_1、A_2定义如下：

$$D(A_1)=\left\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h,0)x-x}{h}\text{存在}\right\},$$

$$D(A_2)=\left\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h,0)x-x}{h}\text{存在}\right\},$$

并且：

$$A_1x=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h,0)x-x}{h}=\frac{\partial}{\partial s}T(s,t)x\bigg|_{(s,t)=(0,0)},x\in D(A_1),$$

$$A_2x=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h,0)x-x}{h}=\frac{\partial}{\partial t}T(s,t)x\bigg|_{(s,t)=(0,0)},x\in D(A_2)\ ,$$

同时还有

$$\frac{\partial}{\partial t}T(s,t)x=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(s,t+h)x-T(s,t)x}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{T(s,t)T(0,h)x-T(s,t)x}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(T(0,h)x-I)T(s,t)x}{h}T(s,t)=A_2T(s,t)x$$

及

$$\frac{\partial}{\partial t}T(s,t)x=A_1T(s,t)x\ .$$

引理 2[4] 设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 是 Banach 空间 L 中的双参数算子半群，无穷小生成元为 (A_1,A_2) ，若 $\lambda\in\rho\left((A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$ 且 $\lambda>\max(\omega(A_1),\omega(A_2))$ ，则有

$$(\lambda-(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})^{-1}x=R\left(\lambda,(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)x=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}T(at,bt)x\mathrm{d}t\ .$$

假设 X 是非负实值随机变量，$E(X)$ 表示其期望，$\sigma^2=E(X-E(X))^2$ 为其方差．$\psi_X(t)=E[t^X]$ 称为 X 的概率母函数，$\psi_X^*(t)=E[\mathrm{e}^{tX}]$ 为 X 的矩生成函数．显然若假设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 是指数有界的，X 和 Y 是非负实值随机变量，则有 $\|E(T(X,Y))\|\leqslant ME(\mathrm{e}^{\omega(X+Y)})=M\psi_{X+Y}^*(t)$.

若假设 N 是非负实值随机变量，记 $\psi_N(t)=\sum_{k=0}^\infty P(N=k)t^k,t\geqslant 0$. 取 $X=\sum_{k=1}^N Y_k,\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ 是随机变量 Y 的独立同分布列，且与 N 独立，则有 $\psi_X^*(t)=\psi_N(\psi_Y^*(t)),t\in\mathbf{R}$.

引理 3 （Taylor）设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 是 Banach 空间 L 中的双参数算子半群，无穷小生成元为 (A_1,A_2) ，对 $n\geqslant 1$ 和 $s,t,s',t'\geqslant 0$ 有

$$T(s,t)x=T(s',t')x+T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)x+$$
$$\frac{1}{2!}T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^2x+\ldots+\frac{1}{n!}T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^n x+R_n\ ,$$

其中 $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^{n+1}x$ ，s'' 介于 s' 和 s 之间，t'' 介于 t' 和 t 之间．

引理 4[6] 设 X 是非负实值随机变量且数学期望为 $E(X)=\xi,\psi_X^*(t)=E[\mathrm{e}^{tX}]<\infty$, 其中 $t>0,\{X_n|n\in\mathbf{N}\}$ 是随机变量 X 的独立同分布的样本列，取 $\bar{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^N X_k$, 则有：

$$\psi_{\bar{X}_n}^*(t)\leqslant\exp\left\{\frac{2t^2\psi_X^*(\eta)}{\mathrm{e}^2n(\eta-|t|/n)^2}\right\},|t|<n\eta,\quad 0\leqslant\eta\leqslant\delta\ ;$$

$$E(|\bar{X}_n-\xi|^r)\leqslant 2n^{-r/2}\left(\frac{\alpha\psi_X^*(\eta)}{\mathrm{e}\eta^2}\right)^{-r/2},\quad n>\frac{15r}{\psi_X^*(\eta)},r>0\ .$$

2　主要结果

定理1　设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 是Banach空间 L 中的双参数算子半群，$\{V_n:n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{W_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是分别与 X 和 Y 独立同分布的随机变量序列. 令 $s=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}X_k$，$t=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{M}Y_k$，则

$$E\left\{T\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k\right)\right\}=\left\{\psi_N\left(E\left(T\left(\frac{X}{n}\right)\right)\right)\right\}^n\cdot\left\{\psi_M\left(E\left(T\left(\frac{Y}{n}\right)\right)\right)\right\}^m.$$

证明　据双参数半群的定义可知

$$E\left\{T\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k,\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k\right)\right\}=E^n\left\{T\left(\frac{X}{n},0\right)\right\}E^m\left\{T\left(0,\frac{Y}{m}\right)\right\}=E^n\left\{T\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}V_k,0\right)\right\}E^m\left\{T\left(0,\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{M}W_k\right)\right\}=$$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}E^i\left[T\left(\frac{X}{n},0\right)\right]\Big|(N=i)\cdot P(N=i)\right\}^n\cdot\left\{\sum_{j=0}^{\infty}E^j\left[T\left(\frac{Y}{m},0\right)\right]\Big|(M=j)\cdot P(M=j)\right\}^m=\left\{\psi_N\left(E\left(T\left(\frac{X}{n},0\right)\right)\right)\right\}^n\times\left\{\psi_M\left(E\left(T\left(0,\frac{Y}{n}\right)\right)\right)\right\}^m.$$

定理2　设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant 0}$ 是Banach空间 L 中的指数有界的双参数算子半群，且 $E(s)=s'$，$E(t)=t'$，$\sigma^2(s)=\sigma_s^{\,2}$，$\sigma^2(t)=\sigma_t^{\,2}$，并且 s 与 t 的混合中心矩 $E((s-s')^k(t-t')^l)$ 存在，则有下面的不等式成立：

(1) $\|E(T(s,t))x-T(s',t')x\|\leqslant\frac{1}{2!}\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\{\sigma_s^{\,2}+2\operatorname{cov}(s,t)+\sigma_t^{\,2}\}^{1/2}\left\{\max\{\|A_1^{\,2}x\|,\|A_1A_2x\|,\|A_2^{\,2}x\|\}\right\}^{1/2}$，

其中，$x\in D(A_1^{\,i}A_2^{\,j})$，$i+j=2$.

(2) $\|E(T(s,t)x-T(s',t')x)\|\leqslant\frac{1}{3!}\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\left\{\sum_{k=0}^{6}C_n^kE((s-s')^k(t-t')^{6-k})\right\}^{1/2}\max\left\{\|A_1^{\,k}A_2^{\,6-k}x\|^{1/2},k=0,1,2,\cdots,6\right\}$，

其中 $x\in D(A_i)$，$i=1,2,\delta\geqslant 2\omega$，$x\in D(A_1^{\,i}A_2^{\,j})$，$i+j=6$.

证明　我们只证明(2)，(1)类似可以证得. 据引理2，令 $n=2$ 可以得到：

$$T(s,t)x-T(s',t')x=T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)x+\frac{1}{2!}T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^2x+$$
$$\frac{1}{3!}T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3x,$$

从而

$$\|E(T(s,t)x-T(s',t')x)\|=\left\|E\{T(s',t')((s-s')A_1x+(t-t')A_2)x+\frac{1}{2!}T(s',t')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^2x+\right.$$
$$\left.\frac{1}{3!}T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3x\}\right\|=\frac{1}{2!}\left\|T(s',t')E\left((s-s')A_1+(t-t')A_2\right)^2x+\frac{1}{3!}E\left(T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3\right)x\right\|\leqslant$$
$$\frac{1}{2!}\left\|T(s',t')E\left((s-s')A_1+(t-t')A_2\right)^2x\right\|+\frac{1}{3!}\left\|E\left(T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3\right)x\right\|=I_1+I_2,$$

其中：$I_1=\frac{1}{2!}\left\|T(s',t')E\left((s-s')A_1+(t-t')A_2\right)^2x\right\|$，$I_2=\frac{1}{3!}\left\|E\left(T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3\right)x\right\|$.

根据Holder不等式可得

$$I_2=\frac{1}{3!}\left\|E\left(T(s'',t'')((s-s')A_1+(t-t')A_2)^3\right)x\right\|\leqslant\frac{1}{3!}\left\|\{E(T(s'',t''))^2\}^{1/2}\{E(((s-s')A_1+(t-t')A_2)^6)\}^{1/2}x\right\|\leqslant$$
$$\frac{1}{3!}\left\|\{E(T(s'',t''))^2\}^{1/2}\right\|\left\|\{E(((s-s')A_1+(t-t')A_2)^6)\}^{1/2}x\right\|\leqslant\frac{1}{3!}\left\|\{E(T(s'',t''))^2\}^{1/2}\right\|\left\|\{E(((s-s')A_1+(t-t')A_2)^6)\}^{1/2}x\right\|,$$

注意到 s'',t'' 是分别介于 s 和 s'、t 和 t' 之间，从而

$$\left\|\{E(T(s'',t''))^2\}^{1/2}\right\|\leqslant\{ME(\mathrm{e}^{2\omega s''+2\omega t''})\}^{1/2}\leqslant\{ME(\mathrm{e}^{2\omega(s+s'+t+t')})\}^{1/2}=\{M\mathrm{e}^{s+t}E(\mathrm{e}^{2\omega(s+s'+t+t')})\}^{1/2}=\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2},$$

并且还有，

$$\left\|\{E(((s-s')A_1+(t-t')A_2)^6)\}^{1/2}x\right\|\leqslant\left\{\sum_{k=0}^{6}C_n^kE((s-s')^k(t-t')^{6-k})\left\|A_1^{\,k}A_2^{\,6-k}x\right\|\right\}^{1/2}\leqslant$$
$$\left\{\sum_{k=0}^{6}C_n^kE((s-s')^k(t-t')^{6-k})\right\}^{1/2}\max\{\|A_1^{\,k}A_2^{\,6-k}x\|^{1/2},k=0,1,2,\cdots,6\}.$$

同理可证得：

$$I_1=\frac{1}{2!}\left\|T(s',t')E\left((s-s')A_1+(t-t')A_2\right)^2x\right\|\leqslant$$

$$\frac{1}{2!}\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\{\sigma_s^{\ 2}+2\operatorname{cov}(s,t)+\sigma_t^{\ 2}\}^{1/2}\left\{\max\left\{\left\|A_1^{\ 2}x\right\|,\left\|A_1A_2x\right\|,\left\|A_2^{\ 2}x\right\|\right\}\right\}^{1/2}.$$

由上可知

$$\left\|E(T(s,t)x-T(s',t')x)\right\|\leqslant\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2s+2t}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\{\{\sigma_s^{\ 2}+2\operatorname{cov}(s,t)+\sigma_t^{\ 2}\}^{1/2}\cdot$$

$$\left\{\max\left\{\left\|A_1^{\ 2}x\right\|,\left\|A_1A_2x\right\|,\left\|A_2^{\ 2}x\right\|\right\}\right\}^{1/2}+\sum_{k=0}^{6}C_n^kE((s-s')^k(t-t')^{6-k})\}^{1/2}\max\left\{\left\|A_1^{\ k}A_2^{\ 6-k}x\right\|^{1/2}\right\}.$$

定理3 设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant0}$ 是Banach空间 L 中的双参数算子半群,记 $A_h=\dfrac{T(h,0)-I}{h}$, $A_l=\dfrac{T(0,l)-I}{l}$. 则有 $T(\xi_1,\xi_2)=\lim\limits_{\tau_1\to\infty}\lim\limits_{\tau_2\to\infty}\mathrm{e}^{\xi_1A_1/\tau_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2/\tau_2}=\mathrm{e}^{\xi_1A_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2}$.

证明 设 $\{N(\tau_1),\tau_1>0\}$ 和 $\{N(\tau_2),\tau_2>0\}$ 为相互独立的Poisson过程且 $E(N(\tau_1))=\tau_1\xi_1$, $E(N(\tau_2))=\tau_2\xi_2$. $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Y 的独立同分布序列且与上述Possion过程独立. 令 $Y\equiv1$, $s=s(\tau_1)=\dfrac{1}{\tau_1}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k=\dfrac{N(\tau_1)}{\tau_1}$, $t=t(\tau_2)=\dfrac{1}{\tau_2}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_2)}Y_k=\dfrac{N(\tau_2)}{\tau_2}$,进一步有 $E(s)=\xi_1,\sigma_s^{\ 2}=\dfrac{\xi_1}{\tau_1},E(t)=\xi_2,\sigma_s^{\ 2}=\dfrac{\xi_2}{\tau_2}$, 从而,

$$E[T(s,t)]=E\left[T\left(\frac{N(\tau_1)}{\tau_1},\frac{N(\tau_2)}{\tau_2}\right)\right]=E\left[T\left(\frac{N(\tau_1)}{\tau_1},0\right)\right]E\left[T\left(0,\frac{N(\tau_2)}{\tau_2}\right)\right],$$

并且以下计算过程成立:

$$E\left[T\left(\frac{N(\tau_1)}{\tau_1},0\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}T\left(\frac{k}{\tau_1},0\right)P(N(\tau_1)=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[T\left(\frac{1}{\tau_1},0\right)\right]^k\frac{(\tau_1\xi_1)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\tau_1\xi_1}=\mathrm{e}^{\tau_1\xi_1(T(\frac{1}{\tau_1},0)-I)}=\mathrm{e}^{\xi_1A_1/\tau_1};$$

$$E\left[T\left(0,\frac{N(\tau_2)}{\tau_2}\right)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}T\left(0,\frac{k}{\tau_2}\right)P(N(\tau_2)=k)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[T\left(0,\frac{1}{\tau_2}\right)\right]^k\frac{(\tau_2\xi_2)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\tau_2\xi_2}=\mathrm{e}^{\tau_2\xi_2(T(\frac{1}{\tau_2},0)-I)}=\mathrm{e}^{\xi_2A_2/\tau_2},$$

因而 $E[T(s,t)]=E[T(\dfrac{N(\tau_1)}{\tau_1},0)]E[T(0,\dfrac{N(\tau_2)}{\tau_2})]=\mathrm{e}^{\xi_1A_1/\tau_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2/\tau_2}$. 再据定理2可得:

$$\left\|\mathrm{e}^{\xi_1A_1/\tau_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2/\tau_2}x-T(\xi_1,\xi_2)x\right\|\leqslant\frac{1}{2!}\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\left\{\frac{\xi_1}{\tau_1}+\frac{\xi_2}{\tau_2}\right\}^{1/2}\left\{\max\left\{\left\|A_1^{\ 2}x\right\|,\left\|A_1A_2x\right\|,\left\|A_2^{\ 2}x\right\|\right\}\right\}^{1/2},$$

又因为 $\psi^*_{s+t}(2\omega)=\psi^*_s(2\omega)\psi^*_t(2\omega)$,其中

$$\psi^*_s(2\omega)=E(\mathrm{e}^{2\omega s})=E(\mathrm{e}^{\frac{2\omega N(\tau_1)}{\tau_1}})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi\tau_1)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\xi\tau_1}\mathrm{e}^{\frac{2\omega k}{\tau_1}}=\mathrm{e}^{-\xi\tau_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi\tau_1\mathrm{e}^{\frac{2\omega}{\tau_1}})^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\xi\tau_1}\mathrm{e}^{\xi\tau_1\mathrm{e}^{\frac{2\omega}{\tau_1}}}=\exp\{\xi\tau_1\mathrm{e}^{\frac{2\omega}{\tau_1}}-\xi\tau_1\}=\exp\{\xi\tau_1(\mathrm{e}^{\frac{2\omega}{\tau_1}}-1)\},$$

所以 $\psi^*_{s+t}(2\omega)\leqslant\exp\{\xi\tau_1(\mathrm{e}^{2\omega/\tau_1}-1)+\xi\tau_2(\mathrm{e}^{2\omega/\tau_2}-1)\}$,从而可得:

$$T(\xi_1,\xi_2)=\lim_{\tau_1\to\infty}\lim_{\tau_2\to\infty}\mathrm{e}^{\xi_1A_1/\tau_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2/\tau_2}=\mathrm{e}^{\xi_1A_1}\mathrm{e}^{\xi_2A_2}.$$

定理4 设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant0}$ 是Banach空间 L 中的双参数算子半群,记

$$R_1(\lambda)=R\left(\lambda,(A_1,A_2)\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\right)x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(0,bt)x\mathrm{d}t;$$

$$R_2(\lambda)=R\left(\lambda,(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\right)x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(at,0)x\mathrm{d}t,$$

则 $T(\xi_1,\xi_2)=\lim\limits_{\tau_1\to\infty}\lim\limits_{\tau_2\to\infty}\exp\{\xi_1\tau_1^{\ 2}R_1(\tau_1)-\xi_1\tau_1I+\xi_2\tau_2^{\ 2}R_2(\tau_2)-\xi_2\tau_2I\}x$.

证明 设 $\{N(\tau_1),\tau_1>0\}$ 与 $\{N(\tau_2),\tau_2>0\}$ 是Poisson过程, $E(N(\tau_1))=\tau_1\xi_1$, $E(N(\tau_2))=\tau_2\xi_2$. $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Y 的独立同分布序列,其概率密度函数是 $f(x)=\mathrm{e}^{-x},x>0$. 令 $s=s(\tau_1)=\dfrac{1}{\tau_1}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k$, $t=t(\tau_2)=\dfrac{1}{\tau_2}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_2)}Y_k$, $s=s(\tau_1)=\dfrac{1}{\tau_1}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k$,从而 $E[T(s,t)]=E\left[T\left(\dfrac{1}{\tau_1}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k,\dfrac{1}{\tau_2}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_2)}Y_k\right)\right]=E\left[T\left(\dfrac{1}{\tau_1}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k,0\right)\right]E\left[T\left(0,\dfrac{1}{\tau_2}\sum\limits_{k=1}^{N(\tau_2)}Y_k\right)\right]$,

其中

$$E\left[T\left(\frac{1}{\tau_1}\sum_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k,0\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[T\left(\frac{1}{\tau_1}\sum_{k=1}^{N(\tau_1)}Y_k,0\right)\middle|N(\tau_1)=n\right]P(N(\tau_1)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[T\left(\frac{1}{\tau_1}\sum_{k=1}^{n}Y_k,0\right)\right]P(N(\tau_1)=n)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}E^n\left[T\left(\frac{Y}{\tau_1}\right)\right]P(N(\tau_1)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}(\tau_1R_1(\tau_1))^n\frac{(\tau_1\xi_1)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\tau_1\xi_1}=\exp\{\xi_1\tau_1{}^2R_1(\tau_1)-\xi_1\tau_1I\}.$$

同理可得 $E\left[T\left(0,\frac{1}{\tau_2}\sum_{k=1}^{N(\tau_2)}Y_k\right)\right]=\exp\{\xi_2\tau_2{}^2R_2(\tau_2)-\xi_2\tau_2I\}$. 从而据定理2有下面的不等式成立:

$$\left\|\exp\{\xi_1\tau_1{}^2R_1(\tau_1)-\xi_1\tau_1I+\xi_2\tau_2{}^2R_2(\tau_2)-\xi_2\tau_2I\}x-T(\xi_1,\xi_2)x\right\|\leqslant$$

$$\frac{1}{2!}\sqrt{M}\,\mathrm{e}^{2\omega s'+2\omega t'}\{\psi^*_{s+t}(2\omega)\}^{1/2}\left\{\frac{\xi_1}{\tau_1}+\frac{\xi_2}{\tau_2}\right\}^{1/2}\left\{\max\left\{\left\|A_1{}^2x\right\|,\left\|A_1A_2x\right\|,\left\|A_2{}^2x\right\|\right\}\right\}^{1/2},$$

计算得到 $\psi^*_s(2\omega)=\exp\left\{\frac{2\omega\xi\tau_1}{\tau_1-2\omega}\right\}$, 从而 $\psi^*_{s+t}(2\omega)=\psi^*_s(2\omega)\psi^*_t(2\omega)=\exp\left\{\frac{2\omega\xi\tau_1}{\tau_1-2\omega}+\frac{2\omega\xi\tau_1}{\tau_1-2\omega}\right\}$, 因此

$$T(\xi_1,\xi_2)=\lim_{\tau_1\to\infty}\lim_{\tau_2\to\infty}\exp\{\xi_1\tau_1{}^2R_1(\tau_1)-\xi_1\tau_1I+\xi_2\tau_2{}^2R_2(\tau_2)-\xi_2\tau_2I\}x.$$

推论1　设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant0}$ 是Banach空间 L 中的双参数算子半群,令 $s=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$, $t=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k$. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立同分布序列,服从两点分布且 $E(X)=\xi_1$, $E(Y)=\xi_2$,则有:

$$T(\xi_1,\xi_2)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}[(I-\xi_1)+\xi_1T(\frac{1}{n},0)]^n\left[(I-\xi_2)+\xi_2T\left(0,\frac{1}{m}\right)\right]^m.$$

推论2　设 $(T(s,t))_{s,t\geqslant0}$ 是Banach空间 L 中的双参数算子半群,令 $s=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$, $t=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}Y_k$. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是独立同分布序列,服从Polya's分布,且 $E(X)=\xi_1$, $E(Y)=\xi_2$,则有:

$$T(\xi_1,\xi_2)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left[I+\alpha\xi_1\left(I-T\left(\frac{1}{n},0\right)\right)\right]^{-\frac{n}{\alpha}}\left[I+\alpha\xi_2\left(I-T\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)\right]^{-\frac{m}{\alpha}},\ \alpha>0.$$

[参考文献]

[1] HILLE E. Representation of one-parameter semigroups of linear transformations[J]. Proc Nat Acad Sci USA,1942,28:175-178.

[2] YOSIDA K. On the differentiability and representation of one-parameter semigroups of linear operators[J]. J Math Soc Japan,1948,1:15-21.

[3] SHARIF S A,KHALL R. On the generator of two parameter semigroups[J]. Applied mathematics and computation,2004,156(2):403-414.

[4] KHANEHGIR M,ROOHEI F,GOHAREI MOGHADDAM E. On two-parameter n-time integrated semigroups[J]. Int J Cont Math Sci,2012,7(10):467-475.

[5] PFEIFER D. Approximation-theoretic aspects of probabilistic representations for operator semigroups[J]. Journal of approximation theory,1985,43(3):271-296.

[6] PFEIFER D. Probabilistic concepts of approximation theory in connection with operation semigroups[J]. Approximation theory and its applications,1985,1(4):93-118.

[7] PFEIFER D,BURTER P L. Some general probabilistic estimations for the rate of convergence in operator semigroup representions[J]. Applicable analysis,1986,23:111-118.

[8] 陈文忠. C-无穷小生成元的表示式[J]. 厦门大学学报(自然科学版),1993,32(2):135-140.

[9] 陈文忠. C半群概率表示的饱和定理[J]. 厦门大学学报(自然科学版),1995,34(1):1-6.

[责任编辑:丁　蓉]