doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.01.008

柔性多粒化决策理论粗糙集模型

张 静[1],鞠恒荣[1,2],杨习贝[1],郭庆军[3]

(1.江苏科技大学计算机科学与工程学院,江苏 镇江 212003)
(2.南京大学工程管理学院,江苏 南京 210094)
(3.江苏理工学院计算机工程学院,江苏 常州 213000)

[**摘要**] 为了解决乐观多粒化决策要求宽松和悲观多粒化决策要求过于严格的不足,本文提出了一种新型的多粒化决策粗糙集模型,即柔性多粒化决策粗糙集模型,该模型引入阈值用以调节满足条件的信息粒个数,使得模型更具灵活性. 同时本文分析了该模型的相关性质并与经典模型进行了对比分析. 理论分析和实验结果同时表明,本文提出的模型是传统多粒化决策粗糙集模型在应用背景下的有力扩展.

[**关键词**] 决策理论,多粒化,柔性,粗糙集

[**中图分类号**]TP18 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2017)01-0048-07

A Flexible Multigranulation Decision-Theoretic Rough Set Model

Zhang Jing[1],Ju Hengrong[1,2],Yang Xibei[1],Guo Qingjun[3]

(1.School of Computer Science and Engineering,Jiangsu University of Science and Technology,Zhenjiang 212003,China)
(2.School of Management and Engineering,Nanjing University,Nanjing 210093,China)
(3.School of Computer Engineering,Jiangsu University of Technology,Changzhou 213000,China)

Abstract:As we all know,the optimistic multigranulation decision-theoretic rough set model was loose while pessimistic multigranulation decision-theoretic rough set model was strict. To solve this problem,we propose a new multigranulation decision-theoretic rough set model,which is called flexible multigranulation decision-theoretic rough set. It introduces a threshold to control the number of information granules. Such mechanism makes the model more flexible. Moreover,we also show the properties of this model and compare the model with classical multigranulation model. The results of theoretic analyses and experiment show that,the model proposed in this paper is a powerful expansion of the classical multigranulation decision-theoretic rough set in real world application.

Key words:decision-theoretic,multigranulation,flexible,rough set

在粗糙集理论研究发展过程中,加拿大学者 Yiyu Yao 教授在 20 世纪 90 年代初提出了一种新的粗糙集理论与方法:决策理论粗糙集(Decision-theoretic Rough Set)[1]. 决策理论粗糙集理论将 Bayes 风险决策方法引入粗糙集理论模型中,通过分析各种决策的风险代价,找出最小风险代价的决策,以此作为把对象划分到正域、负域和边界区域的依据,形成了接受决策、拒绝决策和延迟决策的三支决策语义[2]. 决策理论粗糙集方法及三支决策理论的最新研究进展可参见文献[3-10].

值得注意的是,Yao 提出的决策理论粗糙集方法依然是建立在一个不可分辨关系的基础上的. 然而,在实际决策分析问题中,多个决策者之间的关系有可能是相互独立的,因而需采用多个二元关系来进行目标的近似逼近,为此 Qian 等人提出了多粒化粗糙集的概念[11-12]. 该模型采用了两个及两个以上的不可分辨关系进行概念的近似逼近. 在多粒化的框架下,国内外众多学者做了大量的研究工作,完善充实了多粒化粗糙集[13-15].

鉴于决策理论粗糙集与多粒化各自的优势,如何将两者进行融合引起了研究者的兴趣,Qian 等人[16]率先将两者进行了融合,并提出了多粒化决策理论粗糙集模型,极大地推动了融合理论的发展. 现阶段的

收稿日期:2016-08-20.

基金项目:国家自然科学基金(61572242、61503160)、江苏省普通高校学术学位研究生科研创新计划项目(KYLX16_0021).

通讯联系人:张静,讲师,研究方向:数字图像处理、粗糙集. E-mail:zj_jingjing@ sina.com

多粒化决策理论粗糙集模型仍然存在两点不足,一方面,在该模型中,不同的粒度仍采用相同的损失代价,并不符合现实应用的需要,另一方面,针对多粒化乐观下近似,论域中的对象只要满足在一个属性子集上的条件约束,那么该对象即被认为满足要求,这样的要求显然过于宽松;而对于多粒化悲观下近似则要求在所有属性子集上都得满足相应的条件约束,这则过于严格了. 为了克服这两点不足,使得多粒化决策理论粗糙集更适应实际工程的需要,本文首先对乐观和悲观多粒化决策理论粗糙集模型进行了修正和完善,接着提出了一种柔性多粒化决策粗糙集模型. 新提出的粗糙集模型是对乐观和悲观策略的有益补充,将进一步丰富和发展决策粗糙集理论.

1　预备知识

1.1　Pawlak 粗糙集

形式化地,一个决策信息系统可被定义为二元组 $S=\langle U,AT\cup D\rangle$,其中 U 表示所有对象的集合,称为论域;AT 表示所有条件属性的集合,D 为决策属性集合.

对于 $\forall a\in AT\cup D$,定义映射:$U\to V_a$,V_a 表示属性 a 的值域,即 $a(x)\in V_a(\forall x\in U)$.

在决策信息系统 S 中,根据属性集合 AT,可得到不可分辨关系形如

$$IND(AT)=\{(x,y)\in U^2:\forall a\in AT,a(x)=a(y)\}. \tag{1}$$

不可分辨关系 $IND(AT)$ 描述的是两个对象不可分辨当且仅当这两个对象在所有属性上的属性值都相等. 显然不可分辨关系满足自反性、对称性和传递性,因而是一个等价关系.

定义 1　令 S 为决策信息系统,$\forall X\subseteq U$,X 基于不可分辨关系的下近似集合 $\underline{AT}(X)$ 与上近似集合 $\overline{AT}(X)$ 分别定义为:

$$\underline{AT}(X)=\{x\in U:[x]_{AT}\subseteq X\}, \tag{2}$$

$$\overline{AT}(X)=\{x\in U:[x]_{AT}\cap X\neq\varnothing\}, \tag{3}$$

其中 $[x]_{AT}=\{y\in U:(x,y)\in IND(AT)\}$ 表示 U 中所有与 x 具有不可分辨关系 $IND(AT)$ 的对象的集合,即 x 的等价类.

1.2　多粒化粗糙集

为了满足现实生活中分布式数据的处理,Qian 等人提出了多粒化粗糙集,该粗糙集由一族二元关系来近似逼近目标. Qian 等人的粗糙集模型由两种不同的形式构成,分别是乐观多粒化粗糙集模型和悲观多粒化粗糙集模型,其定义如下所示.

定义 2　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall X\subseteq U$,X 的多粒化乐观下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{O}(X)$ 与多粒化乐观上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{O}(X)$ 可分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{O}(X)=\{x\in U:\exists a_i\in AT,[x]_{a_i}\subseteq X\}, \tag{4}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{O}(X)=\{x\in U:\forall a_i\in AT,[x]_{a_i}\cap X\neq\varnothing\}. \tag{5}$$

定义 3　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall X\subseteq U$,X 的多粒化悲观下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{P}(X)$ 与多粒化悲观上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{P}(X)$ 可分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{P}(X)=\{x\in U:\forall a_i\in AT,[x]_{a_i}\subseteq X\}, \tag{6}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{P}(X)=\{x\in U:\exists a_i\in AT,[x]_{a_i}\cap X\neq\varnothing\}. \tag{7}$$

1.3　决策理论粗糙集

决策粗糙集模型是 Bayes 决策理论的一个简单应用. 对于任意的子集 $X\subseteq U$,可构建一个含有两个状态的集合 $\Omega=\{X,\sim X\}$,分别表示对象属于 X 还是不属于 X;令 $P(X\mid[x]_{AT})$ 表示任意对象在属于 $[x]_{AT}$ 的条件下属于 X 的条件概率. 对应于粗糙集中的 3 个域,可以构造一个决策动作集 $\tau=\{e_P,e_B,e_N\}$,其中 e_P,e_B,e_N 分别代表对一个对象分类的动作,即选择对象属于正域(POS(X))、边界域(BND(X))或者负域

(NEG(X)). 不同的决策会引导不同的分类错误,也将产生不同的代价. 这可表示为一个由 3×2 的矩阵定义的损失函数:

表 1 中,λ_{PP},λ_{BP},λ_{NP} 分别表示当一个对象属于集合 X 时,采取动作 e_P,e_B,e_N 的损失;λ_{PN},λ_{BN},λ_{NN} 分别表示当对象不属于集合 X 时,采取这些动作的损失.

表 1　决策粗糙集中的代价矩阵

Table 1　Loss functions of DTRS

	X	$\sim X$
e_P	λ_{PP}	λ_{PN}
e_B	λ_{BP}	λ_{BN}
e_N	λ_{NP}	λ_{NN}

对于 $[x]_{AT}$ 中的对象,采取不同的动作所产生的损失表示如下:

$$R(e_P|[x]_{AT})=\lambda_{PP}\cdot P(X|[x]_{AT})+\lambda_{PN}\cdot P(\sim X|[x]_{AT});$$
$$R(e_B|[x]_{AT})=\lambda_{BP}\cdot P(X|[x]_{AT})+\lambda_{BN}\cdot P(\sim X|[x]_{AT});$$
$$R(e_N|[x]_{AT})=\lambda_{NP}\cdot P(X|[x]_{AT})+\lambda_{NN}\cdot P(\sim X|[x]_{AT}).$$

进一步地,Yao 假设如下:

$$\lambda_{PP}\leqslant\lambda_{BP}\leqslant\lambda_{NP},\lambda_{NN}\leqslant\lambda_{BN}\leqslant\lambda_{PN};$$
$$(\lambda_{NP}-\lambda_{BP})\cdot(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})>(\lambda_{BP}-\lambda_{NP})\cdot(\lambda_{BN}-\lambda_{NN}).$$

基于以上的假设,根据 Bayes 决策理论,可得到以下最小风险决策规则:

(P)规则:如果 $P(X|[x]_{AT})\leqslant\alpha$,则选择 $x\in \mathrm{POS}(X)$;

(B)规则:如果 $\beta<P(X|[x]_{AT})<\alpha$,则选择 $x\in \mathrm{BND}(X)$;

(N)规则:如果 $P(X|[x]_{AT})\leqslant\beta$,则选择 $x\in \mathrm{NEG}(X)$.

式中,$\alpha=\dfrac{(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})}{(\lambda_{PN}-\lambda_{BN})+(\lambda_{BP}-\lambda_{PP})}$,$\beta=\dfrac{(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})}{(\lambda_{BN}-\lambda_{NN})+(\lambda_{NP}-\lambda_{BP})}$.

根据如上所述的三种决策规则,可以构建如下所示的决策下近似集与决策上近似集:

$$\underline{AT}_{DT}(X)=\{x\in U:P(X|[x]_{AT})\geqslant\alpha\},\tag{8}$$
$$\overline{AT}_{DT}(X)=\{x\in U:P(X|[x]_{AT})>\beta\}.\tag{9}$$

2　多粒化决策粗糙集

为了将贝叶斯决策理论引入多粒度环境中,Qian 等人率先提出了多粒化决策粗糙集理论并分别构建了乐观多粒化决策粗糙集模型和悲观多粒化决策粗糙集模型. 对于每个粒度代价矩阵的确定有两种机制可供选择,第一种可假设所有的粒度拥有一个相同的代价矩阵,Qian 等人构建的多粒化决策粗糙集模型即是基于该假设;另一种假设是不同的粒度对应于不同的代价矩阵. 在实际应用过程中,第二个假设更符合现实的需求. 例如,不同的专家做出的决策对应于不同的决策代价. 本文将基于第二个假设对多粒化决策粗糙集模型进行重新定义. 对于第 k 个信息粒,其对应的损失函数见表 2.

表 2　第 k 个粒度的代价矩阵

Table 2　Loss functions of k-th granularity

	X	$\sim X$
e_P	λ_{PP}^k	λ_{PN}^k
e_B	λ_{BP}^k	λ_{BN}^k
e_N	λ_{NP}^k	λ_{NN}^k

基于新定义的代价矩阵,可求得第 k 个信息粒所需要的参数,即 α^k 和 β^k,$k=\{1,2,\cdots,m\}$.

2.1　乐观与悲观多粒化决策粗糙集

定义 4　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall X\subseteq U$,X 的乐观多粒化决策下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^m a_i}_{DT}^{O}(X)$ 与乐观多粒化决策上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^m a_i}_{DT}^{O}(X)$ 可分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^m a_i}_{DT}^{O}(X)=\{x\in U:\exists a_k\in AT,P(X|[x]_{a_k})\geqslant\alpha^k\},\tag{10}$$
$$\overline{\sum_{i=1}^m a_i}_{DT}^{O}(X)=\{x\in U:\forall a_k\in AT,P(X|[x]_{a_k})>\beta^k\},\tag{11}$$

由定义 4 可知,论域中对象只要满足任一信息粒下的约束条件就可归类到乐观多粒化决策下近似集合中,而对于乐观多粒化决策上近似集则要求集合中的对象在所有的信息粒度上满足相应的约束要求.

基于乐观多粒化决策粗糙下、上近似集,可得到乐观多粒化决策环境下的正域、边界域和负域如下所示:

$$\mathrm{POS}_{DT}^{O}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{O}(X),\tag{12}$$

$$\mathrm{NEG}_{DT}^{O}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{O}(X),\tag{13}$$

$$\mathrm{BND}_{DT}^{O}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{O}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{O}(X).\tag{14}$$

定义 5　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall X\subseteq U$,X 的悲观多粒化决策下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X)$ 与悲观多粒化决策上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X)$ 可分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X)=\{x\in U:\forall a_k\in AT,P(X|[x]_{a_k})\geqslant\alpha^k\},\tag{15}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X)=\{x\in U:\exists a_k\in AT,P(X|[x]_{a_k})>\beta^k\}.\tag{16}$$

与乐观多粒化决策粗糙集的定义相反,悲观多粒化决策下近似集合中的对象必须在所有信息粒上满足要求,而悲观上近似集则要求集合中的对象只要在任一信息粒中满足约束条件即可.

基于悲观多粒化决策粗糙下、上近似集,可得到悲观多粒化决策环境下的正域、边界域和负域如下所示:

$$\mathrm{POS}_{DT}^{P}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X),\tag{17}$$

$$\mathrm{NEG}_{DT}^{P}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X),\tag{18}$$

$$\mathrm{BND}_{DT}^{P}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{DT}^{P}(X).\tag{19}$$

2.2　柔性多粒化决策粗糙集

乐观多粒化决策粗糙集和悲观多粒化决策粗糙集是经典决策理论粗糙集和经典多粒化粗糙集的双重泛化,但从定义可知,乐观多粒化决策下近似与悲观多粒化决策上近似的定义相对宽松;而乐观多粒化决策上近似与悲观多粒化决策下近似的定义则过于严格. 具体而言,在定义 4 中,乐观多粒化决策下近似定义是基于逻辑“或”关系,即一个对象只要在一个粒度上满足相应的条件约束(即 $P(X|[x]_{a_k})\geqslant\alpha^k$),那么该对象就划为乐观多粒化决策下近似中,而对于乐观多粒化决策上近似而言,其定义是基于逻辑“与”关系,也就意味着对象需要满足所有的粒度上的约束要求才被归于其中,这样的限定也过于严格. 为解决这一不足,本文借用特征函数,从满足约束的粒度数目角度考虑设计如下所示的柔性多粒化决策粗糙集.

定义 6　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall X\subseteq U,x\subseteq U$,可定义如下所示的特征函数:

$$f_X^i(x)=\begin{cases}1 & P(X|[x]_{a_k})\geqslant\alpha^k\\0 & \text{otherwise}\end{cases},\tag{20}$$

$$\varphi_X^i(x)=\begin{cases}1 & P(X|[x]_{a_k})>\beta^k\\0 & \text{otherwise}\end{cases}.\tag{21}$$

定义 7　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于 $\forall x\subseteq U$ $f_X^i(x)$ 和 $\varphi_X^i(x)$ 为特征函数,那么对于 $\forall X\subseteq U$,X 的柔性多粒化决策下近似集合 $\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{\delta DT}^{F}(X)$ 与柔性多粒化决策上近似集合 $\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{\delta DT}^{F}(X)$ 可分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{\delta DT}^{F}(X)=\left\{x\in U:\frac{\sum_{i=1}^{m}f_X^i(x)}{m}\geqslant\delta\right\},\tag{22}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}_{\delta DT}^{F}(X)=\left\{x\in U:\frac{\sum_{i=1}^{m}\varphi_X^i(x)}{m}>1-\delta\right\}.\tag{23}$$

式中,$\delta\in(0,1]$.

定义 7 中的[$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)$, $\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)$]则是本文定义的柔性多粒化决策粗糙近似集. 由定义 7 可知论域 U 中的对象被划分到柔性多粒化决策粗糙下近似中当且仅当满足约束条件($\geqslant \alpha^k$)的粒度数不少于 $m\times\delta$. 类似地,论域 U 中的对象被划分到柔性多粒化决策粗糙上近似中当且仅当满足约束条件($>\beta^k$)的粒度数不少于 $m\times(1-\delta)$.

基于柔性多粒化决策粗糙下、上近似集,可得到柔性多粒化决策环境下的正域、边界域和负域如下所示:

$$\mathrm{POS}_{\delta DT}^{F}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X),\tag{24}$$

$$\mathrm{NEG}_{\delta DT}^{F}(X)=U-\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X),\tag{25}$$

$$\mathrm{BND}_{\delta DT}^{F}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)-\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X).\tag{26}$$

定义 8　令 S 为一信息系统,$\delta\in(0,1]$,$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$是由决策属性 D 诱导的划分. 那么基于柔性多粒化决策的近似质量则可定义为:

$$\gamma(\delta,D)=\frac{\sum_{j=1}^{n}|\mathrm{POS}_{\delta DT}^{F}(X_j)|}{|U|}.\tag{27}$$

2.3　相关性质

定理 1　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于$\forall X,Y\subseteq U$,柔性多粒化决策粗糙近似集有以下性质:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(U)=\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(U)=U,\tag{28}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(\varnothing)=\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(\varnothing)=\varnothing,\tag{29}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X\cap Y)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(Y),\tag{30}$$

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X\cup Y)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\cup\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(Y),\tag{31}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X\cap Y)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(Y),\tag{32}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X\cup Y)\supseteq\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(Y).\tag{33}$$

由定理 3 的讨论可以发现,文中新提出的柔性多粒化粗糙集继承了传统多粒化粗糙集模型的相关性质,即下近似的可乘性、下近似的可加性、上近似的可乘性、上近似的可加性.

定理 2　令 S 为一信息系统,假如 $0<\delta_1<\delta_2\leqslant 1$,则对于任意的$\forall X\subseteq U$,可得到如下结论:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta_2 DT}^{F}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta_1 DT}^{F}(X),\tag{34}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta_1 DT}^{F}(X)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta_2 DT}^{F}(X).\tag{35}$$

证　根据定义 6 和 7 易证.

定理 2 表明随着阈值 δ 的单调增加,柔性多粒化下近似集单调减少而柔性多粒化上近似集却单调增加.

定理 3　令 S 为一信息系统,$a_1,a_2,\cdots,a_m\subseteq AT$,对于$\forall X,Y\subseteq U$,则有

$$\delta>0\Rightarrow\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\subseteq\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{DT}^{O}(X),\tag{36}$$

$$\delta>0\Rightarrow\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)\supseteq\overline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{DT}^{O}(X),\tag{37}$$

$$\delta=1\Rightarrow\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{\delta DT}^{F}(X)=\underline{\sum_{i=1}^{m} a_i}_{DT}^{P}(X),\tag{38}$$

$$\delta=1\Rightarrow\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{F}_{\delta DT}(X)=\overline{\sum_{i=1}^{m}a_i}^{P}_{DT}(X). \tag{39}$$

证　根据定义 4、5 和 7 易证.

定理 3 列出了柔性多粒化决策粗糙集与经典多粒化决策粗糙集模型之间的关系. 由定理可发现当 $\delta>0$ 时,柔性多粒化决策粗糙集模型就退化为经典乐观多粒化决策粗糙集模型;而当 $\delta=1$ 时柔性多粒化粗糙集则退化为经典悲观多粒化决策粗糙集模型. 由此可见,柔性多粒化粗糙集是经典多粒化决策粗糙集的进一步泛化.

3　实验分析

本节将通过实验对比分析 3 种多粒化决策粗糙集的近似质量. 本次实验选取了 UCI 数据中的 8 组数据进行分析,具体描述如表 3 所示. 实验运行环境为 Windows 7 和 Matlab R2012b.

表 3　实验数据基本信息

Table 3　Data sets description

序号	数据集	样本个数	属性个数	决策类个数
1	Adult	1 605	14	2
2	Dermatology	366	34	2
3	Page Blocks	5 473	10	2
4	Soybean	307	34	2
5	Movement libras	360	90	2
6	Mushroom	8 124	22	2
7	Wdbc	569	30	4
8	Zoo	101	17	2

在本节实验中,每个数据集中的每个属性被视为一个信息粒,针对每个信息粒随机产生 10 组不同的代价矩阵并同时满足如下条件:$\lambda_{\mathrm{BP}}^{k}<\lambda_{\mathrm{NP}}^{k}$, $\lambda_{\mathrm{BN}}^{k}<\lambda_{\mathrm{PN}}^{k}$, $\lambda_{\mathrm{PP}}^{k}=\lambda_{\mathrm{NN}}^{k}=0$.

表 4　近似质量对比

Table 4　Approximation qualities based on three MGDTRSs

序号	乐观	不同阈值下的柔性多粒化决策粗糙集										悲观
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
1	0.897	0.897	0.897	0.897	0.897	0.897	0.894	0.893	0.888	0.873	0.740	0.740
2	0.803	0.803	0.803	0.803	0.803	0.803	0.801	0.691	0.265	0.034	0	0
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.971	0.781	0.563	0.087	0	0	0
4	0.644	0.644	0.244	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.517	0.517	0.483	0.367	0.087	0.006	0	0	0	0	0	0
6	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794	0.794	0.370	0	0	0
7	0.629	0.629	0.614	0.534	0.486	0.283	0.122	0.033	0.001	0	0	0
8	0.782	0.782	0.782	0.782	0.782	0.777	0.699	0.564	0.241	0.035	0.021	0.021

实验结果如表 4 所示. 在表 4 中分别由 3 种多粒化决策粗糙集模型计算 8 组实验数据集所得到的近似质量. 由于柔性多粒化决策粗糙集由阈值调节,因此在本组实验中分别选取了 10 组不同的 δ 值,并计算在不同 δ 值下的近似质量. 由表 4 的实验质量不难得到如下结论:

(1) 在 3 种粗糙集模型中,乐观多粒化决策粗糙集能够得到最大的近似质量;相反,悲观多粒化决策粗糙集得到的近似质量最小. 当 $\delta=1$ 时本文提出的柔性多粒化粗糙集模型的近似质量与悲观多粒化决策粗糙集的相等,该结论与定理 3 的理论结果是吻合的.

(2) 在柔性多粒化粗糙集模型中,随着阈值的不断增大,所得到的近似质量却越来越小,该结论也与定理 2 的理论结果相吻合.

4　结论

不同形式的粗糙集泛化模型对于粗糙集理论适应不同的实际需求起到了很大的促进作用. 本文将多

粒化思想和贝叶斯决策相结合提出了柔性多粒化决策粗糙集模型,分析了其相关性质,并从理论上和实验上证明出本文提出的柔性多粒化决策粗糙集模型是经典多粒化决策粗糙集模型的进一步泛化,更能满足实际工程的需要. 下一步将进一步研究柔性多粒化决策粗糙集的约简和规则提取工作.

[参考文献]

[1] YAO Y Y,WONG S K M. A decision theoretic framework for approximating concepts[J]. International journal of man-machine studies,1992,37:793-809.

[2] YAO Y Y. The superiority of three-way decisions in probabilistic rough set models[J]. Information sciences,2011,181:1 080-1 096.

[3] JIA X Y,LIAO W H,TANG Z M,et al. Minimum cost attribute reduction in decision-theoretic rough set models[J]. Information sciences,2013,219:151-167.

[4] 鞠恒荣,杨习贝,于化龙,等. 决策粗糙集的属性约简准则研究[J]. 南京师大学报(自然科学版),2015:38(1):41-47.

[5] DOU H L,YANG X B,SONG X N,et al. Decision-theoretic rough set:a multicost strategy[J]. Knowledge-based systems,2016,91:71-83.

[6] JU H R,YANG X B,QI Y,et al. Cost-sensitive rough set approach[J]. Information sciences,2016,355:282-298.

[7] LIANG D C,LIU D. Deriving three-way decisions from intuitionistic fuzzy decision-theoretic rough sets[J]. Information sciences,2015,300:28-48.

[8] LIU D,LIANG D C,WANG C C. A novel three-way decision model based on incomplete information system[J]. Knowledge-based systems,2016,91:32-45.

[9] LI H X,ZHANG L B,HUANG B,et al. Sequential three-way decision and granulation for cost-sensitive face recognition[J]. Knowledge-based systems,2016,91:241-251.

[10] ZHANG H R,MIN F. Three-way recommender systems based on random forests[J]. Knowledge-based systems,2016,91:275-286.

[11] QIAN Y H,LIANG J Y,DANG C Y. Incomplete multigranulation rough set[J]. IEEE transactions on systems,man and cybernetics,Part A,2010,20:420-431.

[12] QIAN Y H,LIANG J Y,YAO Y Y,et al. MGRS:A multi-granulation rough set[J]. Information sciences,2010,180:949-970.

[13] JU H R,YANG X B,SONG X N,et al. Dynamic updating multigranulation fuzzy rough set:approximations and reducts[J]. International journal of machine learning and cybernetics,2014,5(6):981-990.

[14] JU H R,YANG X B,DOU H L,et al. Variable precision multigranulation rough set and attributes reduction[J]. Transactions on rough set XVIII,2014,8 449:52-68.

[15] YANG X B,SONG X N,DOU H L,et al. Multi-granulation rough set:from crisp to fuzzy case[J]. Annals fuzzy mathematics information,2011,1(1):55-70.

[16] QIAN Y H,ZHANG H,SANG Y L,et al. Multigranulation decision-theoretic rough sets[J]. International journal of approximate reasoning,2013,55(1):225-237.

[责任编辑:顾晓天]