

具有饱和发生率的次优免疫反应传染病模型分析

韦春妙, 庞建华, 陆双扬, 惠 静

(广西科技大学理学院, 广西 柳州 545006)

[摘要] 本文建立了一类具有饱和发生率,能反映次优免疫反应传播机制的传染病动力学模型,通过引入参数 σ ,将经典的SIS模型和SIRS模型连接起来,该模型既能反映SIS模型和SIRS模型的动力学形态,又能反映一类介于这两类模型之间的次有免疫反应的传染病模型的动力学形态.通过对模型的分析,确定了模型各类平衡点存在的阈值条件,通过构造Dulac函数和利用线性系统的局部稳定性定理,得到了各平衡点全局稳定的条件.研究表明,对于具有饱和发生率的传染病模型,经典的SIS模型和SIRS模型具有相同的动力学形态,但其染病高峰时间和感染人数有明显的区别.

[关键词] 次优免疫反应,传染病模型,基本再生数,全局稳定性

[中图分类号] O129 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2016)01-0048-05

Analysis of a Sub-Optimal Immune Reaction Epidemiological Model with Saturation Incidence

Wei Chunmiao, Pang Jianhua, Lu Shuangyang, Hui Jing

(School of Science, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou 545006, China)

Abstract: In this paper, an epidemiological model with saturation incidence rate which can reflect sub-optimal immune reaction propagation mechanism is investigated. This model corresponds to a transition between SIR and SIS model frameworks by a parameter. It shows that saturation incidence rate leads to rich dynamic behaviors, and the threshold of the existence of various equilibria are found. By means of constructing Dulac function and combining with the local stability of the corresponding linear system, we can obtain the conditions of global stability of equilibria. Furthermore, we are pleasantly surprised to find that between the SIS and SIR models there are very similar dynamics with saturation incidence rate, but it is obviously discriminate that the date when the endemic equilibrium becomes and the number of individuals will be infected between SIS and SIRS models.

Key words: Sub-optimal immune reaction, epidemiological model, reproduction number, global stability

近年来,大量的数学模型被用于分析各种各样的传染病问题,其中传染病动力学中仓室模型的思想被广泛使用和不断发展,并得到了大量的研究成果^[1-3].最典型的仓室模型是Kermack和McKendrick提出的SIR模型和SIS模型.其中SIR模型通常描述康复后对原病毒具有免疫力的疾病,如流感、麻疹、水痘等;而SIS模型则用来描述康复后不具有免疫力,可以被再次感染的疾病,如脑炎、淋病等.然而,大量的临床研究发现,由于个体的免疫系统完善水平不同,对于相同的病毒,并不是每个个体感染后都能产生抵抗被该病毒再次感染的免疫力^[4-6].我们把这种现象称为次优免疫反应现象^[7].

本文将引入参数 σ ($0 \leq \sigma \leq 1$)把经典的SIS模型和SIRS模型连接起来反映疾病的次优免疫机制,建立具有饱和发生率 $\frac{\beta SI}{1 + \omega I}$ 的传染病模型,进而研究其动力学的全局渐进性态.

收稿日期:2015-01-29.

基金项目:国家自然科学基金(11401117和11201236)、广西自然科学基金(2012GXNSFAA053011)、广西高校科研项目(YB2014203)、广西科技大学科学基金(校科自1419206).

通讯联系人:庞建华,博士,副教授,研究方向:生物数学. E-mail: pjh968@126.com

1 模型建立

以 $S=S(t)$ 、 $I=I(t)$ 、 $R=R(t)$ 来表示在 t 时刻时易感者人数、感染者人数和恢复者人数. 引入参数 σ ($0 \leq \sigma \leq 1$) 把经典的 SIS 模型和 SIRS 模型连接起来. 当 $\sigma=0$ 时, 模型对应 SIS 模型; 当 $\sigma=1$ 时, 模型对应 SIRS 模型. 我们所建立的模型传播机制如图 1 所示.

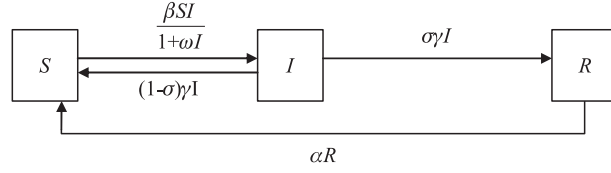


图1 模型的框图

Fig.1 A flow diagram of the model

该模型相应的方程如下:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{1 + \omega I} + (1 - \sigma)\gamma I + \alpha R, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \omega I} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \sigma\gamma I - \alpha R. \end{cases} \quad (1)$$

其中, γ 表示恢复率系数, σ ($0 \leq \sigma \leq 1$) 为恢复者中具有免疫力的比例, $\frac{\beta SI}{1 + \omega I}$ 为饱和发生率, α 为免疫丧失率.

2 模型分析

令 $N = S + I + R$, 将 $R = N - S - I$ 代入系统(1), 可得

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{1 + \omega I} + (1 - \sigma)\gamma I + \alpha(N - S - I), \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \omega I} - \gamma I. \end{cases} \quad (2)$$

假设系统(2)的所有参数为正数, 且初始条件为

$$S(0) > 0, \quad I(0) > 0. \quad (3)$$

由于

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS}{dt} \right|_{S=0} &= (1 - \sigma)\gamma I + \alpha(N - I) > 0, \\ \left. \frac{dI}{dt} \right|_{I=0} &= 0, \\ \left. \frac{d(S + I)}{dt} \right|_{S+I=N} &= -\gamma I + (1 - \sigma)\gamma I = -\sigma\gamma I < 0. \end{aligned}$$

易知, 集合 $\Omega = \{(S, I) | S > 0, I > 0, S + I \leq N\}$ 是系统(2)的一个正不变集. 故以下仅在集合 Ω 内讨论系统的各种性态.

显然, 系统(2)总有无病平衡点 $E_0(N, 0)$ 存在. 根据基本再生数的定义, 系统(2)的基本再生数为 $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$.

2.1 无病平衡点的全局稳定性

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $E_0(N, 0)$ 是全局渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, E_0 是不稳定的.

证明 系统(2)在 E_0 处的 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta N + (1 - \sigma) - \alpha \\ 0 & \gamma(R_0 - 1) \end{pmatrix},$$

J_0 在点 E_0 处的特征方程为

$$(\lambda + \alpha)[\lambda - \gamma(R_0 - 1)] = 0,$$

则

$$\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = \gamma(R_0 - 1).$$

显然, 当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. 从而, 无病平衡点 $E_0(N, 0)$ 是局部渐近稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, $\lambda_2 > 0$, 从而, E_0 是不稳定的.

取 Dulac 函数 $B = I^{-1}$, 令 $P(S, I) = -\frac{\beta SI}{1 + \omega I} + (1 - \sigma)\gamma I + \alpha(N - S - I)$, $Q(S, I) = \beta\frac{SI}{1 + \omega I} - \gamma I$. 那么, 对系统 (2) 有

$$\frac{\partial(BP)}{\partial S} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I} = -\frac{\beta}{1 + \omega I} - \frac{\alpha}{I} - \frac{\beta S \omega}{(1 + \omega I)^2} < 0.$$

因此, 在 Ω 内, 系统 (2) 不存在闭轨线^[8]. 结合 $E_0(N, 0)$ 局部渐近稳定性可知, 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 $E_0(N, 0)$ 是全局渐近稳定.

2.2 地方病平衡点的存在和全局稳定性

定理 2 当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 在 Ω 内存在唯一的地方病平衡点 $E(S^*, I^*)$ 且该平衡点是全局渐近稳定的.

证明 令

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{1 + \omega I} + (1 - \sigma)\gamma I + \alpha(N - S - I) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + \omega I} - \gamma I = 0. \quad (5)$$

由 (4)+(5) 得

$$\alpha N - \alpha S - (\sigma\gamma + \alpha)I = 0.$$

则

$$S = \frac{\alpha N - (\sigma\gamma + \alpha)I}{\alpha}. \quad (6)$$

当 $I \neq 0$ 时, 将 (6) 代入 (5) 得

$$\frac{\beta}{1 + \omega I} * \frac{\alpha N - (\sigma\gamma + \alpha)I}{\alpha} - \gamma = 0. \quad (7)$$

整理得

$$\beta\alpha N - \gamma\alpha = \gamma\alpha\omega I + \beta\sigma\gamma I + \beta\alpha I.$$

所以

$$I = \frac{\beta\alpha N - \gamma\alpha}{\gamma\alpha\omega + \beta\sigma\gamma + \beta\alpha}. \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (7) 得

$$S = \frac{\alpha N - (\sigma\gamma + \alpha)I}{\alpha} = \frac{\alpha N - \frac{(\sigma\gamma + \alpha)(\beta\alpha N - \gamma\alpha)}{\gamma\alpha\omega + \beta\sigma\gamma + \beta\alpha}}{\alpha} = \frac{\gamma\omega\alpha N + \gamma^2\sigma + \alpha\gamma}{\gamma\alpha\omega + \beta\sigma\gamma + \beta\alpha}.$$

由此可得

$$S^* = \frac{\gamma\omega\alpha N + \gamma^2\sigma + \alpha\gamma}{\gamma\alpha\omega + \beta\sigma\gamma + \beta\alpha},$$

$$I^* = \frac{\beta\alpha N - \gamma\alpha}{\gamma\alpha\omega + \beta\sigma\gamma + \beta\alpha}.$$

因此, 当 $\beta N > \gamma$, 即 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 存在正平衡点 $E(S^*, I^*)$. 即当且仅当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 有唯一的地方病平衡点.

系统 (2) 在 $E(S^*, I^*)$ 处的 Jacobi 矩阵为:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^*}{1+\omega I^*} - \alpha & -\frac{\beta S^*}{(1+\omega I^*)^2} + (1-\sigma)\gamma - \alpha \\ \frac{\beta I^*}{1+\omega I^*} & \frac{\beta S^*}{(1+\omega I^*)^2} - \gamma \end{pmatrix}.$$

在 $E(S^*, I^*)$ 处,由(5)II,有

$$\frac{\beta S^*}{1+\omega I^*} = \gamma.$$

即

$$\frac{1}{1+\omega I^*} = \frac{\gamma}{\beta S^*}. \quad (9)$$

将(9)代入Jacobi矩阵 J_1 可得

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma I^*}{S^*} - \alpha & -\frac{\gamma^2}{\beta S^*} + (1-\sigma)\gamma - \alpha \\ \frac{\gamma I^*}{S^*} & \frac{\gamma^2}{\beta S^*} - \gamma \end{pmatrix}.$$

令 $A = \frac{\gamma I^*}{S^*}$, $B = \frac{\gamma^2}{\beta S^*}$, 则

$$\frac{\gamma I^*}{S^*} = \frac{\beta \alpha N - \gamma \alpha}{\omega \alpha N + \gamma \sigma + \alpha} > 0,$$

$$\frac{\gamma^2 \omega}{\beta S^*} = \frac{\gamma \omega (\gamma \alpha \omega + \beta \sigma \gamma + \beta \alpha)}{\beta (\omega \alpha N + \gamma \sigma + \alpha)} > 0.$$

且

$$J_1 = \begin{pmatrix} -A - \alpha & -B + (1-\sigma)\gamma - \alpha \\ A & B - \gamma \end{pmatrix}.$$

显然, $\text{tr } J_1 = -A - \alpha + B - \gamma < 0$, $\det J_1 = A\sigma\gamma + A\alpha - B\alpha + \gamma\alpha > 0$. 因此, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点 $E(S^*, I^*)$ 是局部渐近稳定的.

又由定理2的证明知, 系统(2)在 Ω 内不存在闭轨线. 因此, 当 $R_0 > 1$ 时, 地方病平衡点存在且全局渐近稳定的.

3 数值模拟

我们对模型进行了数值模拟, 固定参数 $\beta = 0.05$ 、 $w = 0.5$ 、 $\alpha = 0.1$ 、 $\gamma = 0.2$ 、 $N = 2000$, σ 分别取 0、0.5、1, 得到如图2的关于感染人数 $I(t)$ 的时间序列曲线. 图中曲线1代表 $\sigma = 0$ 时 $I(t)$ 的曲线, 曲线2代表 $\sigma = 1$ 时 $I(t)$ 的曲线, 曲线3代表 $\sigma = 0.5$ 时 $I(t)$ 的曲线. 从图2可以看到, $\sigma = 0$ 时感染人数持续增长最后到达平衡点, 地方病平衡点处的感染人数值也是感染高峰值; $\sigma = 0.5$ 和 1 时, 感染人数都是先出现感染高峰后, 再降到地方病平衡点处. 随着 σ 的增加, 地方病平衡点处的感染人数在降低.

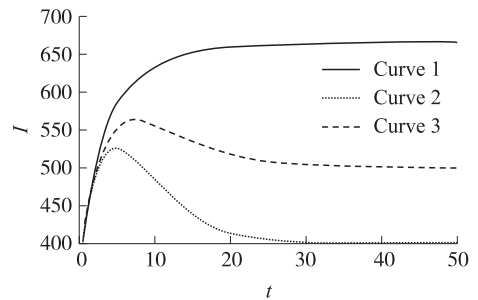


图2 感染人数 $I(t)$ 的时间序列图

Fig.2 Time series of infection population number $I(t)$

4 结语

本文对具有饱和发生率, 能反映次优免疫反应传播机制的传染病模型进行了动力学形态分析. 结果表明, 反映次优免疫反应传播机制的参数 σ 的大小没有改变传染病模型的动力学形态, 模型的基本再生数不包含参数 σ , 各平衡点存在的阈值条件和稳定条件都与 σ 无关. 也就是说, 对于具有饱和发生率的

传染病模型,经典的 SIS 模型和 SIRS 模型具有相同的动力学形态.但是,我们从数值模拟可以看到,随着 σ 的增加,地方病平衡点处的感染人数在降低,说明在相同的参数条件下, SIS 模型的感染人数要比 SIRS 模型的多,即感染个体恢复后,若对该病毒具有一定的免疫力,即使是短暂的,也有利于疾病的控制.

[参考文献]

- [1] 王贺桥,周艳丽,王美娟,等.具有连续预防接种的双线性传染病 SIQR 流行病[J].上海理工大学学报,2007,29(2): 113-116.
- [2] VAN D D, CHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibrium for compartmental models of disease transmission[J]. Math Biosci, 2002, 180: 29-48.
- [3] 马知恩,周义仓,王稳地,等.传染病动力学数学建模与研究[M].北京:科学出版社,2004.
- [4] WHITE L J, MEDLEY G F. Microparasite population dynamics and continuous immunity[J]. Proc R Soc Lond B, 1998, 265: 1977-1983.
- [5] GOMES M G M, WHITE L J, MEDLEY G F. Infection, reinfection, and vaccination under suboptimal immune protection: epidemiological perspectives[J]. Theor Biol, 2004, 228: 539-549.
- [6] GOMES M G M, MARGHERI A, MEDLEY G F, et al. Dynamical behaviour of epidemiological models with sub-optimal immunity and nonlinear incidence[J]. Math Biol, 2005, 51: 414-430.
- [7] 庞建华.具有一般恢复率的传染病模型及乙肝数学模型的研究[D].南京:南京师范大学,2012.
- [8] 马知恩,周义仓.常微分方程定性稳定性方法[M].北京:科学出版社,2001.

[责任编辑:陈 庆]