doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.01.007

有关方程$\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$的正整数解

张四保[1],席小忠[2]

(1.喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844008)
(2.宜春学院数学与计算机科学学院,江西 宜春 336000)

[摘要] 设 $\varphi(m)$ 为 Euler 函数 . 本文探讨了方程 $\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解,利用初等方法给出了该方程的所有正整数解 . 根据方程 $\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b))$ 正整数解的结论和已被讨论的相类似方程的正整数解的结论,证明了以下 2 个结论:对于任意正整数 k ,$(a,b)=(2k,2k)$ 是方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的 1 个整数解;对任意的正整数 k ,$(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$ 和 $(2^k\times 3,2^{k+1})$ 是方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的 2 个正整数解 .

[关键词] Euler 函数,不定方程,正整数解
[中图分类号]O156 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)01-0041-07

Positive Integer Solutions on Equation $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$

Zhang Sibao[1],Xi Xiaozhong[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Kashgar University,Kashgar 844008,China)
(2.Institute of Mathematics and Computer Science,Yichun College,Yichun 336000,China)

Abstract:Let $\varphi(m)$ be Euler function. The positive integer solutions of equation $\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b))$were discussed,and the all positive integer solutions of its were given by using elementary methods in this article. According to the conclusion that the positive integer solutions of equation $\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b))$and the positive integer solutions of similar equations has been studied,two conclusions as follows were proofed. For any positive integer k , $(a,b)=(2k,2k)$ is a positive integer solution of the equation $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$,and $(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$, $(2^k\times 3,2^{k+1})$ are positive solutions of equation $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$.

Key words:Euler function,diophantine equation,positive integer solutions

设 $\varphi(m)$ 为 Euler 函数,它在正整数 m 上的值为序列 $0,1,2,\cdots,m-1$ 中与 m 互素的整数的个数[1]. 对于含有 Euler 函数的方程的研究甚多,例如 McCranie[2]讨论了方程 $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ 解的问题;2000 年,EL-Kassar[3]讨论了方程 $k\varphi(n)=\varphi(n+1)$ 与 $k\varphi(n+1)=\varphi(n)$ 解的情况;2008 年,左可正[4]探讨了方程 $\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_k)$($k\geqslant 2$)的可解性,证明了当 $k=2$ 时,该方程的解情况为 $x_1=x_2=2$ 或者 x_1 , x_2 中一个为 3,另一个为 4;当 $k=3$ 时,该方程的解情况为 x_1 , x_2 , x_3 中两个为 2,另一个为 3;当 $k\geqslant 4$ 时,该方程无正整数解;2010 年,孙翠芳[5]等讨论了方程 $\varphi(xy)=k(\varphi(x)+\varphi(y))$ 可解性问题,其中 k 为素数 . 对于包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程研究情况也很丰富,可参考文献[6-9].

本文将研究方程 $\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b))$ 可解性问题,给出其全部正整数解 . 并根据有关文献的结论,讨论了方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 当 k 为某些正整数时正整数解的情况 .

1 主要引理

引理 1[10] 对任意正整数 m 与 n ,若 $m|n$,则 $\varphi(m)|\varphi(n)$.

收稿日期:2015-03-15.
基金项目:国家自然科学基金项目(11201411).
通讯联系人:张四保,副教授,研究方向:数论研究 . E-mail:sibao98@sina.com

引理 2[10]　对任意正整数 n 与 m，则 $\varphi(nm)=\dfrac{(n,m)\varphi(n)\varphi(m)}{\varphi((n,m))}$，其中 (n,m) 为 n 与 m 的最大公因数 .

引理 3[10]　当整数 $n\geqslant 2$ 时，则 $\varphi(n)<n$；当整数 $n\geqslant 3$ 时，则 $\varphi(n)$ 为偶数 .

引理 4[11]　P 为素数，方程 $\varphi(x)=2P$ 的解 x 为：1）当 $P=2$ 时，x=5、8、10、12；当 $P=3$ 时，x=7，9，14，18；当 $P\geqslant 5$ 时，若 $g=2P+1$ 为素数，则方程 $\varphi(x)=2P$ 有两个解 x=g、$2g$，若 $g=2P+1$ 不为素数，则方程 $\varphi(x)=2P$ 无正整数解 .

引理 5[11]　1）当 $q=2p+1$，且 $2pq+1$ 为素数时，方程 $\varphi(x)=2pq$ 的解为 $x=q,q^2,2pq+1,2(2pq+1)$；2）当 $q=2p+1$，但 $2pq+1$ 不为素数时，方程 $\varphi(x)=2pq$ 的解为 $x=q$，$2q^2$；3）当 $q\neq 2p+1$，但 $2pq+1$ 为素数时，方程 $\varphi(x)=2pq$ 的解为 $x=2pq+1$，$2(2pq+1)$；4）其他情形，方程 $\varphi(x)=2pq$ 无解，其中 p、q 是满足 $q>p>2$ 的素数 .

引理 6[11]　若 $\varphi(x)=2$，则 x=3，4，6；若 $\varphi(x)=2^2$，则 x=5，8，10，12；若 $\varphi(x)=2^3$，则 x=15，16，20，24，30；若 $\varphi(x)=2^4$，则 x=17，32，34，40，48，60；若 $\varphi(x)=2^5$，则 x=51，64，68，80，96，102，120.

2　主要结论及其证明

结论 1　方程

$$\varphi(ab)=8(\varphi(a)+\varphi(b)) \tag{1}$$

有正整数解

$(a,b)=(9,105)$，$(9,144)$，$(9,156)$，$(9,168)$，$(9,180)$，$(9,210)$，$(10,40)$，$(10,60)$，$(11,41)$，$(11,75)$，$(11,82)$，$(11,100)$，$(11,150)$，$(12,24)$，$(12,30)$，$(13,35)$，$(13,45)$，$(13,56)$，$(13,70)$，$(13,72)$，$(13,84)$，$(13,90)$，$(14,26)$，$(14,36)$，$(15,48)$，$(15,80)$，$(16,16)$，$(16,20)$，$(16,24)$，$(16,30)$，$(17,32)$，$(17,40)$，$(17,48)$，$(17,60)$，$(18,26)$，$(18,28)$，$(18,105)$，$(20,16)$，$(20,24)$，$(21,52)$，$(22,41)$，$(22,75)$，$(24,12)$，$(24,16)$，$(24,20)$，$(26,14)$，$(26,18)$，$(26,35)$，$(26,45)$，$(28,18)$，$(28,39)$，$(28,45)$，$(30,12)$，$(30,16)$，$(32,17)$，$(35,13)$，$(35,26)$，$(35,36)$，$(36,14)$，$(36,35)$，$(39,28)$，$(40,10)$，$(40,17)$，$(41,11)$，$(41,22)$，$(45,13)$，$(45,26)$，$(45,28)$，$(48,15)$，$(48,17)$，$(52,21)$，$(56,13)$，$(60,10)$，$(60,17)$，$(70,13)$，$(72,13)$，$(75,11)$，$(75,22)$，$(80,15)$，$(82,11)$，$(84,13)$，$(90,13)$，$(100,11)$，$(105,9)$，$(105,18)$，$(144,9)$，$(150,11)$，$(156,9)$，$(168,9)$，$(180,9)$，$(210,9)$.

证明　设 $\gcd(a,b)=d$，由引理 1 可得，$\varphi(d)|\varphi(a)$，$\varphi(d)|\varphi(b)$，则存在正整数 q_1，q_2，使得 $\varphi(a)=q_1\varphi(d)$，$\varphi(b)=q_2\varphi(d)$. 再由引理 2 可得，

$$\varphi(ab)=\frac{d\varphi(a)\varphi(b)}{\varphi(d)}=dq_1q_2\varphi(d).$$

而 $8(\varphi(a)+\varphi(b))=8\varphi(d)(q_1+q_2)$，由方程(1)有

$$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=d. \tag{2}$$

对于式(2)，当 $d>16$ 时有 $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}>2$，显然不存在正整数 q_1，q_2 使其成立，因此当 $d>16$ 时，式(2)无正整数解 . 因而，只需讨论 d 取区间 $[1,16]$ 内的整数即可 . 下面分 14 种情况分别证明 .

(1)当 $d=1$ 时，式(2)为 $\dfrac{8}{q_1}+\dfrac{8}{q_2}=1$，从而有

$$q_1=\frac{8q_2}{q_2-8}=8+\frac{64}{q_2-8}.$$

由于 $q_1,q_2\in\mathbf{Z}^+$（$\mathbf{Z}^+$ 为正整数集合），因而 $q_2-8=1$，2，4，8，16，32，64，从而有

$$\begin{cases}q_1=72\\q_2=9\end{cases},\begin{cases}q_1=40\\q_2=10\end{cases},\begin{cases}q_1=24\\q_2=12\end{cases},\begin{cases}q_1=16\\q_2=16\end{cases},\begin{cases}q_1=12\\q_2=24\end{cases},\begin{cases}q_1=10\\q_2=40\end{cases},\begin{cases}q_1=9\\q_2=72\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}q_1=72\\q_2=9\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=72\\\varphi(b)=9\end{cases}$. 由引理 3 可知，此时对于 $\varphi(b)=9$ 是无正整数解的，因而这种情况下，方程(1)无正整数解 . 同理，对于 $\begin{cases}q_1=9\\q_2=72\end{cases}$ 的情况，方程(1)无正整数解 .

当 $\begin{cases}q_1=40\\q_2=10\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=40\\\varphi(b)=10\end{cases}$．结合引理 4，有 $\begin{cases}a=41,55,75,82,88,100,110,132,150\\b=11,22\end{cases}$．结合 $d=1$，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(41,11)$，$(41,22)$，$(75,11)$，$(75,22)$，$(82,11)$，$(100,11)$，$(150,11)$．

同理，当 $\begin{cases}q_1=10\\q_2=40\end{cases}$ 时，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(11,41)$，$(22,41)$，$(11,75)$，$(22,75)$，$(11,82)$，$(11,100)$，$(11,150)$．

当 $\begin{cases}q_1=24\\q_2=12\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=24\\\varphi(b)=12\end{cases}$．此时有 $\begin{cases}a=35,39,45,52,56,70,72,78,84,90\\b=13,21,26,28,36,42\end{cases}$．由此，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(35,13)$，$(35,26)$，$(35,36)$，$(39,28)$，$(45,13)$，$(45,26)$，$(45,28)$，$(52,21)$，$(56,13)$，$(70,13)$，$(72,13)$，$(84,13)$，$(90,13)$．

同理，当 $\begin{cases}q_1=12\\q_2=24\end{cases}$ 时，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(13,35)$，$(26,35)$，$(36,35)$，$(28,39)$，$(13,45)$，$(26,45)$，$(28,45)$，$(21,52)$，$(13,56)$，$(13,70)$，$(13,72)$，$(13,84)$，$(13,90)$．

当 $\begin{cases}q_1=16\\q_2=16\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=16\\\varphi(b)=16\end{cases}$．由引理 6 可知，$\begin{cases}a=17,32,34,40,48,60\\b=17,32,34,40,48,60\end{cases}$．此时，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(17,32)$，$(17,40)$，$(17,48)$，$(17,60)$，$(32,17)$，$(40,17)$，$(48,17)$，$(60,17)$．

（2）当 $d=2$ 时，式（2）为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=2$，从而有

$$q_1=\frac{4q_2}{q_2-4}=4+\frac{16}{q_2-4}.$$

由于 $q_1,q_2\in\mathbf{Z}^+$，因而 $q_2-4=1,2,4,8,16$，从而有

$$\begin{cases}q_1=20\\q_2=5\end{cases},\begin{cases}q_1=12\\q_2=6\end{cases},\begin{cases}q_1=8\\q_2=8\end{cases},\begin{cases}q_1=6\\q_2=12\end{cases},\begin{cases}q_1=5\\q_2=20\end{cases}.$$

由引理 3 可知，当 $\begin{cases}q_1=20\\q_2=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q_1=5\\q_2=20\end{cases}$ 时，方程（1）无正整数解．

当 $\begin{cases}q_1=12\\q_2=6\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=12\\\varphi(b)=6\end{cases}$．此时有 $\begin{cases}a=13,21,26,28,36,42\\b=7,9,14,18\end{cases}$．结合 $d=2$，此时方程（1）有正整数解 $(a,b)=(26,14)$，$(26,18)$，$(28,18)$，$(36,14)$．

同理，当 $\begin{cases}q_1=6\\q_2=12\end{cases}$ 时，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(14,26)$，$(18,26)$，$(18,28)$，$(14,36)$．

当 $\begin{cases}q_1=8\\q_2=8\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=8\end{cases}$．由引理 6 可得，$\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$．结合 $d=2$，此时方程（1）有正整数解 $(a,b)=(16,30)$，$(30,16)$．

（3）当 $d=3$ 时，式（2）为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=3$．对于该式，若 q_1，q_2 中有一个属于范围 $\left(0,\frac{8}{3}\right)$ 内的数，则 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}>3$；若 q_1，q_2 都属于范围 $\left(\frac{16}{3},\infty\right)$ 内的数，则 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}<3$；若 q_1，q_2 都属于范围 $\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ 内的数，则 $3<\frac{3}{m}+\frac{3}{n}<6$．要使该式成立，且 q_1，q_2 为正整数，则 q_1，q_2 中必有 1 个为区间 $\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ 内的整数，而另一个为区间 $\left(\frac{16}{3},+\infty\right)$ 内的整数，因而有

$$\begin{cases}q_1=3\\q_2=24\end{cases},\begin{cases}q_1=4\\q_2=8\end{cases},\begin{cases}q_1=24\\q_2=3\end{cases},\begin{cases}q_1=8\\q_2=4\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}q_1=3\\q_2=24\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=6\\\varphi(b)=48\end{cases}$．因而 $\begin{cases}a=7,9,14,18\\b=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210\end{cases}$．此时，方程（1）有正整数解 $(a,b)=(9,105)$，$(9,156)$，$(9,168)$，$(9,210)$，$(18,105)$．

同理,当$\begin{cases}q_1=24\\q_2=3\end{cases}$时,方程(1)有正整数解$(a,b)=(105,9)$,$(156,9)$,$(168,9)$,$(210,9)$,$(105,18)$.

当$\begin{cases}q_1=4\\q_2=8\end{cases}$时,有$\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=16\end{cases}$.因而$\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=17,32,34,40,48,60\end{cases}$.结合$d=3$,此时方程(1)有正整数解$(a,b)=(15,48)$.同理,当$\begin{cases}q_1=8\\q_2=4\end{cases}$时,方程(1)有正整数解$(a,b)=(48,15)$.

(4)当$d=4$时,式(2)为$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=4$,从而有

$$q_1=\frac{2q_2}{q_2-2}=2+\frac{4}{q_2-2}.$$

由于$q_1,q_2\in\mathbf{Z}^+$,因而$q_2-2=1$,2,4,从而有

$$\begin{cases}q_1=6\\q_2=3\end{cases},\begin{cases}q_1=4\\q_2=4\end{cases},\begin{cases}q_1=3\\q_2=6\end{cases}.$$

当$\begin{cases}q_1=6\\q_2=3\end{cases}$时,有$\begin{cases}\varphi(a)=12\\\varphi(b)=6\end{cases}$.因而$\begin{cases}a=13,21,26,28,36,42\\b=7,9,14,18\end{cases}$.由于此时$a$与$b$的$\gcd(a,b)=\mathrm{d}\neq4$,所以,此时方程(1)无正整数解.同理,当$\begin{cases}q_1=3\\q_2=6\end{cases}$时,方程(1)亦无正整数解.

当$\begin{cases}q_1=4\\q_2=4\end{cases}$时,有$\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=8\end{cases}$.因而$\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$.结合$d=4$,此时方程(1)有正整数解$(a,b)=(16,20)$,$(20,16)$,$(20,24)$,$(24,20)$.

(5)当$d=5$时,式(2)为$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=5$.如同$d=3$情况时的$q_1$,$q_2$的讨论可得,$q_1$,$q_2$中必有1个为区间$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$内的整数,而另一个为区间$\left(\frac{16}{5},+\infty\right)$内的整数,因而有

$$\begin{cases}q_1=2\\q_2=8\end{cases},\begin{cases}q_1=8\\q_2=2\end{cases}.$$

当$\begin{cases}q_1=2\\q_2=8\end{cases}$时,有$\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=32\end{cases}$.因而$\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=51,64,68,80,96,102,120\end{cases}$.结合$d=5$,此时方程(1)有正整数解$(a,b)=(15,80)$.同理,当$\begin{cases}q_1=8\\q_2=2\end{cases}$时,方程(1)有正整数解$(a,b)=(80,15)$.

(6)当$d=6$时,式(2)为$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=6$.如同当$d=3$情况时的$q_1$,$q_2$的讨论可得,$q_1$,$q_2$中必有1个为区间$\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$内的整数,而另一个为区间$\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$内的整数,因而有

$$\begin{cases}q_1=2\\q_2=4\end{cases},\begin{cases}q_1=4\\q_2=2\end{cases}.$$

当$\begin{cases}q_1=2\\q_2=4\end{cases}$时,有$\begin{cases}\varphi(a)=4\\\varphi(b)=8\end{cases}$.因而$\begin{cases}a=5,8,10,12\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$.结合$d=6$,此时方程(1)有正整数解$(a,b)=(12,30)$.同理,当$\begin{cases}q_1=4\\q_2=2\end{cases}$时,方程(1)有正整数解$(a,b)=(30,12)$.

(7)当$d=7$时,式(2)为$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=7$.如同当$d=3$情况时的$q_1$,$q_2$的讨论可得,$q_1$,$q_2$中必有1个为区间$\left(\frac{8}{7},\frac{16}{7}\right)$内的整数,而另一个为区间$\left(\frac{16}{7},+\infty\right)$内的整数.区间$\left(\frac{8}{7},\frac{16}{7}\right)$内只有整数2,将$q_1$,$q_2$中的1个取为2,代入可得另一个不为整数,因而该方程无正整数解,从而此时方程(1)无正整数解.

(8)当$d=8$时,式(2)为$\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=8$,从而有

$$q_1=\frac{q_2}{q_2-1}=1+\frac{1}{q_2-1}.$$

由于 $q_1,q_2\in\mathbf{Z}^+$，因而 $q_2-2=1$，从而有 $\begin{cases}q_1=2\\q_2=2\end{cases}$. 此时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=8\end{cases}$. 因而 $\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$. 结合 $d=8$，此时方程(1)有正整数解 $(a,b)=(16,24)$，$(24,16)$.

(9)当 $d=9$ 时，式(2)为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=9$. 如同当 $d=3$ 情况时的 q_1，q_2 的讨论可得，q_1，q_2 中必有1个为区间 $\left(\frac{8}{9},\frac{16}{9}\right)$ 内的整数，而另一个为区间 $\left(\frac{16}{9},+\infty\right)$ 内的整数，因而有

$$\begin{cases}q_1=1\\q_2=8\end{cases},\begin{cases}q_1=8\\q_2=1\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}q_1=1\\q_2=8\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=6\\\varphi(b)=48\end{cases}$. 因而 $\begin{cases}a=7,9,14,18\\b=65,104,105,112,130,140,144,156,168,180,210\end{cases}$. 此时，方程(1)有正整数解 $(a,b)=(9,144)$，$(9,180)$. 同理，当 $\begin{cases}q_1=8\\q_2=1\end{cases}$ 时，方程(1)有正整数解 $(a,b)=(144,9)$，$(180,9)$.

(10)当 $d=10$ 时，式(2)为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=10$. 如同当 $d=3$ 情况时的 q_1，q_2 的讨论可得，q_1，q_2 中必有1个为区间 $\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$ 内的整数，而另一个为区间 $\left(\frac{8}{5},+\infty\right)$ 内的整数，因而有

$$\begin{cases}q_1=1\\q_2=4\end{cases},\begin{cases}q_1=4\\q_2=1\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}q_1=1\\q_2=4\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=4\\\varphi(b)=16\end{cases}$. 因而 $\begin{cases}a=5,8,10,12\\b=17,32,34,40,48,60\end{cases}$. 结合 $\gcd(a,b)=10$ 可得，此时方程(1)有正整数解 $(a,b)=(10,40)$，$(10,60)$. 同理，当 $\begin{cases}q_1=4\\q_2=1\end{cases}$ 时，方程(1)有正整数解 $(a,b)=(40,10)$，$(60,10)$.

(11)当 $d=11$ 时，式(2)为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=11$. 对该式进行如同当 $d=7$ 情况的讨论，可得方程(1)无正整数解.

(12)当 $d=12$ 时，式(2)为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=12$. 如同当 $d=3$ 情况时的 q_1，q_2 的讨论可得，q_1，q_2 中必有1个为区间 $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ 内的整数，而另一个为区间 $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ 内的整数，因而有

$$\begin{cases}q_1=1\\q_2=2\end{cases},\begin{cases}q_1=2\\q_2=1\end{cases}.$$

当 $\begin{cases}q_1=1\\q_2=2\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\varphi(a)=4\\\varphi(b)=8\end{cases}$. 因而 $\begin{cases}a=5,8,10,12\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$. 结合 $d=12$，此时方程(1)有正整数解 $(a,b)=(12,24)$. 同理，当 $\begin{cases}q_1=2\\q_2=1\end{cases}$ 时，方程(1)有正整数解 $(a,b)=(24,12)$.

(13)当 $d=13,14,15$ 时，对式(2)所对应的方程进行如同当 $d=7$ 情况的讨论，可得方程(1)无正整数解.

(14)当 $d=16$ 时，式(2)为 $\frac{8}{q_1}+\frac{8}{q_2}=16$，即 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=2$，从而有 $\begin{cases}q_1=1\\q_2=1\end{cases}$，进而有 $\begin{cases}\varphi(a)=8\\\varphi(b)=8\end{cases}$. 因而 $\begin{cases}a=15,16,20,24,30\\b=15,16,20,24,30\end{cases}$. 此时，方程(1)有正整数解 $(a,b)=(16,16)$.

对以上解的情况进行总结可得本文结论. 证毕.

对于方程

$$\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b)),\tag{3}$$

文献[5]讨论得到，当 $k=2$ 时，$(a,b)=(4,4)$ 是方程(3)的正整数解；当 $k=3$ 时，$(a,b)=(6,6)$ 是方程(3)的正整数解；当 k 为素数时，$(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的正整数解；根据结论1可知，当 $k=8$ 时，$(a,b)=(16,16)$ 是方程(3)的正整数解. 为此，可引发出如下问题.

问题1　对于任意正整数 k,方程(3)是否一定有 $(a,b)=(2k,2k)$ 这个正整数解?

为此,下面来证明以下结论.

结论2　对于任意正整数 k,$(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的1个正整数解.

证明　当 $k=1$ 时,显然 $(a,b)=(2,2)$ 是方程(3)的正整数解.下面就 k 为奇数与偶数分情况来加以讨论.

对于 k 为素数的情况,文献[5]已证明 $(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的正整数解.当 k 为奇合数时,设 $k=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ 为 k 的标准分解式,其中 p_i($i=1,2,\cdots,s$)为奇素数,β_i 为正整数.此时,有

$$\varphi(ab)=\varphi(2k\times 2k)=\varphi(4k^2)=2\varphi(k^2)=2\varphi(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s})=2p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right);$$

而

$$k(\varphi(a)+\varphi(b))=k(\varphi(2k)+\varphi(2k))=2k\varphi(2k)=2p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}\varphi(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s})=2p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

此时有 $\varphi(2k\times 2k)=k(\varphi(2k)+\varphi(2k))$,因此当 k 为奇合数时,结论成立.

下证 k 为偶数的情况,当 $k=2$ 时,文献[5]已证明结论是成立的,则只需讨论以下2种情况:$\gcd(4,k)=2$,$\gcd(4,k)=4$.

当 $\gcd(4,k)=2$ 时,设 $k=2p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ 为 k 的标准分解式,其中 p_i($i=1,2,\cdots,s$)为奇素数,β_i($i=1,2,\cdots,s$)为正整数.则

$$\varphi(ab)=\varphi(2k\times 2k)=\varphi(4k^2)=8\varphi(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s})=8p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=$$
$$2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right);$$

而

$$k(\varphi(a)+\varphi(b))=k(\varphi(2k)+\varphi(2k))=2k\varphi(2k)=4p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}\varphi(4p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s})=8p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

由此可知,此时 $(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的1个正整数解.

当 $\gcd(4,k)=4$ 时,设 $k=2^{2\alpha}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ 为 k 的标准分解式,其中 α 为正整数,p_i($i=1,2,\cdots,s$)为奇素数,β_i($i=1,2,\cdots,s$)为正整数.则

$$\varphi(ab)=\varphi(2k\times 2k)=\varphi(4k^2)=\varphi(2^{4\alpha+2}p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s})=2^{4\alpha+1}\varphi(p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s})=2^{4\alpha+1}p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

而

$$k(\varphi(a)+\varphi(b))=k(\varphi(2k)+\varphi(2k))=2k\varphi(2k)=2k\varphi(2^{2\alpha+1}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s})=(2^{2\alpha+1}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s})2^{2\alpha}p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\times$$
$$\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2(2^{4\alpha}p_1^{2\beta_1}p_2^{2\beta_2}\cdots p_s^{2\beta_s})\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=2k^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

由此可知,此时 $(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的1个正整数解.

综上可得,对于任意正整数 k,$(a,b)=(2k,2k)$ 是方程(3)的1个正整数解.证毕.

在文献[5]中,作者给出了 $(a,b)=(2^2,2\times 3)$,$(2\times 3,2^2)$ 是方程 $\varphi(ab)=2(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的2个正整数解.对

于方程 $\varphi(ab)=2^2(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的全部正整数解,将在另一文章中进行讨论,但通过代入验证可得 $(a,b)=(2^3,2^2\times 3)$,$(2^2\times 3,2^3)$ 是该方程的 2 个正整数解.由结论 1 可得,$(a,b)=(2^4,2^3\times 3)$,$(2^3\times 3,2^4)$ 是方程 $\varphi(ab)=2^3(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的 2 个正整数解.请注意这些方程以及它们各自的这 2 个正整数解的形式,根据 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 中 a,b 的对称性,可提出如下一个问题.

问题 2 对任意的正整数 k,$(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$ 是否一定是方程

$$\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b)) \tag{4}$$

的正整数解?

如果这个结论是正确的,则可得方程(4)的两个正整数解 $(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$,$(2^k\times 3,2^{k+1})$.

结论 3 对任意的正整数 k,$(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$,$(2^k\times 3,2^{k+1})$ 是方程(4)的 2 个正整数解.

证明 只需证明 $(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$ 是方程(4)的正整数解即可.由于

$$\varphi(ab)=\varphi(2^{k+1}\times(2^k\times 3))=\varphi(2^{2k+1}\times 3)=\varphi(2^{2k+1})\varphi(3)=2^{2k+1},$$

而

$$2^k(\varphi(a)+\varphi(b))=2^k(\varphi(2^{k+1})+\varphi(2^k\times 3))=2^k(2^k+2^k)=2^{2k+1},$$

从而有

$$\varphi(2^{k+1}\times(2^k\times 3))=2^k(\varphi(2^{k+1})+\varphi(2^k\times 3)),$$

即 $(a,b)=(2^{k+1},2^k\times 3)$ 是方程(4)的正整数解,因而 $(a,b)=(2^k\times 3,2^{k+1})$ 也是方程(4)的正整数解.证毕.

3 结语

本文给出了方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 当 $k=8$ 时的所有正整数解,并讨论方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 与方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解的情况.对于方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 中具体的 k 值,其所对应的方程可用类似的方法求解,但是随着 k 的增大,计算量也会随之增加.

[参考文献]

[1] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].3 版.北京:高等教育出版社,2009.
[2] GUY R K. Unsolved problems in number theory[M]. New York,Berlin:Springer Verlag,1981.
[3] EL-KASSAR N. On the equations $k\varphi(n)=\varphi(n+1)$ and $k\varphi(n+1)=\varphi(n)$[J]. Number thery and related topics,2000,34(6):95-109.
[4] 左可正.含欧拉函数不定方程的可解性探讨[J].黄石理工学院学报,2008,24(2):49-50.
[5] SUN C F,CHENG Z. Some Kind of Equations involving Euler function $\varphi(n)$[J].数学研究,2010,43(4):364-369.
[6] 陈斌.一类包含 Smarandache 函数和 Euler 函数的方程[J].西南大学学报(自然科学版),2011,34(2):70-73.
[7] 呼家源,秦伟.一个包含 Smarandache Ceil 函数的对偶函数及 Euler 函数的方程及其可解性[J].西北大学学报(自然科学版),2013,43(3):364-366.
[8] 刘艳艳.一个算术函数方程及其正整数解[J].西安石油大学学报(自然科学版),2012,27(2):120-122.
[9] 高丽,鲁伟阳,郝虹斐.包含伪 Smarandache 函数与 Euler 函数的两个方程[J].陕西科技大学学报(自然科学版),2013,31(6):169-171.
[10] ROSEN K H. Elementary theory and its applications[M]. 5th ed. Pearson Educatin,Inc.,Addison Wesley,2005.
[11] 姜友谊.关于 Euler 函数方程 $\varphi(x)=m$ 的解[J].重庆工业管理学院学报,1998,12(5):91-94.

[责任编辑:陆炳新]