doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2016.02.001

Rectifiable空间中的基数不变量

张 静[1],贺 伟[2]

(1.闽南师范大学数学与统计学院,福建 漳州 363000)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 讨论了 Rectifiable 空间 G 中以下几个基数不变量:(1)A 是 G 的 U-离散子集当且仅当 A 的闭包是 U-离散的;(2)$n\omega(G)\leqslant ib(G)\chi(G)$;(3)若 U 是 e 在 G 中的开邻域,则存在 G 的子集 A 且 $|A|\leqslant c(G)$ 使得 $G=(AU)U$;(4)$\omega(G)=n\omega(G)\chi(G)$. 这些结果推广了拓扑群中的相应结果.

[关键词] Rectifiable 空间,拓扑群,基数不变量
[中图分类号]O189 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2016)02-0001-03

Cardinal Invariants on Rectifiable Spaces

Zhang Jing[1],He Wei[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Minnan Normal University,Zhangzhou 363000,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,some cardinal invariants are discussed in a Rectifiable space G. The main results are:(1)A is a U-discrete subset of G if and only if the closure of A is U-discrete;(2)$n\omega(G)\leqslant ib(G)\chi(G)$;(3)If U is a neighborhood of e in G,then there exists a subset A of G with $|A|\leqslant c(G)$ such that $G=(AU)U$;(4)$\omega(G)=n\omega(G)\chi(G)$. The corresponding results in topological groups are improved respectively.

Key words:Rectifiable spaces,topological groups,cardinal invariants

设 $(G,\cdot)$ 是一个抽象群且 τ 是 G 上的拓扑,定义映射 $f{:}G\times G\to G$ 使得 $\forall x,y\in G$,$f((x,y))=xy^{-1}$,则 $(G,\cdot)$ 是一个拓扑群[1]当且仅当 f 是连续映射.

设 G 是拓扑空间且 $\pi_1{:}G\times G\to G$ 是到第一坐标系的投影映射,若存在满同胚映射 $\varphi{:}G\times G\to G\times G$ 和元素 e 满足下面两个条件:

(R1)$\pi_1\circ\varphi=\pi_1$; (R2)对每一 $x\in G$ 有 $\varphi(x,x)=(x,e)$.

则称 G 是 Rectifiable 空间,称 φ 是 G 上的 Rectification. 每一个 Rectifiable 空间都是齐性的[2,3]. 显然,拓扑群是 Rectifiable 空间,事实上,对任意具有单位元 e 的拓扑群 G,易知 $\varphi(x,y)=(x,x^{-1}y)$ 是 G 上的 Rectification. 然而存在 Rectifiable 空间它不是拓扑群,如 7 维球面 S_7 是 Rectifiable 空间而不是拓扑群[4].

下面的结果属于 Čhoban M M[3].

定理 1[3] 拓扑空间 G 是 Rectifiable 空间当且仅当存在 $e\in G$ 和连续映射 $p{:}G\times G\to G$ 与 $q{:}G\times G\to G$ 使得对任意 $x\in G,y\in G$ 下列等式成立:$p(x,q(x,y))=q(x,p(x,y))=y$ 且 $q(x,x)=e$.

上面映射 $p{:}G\times G\to G$ 是 G 上的乘法. 此外,有时记 $p(x,y)$ 为 xy,$p(A,B)$ 为 AB,其中 $A,B\subset G$. 因此,$q(x,y)$ 是 G 中的元素使得 $xq(x,y)=y$.

因为 $xe=xq(x,x)=x$ 且 $xq(x,e)=e$,所以 e 是 G 的右单位元且 $q(x,e)$ 是 x 的右逆元. 取定点 $x\in G$,分别

收稿日期:2016-02-16.
基金项目:国家自然科学基金(11571175、11571158)、2014 年闽南师范大学杰出青年科研人才计划(MJ14001)、2015 年福建省中青年教师教育科研项目(JA15297)、2016 年福建省自然科学基金(2016J05014).
通讯联系人:张静,博士,讲师,研究方向:一般拓扑学. E-mail:zhangjing86@126.com

定义 $f_x, g_x: G \to G$ 为对任意 $y \in G$，$f_x(y)=p(x,y)$ 且 $g_x(y)=q(x,y)$，那么 f_x, g_x 都是同胚映射.

基数函数在一般拓扑学范畴中有非常重要的作用,它能够以系统的方式推广、公式化已有的结果.许多著名拓扑学家在拓扑群和 Rectifiable 空间的基数不变量方面做了大量工作.1996 年,Gul'ko A S[5]证明了若 G 是一个 Rectifiable 空间,则 $\pi\chi(G)=\chi(G)$，$\omega(G)\leqslant k(G)\chi(G)$，$\omega(G)=\pi\omega(G)=d(G)\chi(G)$.Arhangel'skii A V 和 Tkachenko M G 的著作[1]给出在拓扑群 G 中 $ib(G)\leqslant c(G)$，$ib(G)\leqslant e(G)$，$\omega(G)=ib(G)\chi(G)$.本文主要将拓扑群中部分基数不变量方面的结果推广到 Rectifiable 空间中.

本文所讨论空间都满足 T_2 分离性,字母 e 表示 Rectifiable 空间的右单位元.本文未定义的符号及术语见文献[1,6].

设 G 是一个 Rectifiable 空间,U 是 G 中 e 的开邻域.G 的子集 A 称为 U-离散的,若对每一 $a\in A$，$p(a,U)\bigcap A=\{a\}$.

命题 1　设 G 是 Rectifiable 空间,U 是 e 的开邻域.若 A 是 U-离散子集,则 $\bar{A}$ 也是 U-离散的.

证明　下证 A 是 U-离散的当且仅当 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$.

若 A 是 U-离散的且存在 $x,y\in A$，$u\in U\backslash\{e\}$ 使得 $q(x,y)=u$，那么 $y=p(x,q(x,y))=p(x,u)\in xU$.然而 A 是 U-离散的且 $x\neq y$，矛盾.假设 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$ 且 A 不是 U-离散的,即存在 $x,y\in A$ 使得 $x\neq y$ 且 $y\in xU$.从而有 $u\in U$ 使得 $y=xu$.因此,$u=q(x,p(x,u))=q(x,y)\in q(A,A)$.又因为 $x\neq y$，所以 $u=q(x,y)\neq e$ 与已知条件 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$ 矛盾.

若 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$，我们断言 $U\bigcap q(\bar{A},\bar{A})=\{e\}$.

情形 1　存在 $a\in A$，$b\in\bar{A}\backslash A$ 使得 $u=q(a,b)\in U$，则有 e 的开邻域 V 使得 $q(a,bV)\subset U$.因为 $b\in\bar{A}\backslash A$，故存在 $a'\in bV\bigcap A$ 且 $a\neq a'$.因此,$e\neq q(a,a')\in U$，这与 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$ 矛盾.

情形 2　存在 $b\in A$，$a\in\bar{A}\backslash A$ 使得 $u=q(a,b)\in U$，则存在 e 的开邻域 V 使得 $q(aV,b)\subset U$.由于 $a\in\bar{A}\backslash A$，所以存在 $a'\in aV\bigcap A$ 且 $a\neq a'$.因此,$e\neq q(a',a)\in U$，这与 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$ 矛盾.

情形 3　存在 $a\in\bar{A}\backslash A$，$b\in\bar{A}\backslash A$ 使得 $u=q(a,b)\in U$，则存在 e 的开邻域 W 使得 $q(aW,bW)\subset U$.同时存在 $a'\in aW\bigcap A$，$b'\in bW\bigcap A$ 且 $a'\neq b'$.那么,$e\neq q(a',b')\in U$，与 $U\bigcap q(A,A)=\{e\}$ 矛盾.

鉴于以上三种情形,我们证明了上述断言.

由命题 1 易知下面定理显然成立.

定理 2　若 G 是一个 Rectifiable 空间,那么 A 是 G 的 U-离散子集当且仅当 $\bar{A}$ 是 U-离散的.

设 G 是一个 Rectifiable 空间,V 是 G 中 e 的开邻域.G 的子集 A 称为 V-不交的,若对 A 中任意不同的两元素 x,y 有 $xV\bigcap yV=\varnothing$.显然若 A 是 G 的 V-不交子集,则 A 是 G 的 V-离散子集.

问题 1　若 A 是 Rectifiable 空间 G 的 V-离散子集,则 A 是否一定是 G 的 V-不交子集?

设 X 是一个拓扑空间,X 的胞腔度 $c(X)$ 定义为 $c(X)=\sup\{|A|: A$ 是 X 中不交开集族$\}$.

定理 3　设 G 是 Rectifiable 空间且 U 是 e 在 G 中的开邻域,则存在 G 的子集 A 且 $|A|\leqslant c(G)$ 使得 $G=(AU)U$.

证明　$\forall x\in G$.由于 $q(x,x)=e\in U$，所以存在 e 在 G 中的开邻域 V 使得 $q(xV,x)\subset U$ 且 $V\subset U$.

设集族 A 是由 G 的所有 V-不交子集构成,在集族 A 上赋予包含的偏序结构.易验证集族 A 的每一链有上界,由 Zorn's Lemma,集族 A 存在极大元 A.易知 $\{aV: a\in A\}$ 是由 G 中非空开集组成的不交集族,所以 $|A|\leqslant c(G)$.若 $x\in A$，则 $x\in(AU)U$.若 $x\notin A$，由 A 的极大性知,存在 $a\in A$ 使得 $xV\bigcap aV\neq\varnothing$，从而存在 $v_1,v_2\in V$ 使得 $xv_1=av_2$.那么

$$x=p(xv_1,q(xv_1,x))=p(av_2,q(xv_1,x))\in p(AV,U)\subset(AU)U.$$

由点 x 的任意性知 $G=(AU)U$.

设 G 是一个 Rectifiable 空间,G 是左 τ-narrow 的,若对 e 在 G 中的任一开邻域 U 存在子集 A 且 $|A|\leqslant\tau$ 使得 $G=AU$.定义 $ib_l(G)=\min\{\tau: G$ 是左 τ-narrow$\}$.称 G 是右 τ-narrow 的,若对 e 在 G 中的任一开邻域 U 存在子集 A 且 $|A|\leqslant\tau$ 使得 $G=UA$.定义 $ib(G)=\min\{\tau: G$ 是左 τ-narrow 且 G 是右 τ-narrow$\}$.显然 $ib_l(G)\leqslant l(G)$.设 F 是 G 的全体闭离散子集构成的集族,定义 $e(G)=\min\{t: |A|\leqslant t, A\in F\}$.

推论 1[1]　若 $(G,\cdot)$ 拓扑群,则 $ib(G)=ib_l(G)\leqslant c(G)$.

证明　由 $(G,\cdot)$ 是拓扑群知,若令 $p(x,y)=x\cdot y, q(x,y)=x^{-1}\cdot y$,则拓扑空间 G 是 Rectifiable 空间[5]. 对 e 在 $(G,\cdot)$ 中的任一开邻域 U,存在 e 在 G 中的开邻域 V 使得 $V\cdot V\subset U$. 由定理 3 知,存在 G 的子集 A 且 $|A|\leqslant c(G)$ 使得 $G=(AV)V=A\cdot(V\cdot V)\subset A\cdot U$. 即证 .

命题 2　设 G 是 Rectifiable 空间,则 $\omega(G)=n\omega(G)\chi(G)$.

证明　显然 $n\omega(G)\chi(G)\leqslant\omega(G)$. 设 β 是 G 在 e 处的局部基且 $|\beta|\leqslant\chi(G)$,集族 γ 是 G 的网络且 $|\gamma|=nw(G)$. 容易验证集族 $\gamma\beta=\{KU:K\in\gamma,U\in\beta\}$ 是 G 的基且 $|\gamma\beta|\leqslant nw(G)\chi(G)$. 事实上,设 O 是 e 在 G 中的开邻域,因为 $p(e,e)=e$,所以存在 $U\in\beta$ 使得 $p(U,U)\subset O$. 由于集族 γ 是 G 的网络,所以存在 $K\in\gamma$ 使得 $K\subset U$. 因此 $p(K,U)\subset O$. 由 G 是齐性空间,知集族 $\gamma\beta$ 是 G 的基 .

定理 4　设 G 是 Rectifiable 空间,则 $n\omega(G)\leqslant ib(G)\chi(G)$.

证明　设 $ib(G)x(G)=\kappa$,其中 κ 是一个无限基数 . 设 $\mathscr{B}$ 是 G 中 e 处的局部基, $\forall U\in\mathscr{B}$,则存在 G 的子集 F_U 使得 $|F_U|\leqslant\kappa$ 且 $G=F_UU=UF_U$. 令 $\mathscr{U}=\{Ux:x\in F_U\}$ 且 $\mathscr{C}=\bigcup\{U:\mathscr{U}\in A\}$,那么 $|\mathscr{C}|\leqslant\kappa$. 下证 $\mathscr{C}$ 是 G 的网络 .

$\forall a\in G$,若 O 是 a 在 G 中的开邻域,则存在 $U\in\mathscr{B}$ 使得 $p(a,U)\subset O$. 因为 $p(e,q(e,a))=a\in p(a,U)$,所以存在 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $p(V,q(V,a))\subset p(a,U)\subset O$. 因为 $G=F_VV$,所以存在 $x\in F_V$ 使得 $a\in Vx$,从而 $x\in q(V,a)$. 因此 $a\in p(V,x)\subset p(V,q(V,a))\subset p(a,U)\subset O$. 即证 .

推论 2　设 G 是 Rectifiable 空间,则 $ib_l(G)\chi(G)\leqslant\omega(G)\leqslant ib(G)\chi(G)$.

证明　因为 $ib_l(G)\leqslant l(G)\leqslant\omega(G)$ 且 $\chi(G)\leqslant\omega(G)$,所以 $ib_l(G)\chi(G)\leqslant\omega(G)$.

由命题 2 和定理 4 知 $\omega(G)\leqslant ib(G)\chi(G)$.

性质**　设 G 是 Rectifiable 空间,若 U 是 e 在 G 中的开邻域,存在 e 在 G 中的开邻域 V 使得 $q(xV,x)\subset U$ 对一切 $x\in G$ 成立,称 G 具有性质*.

定理 5　设 G 是具有性质*的 Rectifiable 空间,则 $ib_l(G)\leqslant e(G)$.

证明　设 $e(G)=\kappa$,其中 κ 是无限基数 . 若 $ib_l(G)>\kappa$,则存在 e 在 G 中的开邻域 U 使得对 G 的任一基数小于等于 κ 的子集 A,都有 $G\backslash AU\neq\varnothing$. 因为 G 具有性质*,所以存在 e 在 G 中的开邻域 V 使得 $\forall x\in G$ 有 $q(xV,x)\subset U$ 且 $V\subset U$. 由 $ib_l(G)>\kappa$ 可归纳定义 G 中的一个无限序列 $X=\{x_\alpha:\alpha<\kappa^+\}$ 满足:当 $\alpha<\beta<\kappa^+$ 时 $x_\beta\notin x_\alpha U$. 下证 X 是 G 的 V-离散子集 . 事实上,若 X 不是 G 的 V-离散子集,则存在 $\alpha,\beta<\kappa^+$ 且 $\alpha<\beta$,使得 $q(x_\alpha,x_\beta)=v\in V$ 或 $q(x_\beta,x_\alpha)=v\in V$,其中 $v\neq e$. 若 $q(x_\alpha,x_\beta)=v\in V$,则 $x_\beta=p(x_\alpha,q(x_\alpha,x_\beta))\in x_\alpha V\subset x_\alpha U$ 与 $x_\beta\notin x_\alpha U$ 矛盾 . 若 $q(x_\beta,x_\alpha)=v\in V$,则 $x_\alpha\in x_\beta V$,从而存在 $v\in V$ 使得 $x_\alpha=x_\beta v$. 从而

$$x_\beta=p(x_\beta v,q(x_\beta v,x_\beta))\in p(x_\alpha,U)=x_\alpha U ,$$

矛盾 .

由定理 2 知, $\bar{X}$ 是 V-离散子集 . 又 $|\bar{X}|\geqslant|X|=\kappa^+$,与 $e(G)=\kappa$ 矛盾 . 因此 $ib_l(G)\leqslant\kappa=e(G)$.

推论 3[1]　若 $(G,)$ 是拓扑群,则 $ib(G)\leqslant e(G)$.

证明　在拓扑群中 $ib_l(G)=ib(G)$,故只需证明 $ib_l(G)\leqslant e(G)$. 若令 $p(x,y)=x\cdot y, q(x,y)=x^{-1}\cdot y$,则拓扑空间 G 是 Rectifiable 空间[7]. 显然拓扑群 $(G,\cdot)$ 具有性质*,所以由定理 6 知 $ib_l(G)\leqslant e(G)$.

设 G,H 是 Rectifiable 空间 , f 是 G 到 H 的映射 . f 称为同态映射[8],若对任意 $x,y\in G$,有 $f(p_G(x,y))=p_H(f(x),f(y))$. 若 f 是 G 到 H 的一对一的满同态映射,则 f 被称为一个同构 .

下面两个命题推广了拓扑群中的相应结果,证明是显然的 .

命题 3　任一族 τ-narrow 的 Rectifiable 的乘积是一个 τ-narrow 的 Rectifiable 空间 .

命题 4　若 $f:G\to H$ 是从 τ-narrow 的 Rectifiable 空间 G 到 Rectifiable 空间 H 的连续满同态,则 H 是 τ-narrow 的 .

（下转第 21 页）

[参考文献]

[1] SCHIEF A. Separation properties for self-similarsets[J]. Proceeding of the American mathematical society, 1994, 122: 111-115.

[2] SCHIEF A. Self-similar sets in complete metric spaces[J]. Proceeding of the American mathematical society, 1996, 124: 481-490.

[3] MAULDIN R D, WILLIAMS S C. Hausdorff dimension in graph directed constructions[J]. Transactions of the American Math Soc, 1988, 309: 811-829.

[4] EDGAR G A. Measure, topology, and fractal geometry[M]. New York: Springer Verlag, 1990.

[5] WANG J L. The open set condition for graph directed self-sim-ilar sets[J]. Random Compu Dynam, 1997, 5: 283-305.

[6] LARMAN D G.A new theory of dimension[J]. Proc London Math Soc, 1967, 17(3): 178-192.

[7] EDGAR G A, GOLDS J. A fractal dimension estimate for a graph-directed iterated function system of non-similarities[J]. Indiana Univ Math J, 1999, 48(2): 429-447.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第3页)

[参考文献]

[1] ARHANGEL'SKII A V, Tkachenko M. Topological groups and related structures[M]. Paris: Atlantis Press and World Sci, 2008.

[2] ČHOBAN M M. On topological homogeneous algebras[C]//Interim Reports of II Prague Topol Symp, Prague, 1987: 25-26.

[3] ČHOBAN M M. The structure of locally compact algebras[J]. Serdica, 1992, 18: 129-137.

[4] USPENSKII V V. Topological groups and Dugundji compacta[J]. Mat Sb, 1989, 180: 1 092-1 118.

[5] GUL'KO A S. Rectifiable spaces[J]. Topology Appl, 1996, 68: 107-112.

[6] ENGELKING R. General topology[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[7] 林福财. 拓扑代数与广义度量空间[M]. 厦门:厦门大学出版社, 2012: 10-11.

[8] FUCAI L, JING Z, KEXIU Z. Locally σ-compact rectifiable spaces[J]. Topology Appl, 2015, 193: 182-191.

[责任编辑:陆炳新]