

# SSIM 框架下基于 SVD 的灰度图像质量评价算法研究

刘大瑾, 叶建兵, 刘家骏

(南京理工大学泰州科技学院, 江苏 泰州 225300)

[摘要] 图像质量评价算法是图像处理研究中的基本问题. 深入讨论图像奇异值分解的性质及基于结构相似性的图像质量评价框架, 从理论和实验两方面指出两类算法存在错误评价的问题, 并从结构相似的观点出发解释了基于奇异值分解的图像质量评价算法, 提出了改进算法的思路.

[关键词] 图像质量评价, 奇异值分解, 结构相似

[中图分类号] TP391.41 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2017)01-0073-06

## SVD-Based Gray-Scale Image Quality Assessment Algorithms in the SSIM Perspective

Liu Dajin, Ye Jianbing, Liu Jiajun

(Taizhou Institute of Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Taizhou 225300, China)

**Abstract:** Image quality assessment is a fundamental problem in the field of image processing. Singular value decomposition properties for images and structural similarity-based image quality assessment are deeply discussed. According to both the theoretical and empirical analysis, the drawbacks of current two categories of algorithms are pointed out. Image quality assessment algorithms that based on singular value decomposition are explained from the perspective of the structural similarity. In addition, possible improvement strategies for the current methods are also discussed.

**Key words:** image quality assessment, singular value decomposition, structural similarity

图像质量评价算法是图像处理研究中的基本问题. 图像质量评价算法分为两大类, 即主观评价算法和客观评价算法. 主观评价自然最为准确, 因为一幅图像的最终接收者是人类视觉系统. 但是这类算法受到各种主观因素的影响, 设计评价试验又面临过程复杂、代价昂贵的尴尬, 不能有效地整合到图像处理的算法和系统中. 因此, 在实际应用中客观评价算法更为常见, 此类算法依据数学模型给出图像质量的量化指标, 其目的是获得与人类视觉系统相符的评价结果.

矩阵的奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)在图像处理中有着广泛的应用, 近年来也有文献报道了基于 SVD 的图像质量评价方法, 这些算法大致可以分为三类:

第一类算法直接比较失真图像和原始图像奇异值向量之间的距离或夹角, 以此作为图像质量的度量. 例如, Aleksandr 等<sup>[1]</sup>提出可用于图像局部或整体的 SVD 质量评价方法, 该方法将分块图像进行奇异值分解, 通过计算奇异值的绝对距离得到评价数据. 塞森等<sup>[2]</sup>将图像相同分块后进行奇异值分解, 用各个子图像的奇异值向量组合成一个列向量, 计算这两个列向量之间的夹角作为图像的质量评价指标.

第二类算法则利用奇异向量来评价图像质量. 例如, Yang 等<sup>[3]</sup>认为, 当图像块足够小时, 一个秩一矩阵就可以作为原始图像矩阵的近似, 通过分别度量失真图像和原始图像第一对左、右奇异向量之间的夹角, 并选择较大者作为失真图像块的质量评分. Manish Narwaria 等<sup>[4]</sup>利用全部左、右奇异向量之间的夹角, 建立了一个类似的算法.

第三类算法则结合奇异值和奇异向量评价图像质量. 例如, Wang 等<sup>[5]</sup>提出了一种结合奇异值与其向

收稿日期: 2016-08-20.

基金项目: 江苏省高校自然科学研究面上项目(14KJD110004).

通讯联系人: 刘大瑾, 副教授, 研究方向: 应用数学. E-mail: 54819791@qq.com

量的图像质量评价测度. 该算法评分由两项组成, 分别用奇异值和奇异向量度量图像块的亮度失真和结构失真. 奚晓婷等<sup>[6]</sup>也提出了类似的算法.

## 1 结构相似度<sup>[7]</sup>

2004 年, Wang 等<sup>[7]</sup>提出了一个全新的图像质量评价观点: 人眼的主要功能是从视场中提取结构信息, 对图像结构失真的度量可以用来很好地反映图像质量的感知失真. 基于这样的假设, 建立了结构相似度 (Structural Similarity, SSIM) 图像质量评价方法, 并从图像形成的角度给出了 SSIM 的一种实现方法: 图像的结构信息是视场中对象的结构特征, 独立于图像的亮度和对比度. 因此两幅图像相似性比较分为三部分: 亮度比较、对比度比较和结构比较.

设  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  是两幅图像中相同位置处的对应子块, 则亮度比较、对比度比较和结构比较分别用以下 3 个函数表示:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{2m_x m_y + C_1}{m_x^2 + m_y^2 + C_1}, \\ c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{2s_x s_y + C_2}{s_x^2 + s_y^2 + C_2}, \\ s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{s_{xy} + C_3}{s_x s_y + C_3}. \end{aligned}$$

式中,  $m_x, s_x^2, s_{xy}$  分别表示  $\mathbf{x}$  的均值, 方差及  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  的协方差,  $m_x$  和  $s_x$  可视为对  $\mathbf{x}$  的亮度和对比度的估计,  $s_{xy}$  则是度量  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  结构相似性的指标.  $C_1, C_2, C_3$  是常数, 避免分母为零或接近零而造成数值不稳定,  $C_1 = (K_1 L)^2, C_2 = (K_2 L)^2, C_3 = \frac{C_2}{2}$ ,  $L$  是像素范围, ( $L = 2^{\text{bitdepth}} - 1$ ),  $K_1$  和  $K_2$  为远小于 1 的常数. 对应子块  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$  的结构相似度定义为:

$$SSIM(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [l(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^\alpha \cdot [c(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^\beta \cdot [s(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^\gamma.$$

式中,  $\alpha, \beta, \gamma$  是 3 个比较函数的权重参数.

该算法通过一个  $11 \times 11$  的高斯加权窗在两幅图像上逐点计算以该像素点为中心的图像块的均值  $m$ , 方差  $s^2$  及两者的协方差  $s_{xy}$ , 进而计算各像素点所在子块的 SSIM 值, 并映射为 SSIM 索引图. 整幅图像的平均结构相似度 (Mean Structural Similarity, MSSIM) 通过对上述所有子块的 SSIM 值求平均得到 (即求 SSIM 索引图的平均值):

$$MSSIM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N SSIM(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i).$$

但是, 严重模糊的图像结构信息丢失较多, 已有研究证实 SSIM 忽视了图像的边缘信息, 因而不能很好地评价严重模糊的图像. 为了克服这一缺陷, 有报道提出以频域信息作为图像的主要结构信息, 提出了基于频域的结构相似度的图像质量评价方法<sup>[8-10]</sup>. 杨春玲等<sup>[11]</sup>用梯度刻画图像的边缘信息, 提出了基于梯度特征的结构相似度算法 GSSIM. 苗莹等<sup>[12]</sup>提出了联合 GSSIM 和底层特征的图像质量评价算法.

## 2 图像的奇异值分解

**定理 1**<sup>[13]</sup> 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (这里  $\mathbb{R}$  表示实数域, 不失一般性可设  $m \geq n$ ), 则存在  $m$  阶正交矩阵  $\bar{\mathbf{U}}$  和  $n$  阶正交矩阵  $\bar{\mathbf{V}}$ , 使得

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{V}}^T,$$

式中,  $\bar{\mathbf{S}} = (\mathbf{D} \quad \mathbf{0})^T, \mathbf{D} = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n), s_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是按降序顺序排列的奇异值.

若记  $\bar{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m), \bar{\mathbf{V}} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ , 在这些矩阵列分块的记号下, 有如下的定理 2.

**定理 2**<sup>[13]</sup> 设  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则  $\mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_n^T, \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_n^T, \dots, \mathbf{u}_m \mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{u}_m \mathbf{v}_n^T$  是矩阵空间  $\mathbf{A}^{m \times n}$  的一组最大线性无关组矩阵, 即矩阵空间  $\mathbf{A}^{m \times n}$  的基底矩阵.

该定理表明, 若将一幅数字图像认为是一个  $m \times n$  的实矩阵, 则其结构取决于矩阵空间  $\mathbf{A}^{m \times n}$  的基底.

若用 Frobenius 范数的平方表示图像的能量,则由矩阵奇异值分解可得如下定理 3.

$$\text{定理 3}^{[5]} \quad \|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \text{tr}(A^T A) = \text{tr}(VSU^T USV^T) = \sum_{i=1}^r s_i^2.$$

该定理表明,奇异值刻画了图像的能量(亮度信息).

由上述分析,得到图像在奇异值分解下的一些结论:

(1) 图像的奇异值分解可视为图像在矩阵空间  $A^{m \times n}$  的基底下的展开. 这些基底矩阵称为特征图像,表征图像的结构信息;展开系数就是(非零)奇异值,表征图像的亮度信息.

(2) 在给定矩阵空间  $A^{m \times n}$  的基底矩阵时,图像的奇异值包含了一定的信息,可以反映出一幅图像不同版本之间的亮度差异.

但是,奇异值与图像之间不存在一一对应关系,视觉感知完全不同的图像可能具有相同的奇异值. 同时,直接度量不在同一基底下的两个奇异值向量之间的距离或夹角在数学上也是没有任何意义的<sup>[13]</sup>. 这表明仅仅依赖奇异值的质量评价算法存在与人眼主观视觉感知不一致的可能.

(3) 图像的奇异值分解都在不同的基底上进行,这种展开是图像自适应的. 对于两幅不同图像,不存在共同的基底矩阵<sup>[13]</sup>. 换言之,奇异值分解得到的两个正交矩阵对扰(图像失真)敏感. 因此,一幅图像不同版本之间结构信息的差异将反映在正交矩阵上,即正交矩阵为刻画结构信息的变化提供了一种途径.

但是,若把一幅图像的奇异值按升序排列,而对应的左右正交矩阵不变,重构后的图像会发生显著变化<sup>[13]</sup>. 这表明仅仅依赖两个正交矩阵的质量评价算法也同样存在与人眼主观视觉感知不一致的可能.

### 3 SSIM 观点下的 SVD 质量评价算法及改进

#### 3.1 SVD 质量评价算法的 SSIM 解释

基于 SSIM 的图像评价方法的重要意义在于其建立了一种全新的图像质量评价框架,该框架通过度量结构信息失真来衡量感知失真. 同时,对结构信息不同认识和对结构信息失真的不同度量方法使得 SSIM 框架有着不同的实现方式<sup>[10]</sup>.

图像的奇异值分解很好地实现了图像的结构信息和亮度信息的分离,可以有效地分离不同因素(亮度、对比度和结构)对视觉感知质量的影响. 根据图像奇异值分解的结论,用 SSIM 的观点来解释前述三类基于 SVD 的图像质量评价算法:

第一类算法仅考虑了亮度失真,第二类算法仅考虑了主要结构信息失真. 受到基于 SVD 的人脸识别及图像水印算法研究的启示<sup>[13-15]</sup>,依据图像奇异值分解的固有特性,这两类算法都存在错误评分的可能,即算法评分与人眼主观视觉感知不一致. 虽然两类算法在大量图像上测试的性能较好,但是在某些实际应用中会存在问题(见实验部分).

第三类算法中,图像亮度解释为奇异值向量,图像结构信息可以解释为奇异值分解后的矩阵空间的基底. 相比于以频域信息作为图像的主要结构信息来改进 SSIM 算法,用奇异值分解后矩阵空间的基底来描述图像的结构信息也是一种改进.

设  $X, Y$  是原始图像和失真图像中相同位置处的对应子块,两者分别进行奇异值分解:

$$X = USV^T, Y = U'S'V'^T,$$

记

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2, \dots, u_r), V = (v_1, v_2, \dots, v_r), S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_r), \\ U' &= (u'_1, u'_2, \dots, u'_r), V' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_r), S' = \text{diag}(s'_1, s'_2, \dots, s'_r), \\ C_i &= u_i v_i^T, C'_i = u'_i v'^T_i, r = \text{rank}(X), \gamma_i = u_i^T u'_i + v_i^T v'_i, \gamma_{oi} = u_i^T u'_i + v_i^T v'_i, \end{aligned}$$

Wang 等<sup>[5]</sup>对原始图像和失真图像亮度失真、结构信息失真的度量分别为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^r (s_i - s'_i)^2}, \sqrt{\sum_{i=1}^r \left[ \frac{1}{2} (\gamma_{oi} - \gamma_i) \right]^2}.$$

奚晓婷等<sup>[6]</sup>对原始图像和失真图像亮度失真、结构信息失真的度量分别为

$$\frac{2s_i s'_i + \delta_1}{s_i^2 + s'^2_i + \delta_1}, \frac{\sum_j \sum_k C_{ijk} \cdot C'_{ijk} + \delta_2}{\|C_i\|_F \cdot \|C'_i\|_F + \delta_2}.$$

在这两种算法中,前者是计算奇异值向量及结构信息之间的绝对误差;后者的亮度失真度量则符合韦伯定律,结构信息失真的度量实质是计算  $C_i$  和  $C'_i$  的夹角. 稍后将分析指出这些做法的不足,并讨论改进算法的策略.

3.2 改进策略

按 SSIM 的框架,图像的结构信息是视场中对象的结构,独立于亮度和对比度,两幅图像相似性分为亮度比较、对比度比较和结构比较. 第三类算法用奇异值和奇异向量分别度量亮度失真和结构失真,缺少一项对比度比较函数,需要寻找一个用奇异值向量计算对比度比较的函数.

不同类型的图像失真对奇异值分解下的基底矩阵(图像的结构信息)的影响是不同的<sup>[6]</sup>. 第三类算法在度量图像的结构信息失真时直接计算绝对误差或夹角,实质上将结构信息完全等同对待,没有将边缘等高频信息与平滑区域区别开来,需要建立新的方法度量奇异值分解下的结构信息的失真.

同时,由于奇异值的相对大小关系,每个奇异向量对  $u_i v_i^T$  (特征图像)对图像结构信息的贡献大小不一,需要用权重因子(例如  $\frac{s_i}{\sum_{i=1}^r s_i}$ )加以调节.

4 实验结果与分析

4.1 奇异值分解与图像结构

图像奇异值分解得到的一系列特征图像表征图像的结构信息. 以标准测试图像“lena”(256×256)为例,记

$$SI = \sum_{i=1}^t u_i v_i^T,$$

分别取  $t=64, t=128, t=256$ , 得到图像的结构信息(SI), 见图 1.

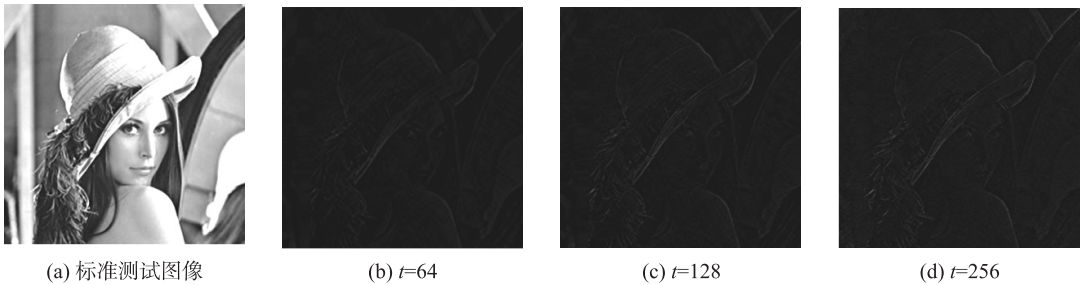


图 1  $t$  取不同值时的结构信息  
Fig. 1 Structural information for different values of  $t$

每个特征图像表征一个特定层次上图像的结构信息,图 2 表明图像的奇异值具有快速衰减的特性,较大奇异值对应的奇异向量对  $u_i v_i^T$  累积即表征了图像的主要结构,剩余的奇异向量对  $u_i v_i^T$  表征图像中的较精细的结构,所有层次上信息的总和则表征完整的图像结构,因此每个奇异向量对  $u_i v_i^T$  对结构信息的贡献大小不一. 文献[16]认为剔除奇异值向量后,图像的结构信息几乎完全被屏蔽,奇异值向量包含图像的绝大部分结构信息,这种解释不够合理. 事实上,图 1 已经表明特征图像的累积体现了边缘和平滑区域等图像的结构信息.

4.2 两类算法的不足

用“lena”图像  $I_1$ (图 3(a))的奇异值和“couple”图像  $I_2$ (图 3(b))的两个正交矩阵合成了一幅图像  $I_3$

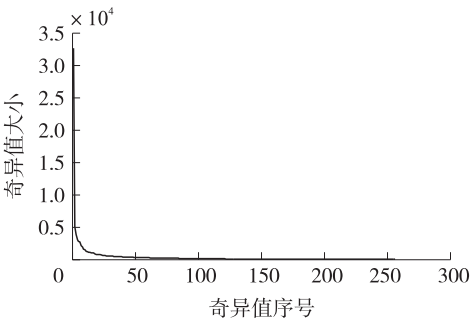


图 2 图像的奇异值大小呈现快速衰减的特性  
Fig. 2 The singular values of the image decay very fast



(图 3(c)). 图 3(d)中的  $S_3$  是将  $S_1$  对角线上的元素按升序排列的矩阵,仍用“lena”图像  $I_1$  的两个正交矩阵合成图像  $I_4$ .

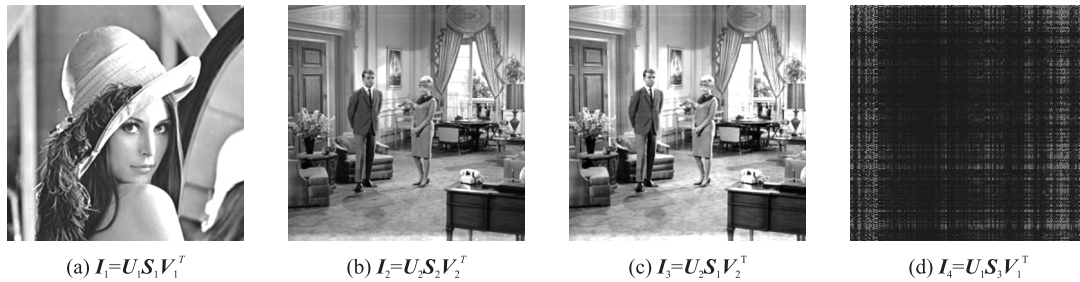


图 3 参考图像与合成图像

Fig. 3 The reference images and the synthetic images

表 1 给出了不同算法对  $I_3$  图像的评分.“couple”图像  $I_2$  和合成图像  $I_3$  在视觉感知上非常相似,PSNR 和 SSIM 对  $I_3$  的评分均较高.但是  $I_2$  和  $I_3$  的奇异值完全不同,若将“couple”图像  $I_2$  视为参考图像,仅依赖奇异值的客观图像质量评价算法会给合成图像  $I_3$  较低的评分(理论上认为  $I_2$  和  $I_3$  完全不同),这显然不符合人眼的主观视觉感知,表明仅依赖奇异值的质量评价算法<sup>[1-2]</sup>存在评价错误.

表 2 给出了不同算法对  $I_4$  图像的评分.“lena”图像  $I_1$  与合成图像  $I_4$  的视觉质量完全不同,PSNR 和 SSIM 对  $I_4$  的评分均很低.但是  $I_1$  和  $I_4$  具有相同的正交矩阵,仅依赖正交矩阵的客观图像质量评价算法理论上认为合成图像  $I_4$  和参考图像  $I_1$  完全相同,这显然也与人眼的主观视觉感知相矛盾,表明仅依赖正交矩阵的评价算法<sup>[3-4]</sup>同样存在评价错误的问题.

表 1 不同算法对  $I_3$  图像的感知与评分

Table 1 Perception and scoring for image  $I_3$  of different algorithms

文献[1-2]	主观视觉感知	PSNR	SSIM
完全不同(理论)	非常相似	34.132 3	0.987 6

表 2 不同算法对  $I_4$  图像的感知与评分

Table 2 Perception and scoring for image  $I_4$  of different algorithms

文献[3-4]	主观视觉感知	PSNR	SSIM
完全相同(理论)	完全不同	6.7564	0.0211

#### 4.3 文献[5-6]算法的示例

图 4 依次是原始图像、高斯模糊失真图像、白噪声污染图像,图像均来自美国德州大学奥斯汀分校(University of Texas at Austin)图像和视频工程实验室 LIVE 数据库的第二版<sup>[17]</sup>.实验时将彩色图像用 Matlab 软件中的“rgb2gray”函数转化为灰度图像. PSNR、SSIM 和文献[6]算法评分的值越大,文献[5]算法评分的值越小,则图像的感知质量越好.

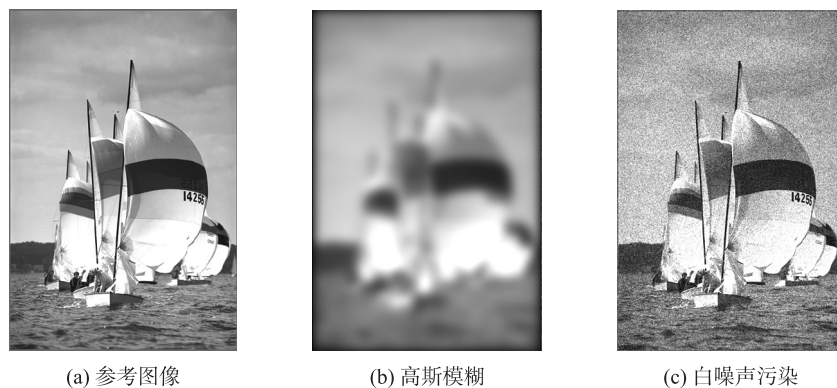


图 4 LIVE 数据库(第二版)测试图像

Fig. 4 Test images from LIVE database(release 2)

图 4 中白噪声污染图像的感知质量明显优于高斯模糊失真图像,但是表 3 中的数据表明 SSIM 的评分与主观感知相反,文献[5-6]的算法则较好地符合了主观感知,这表明用奇异值分解后矩阵空间的基底来描述图像的结果信息是有效的.

表 3 不同算法的感知与评分

Table 3 Perception and scoring of different algorithms

	主观视觉感知	PSNR	SSIM	文献[5]	文献[6]
高斯模糊失真	视觉感知较差	20.7930	0.6381	189.7832	0.1318
白噪声污染	视觉感知较好	21.1260	0.5548	61.3547	0.1591

5 结语

本文深入分析了图像在奇异值分解下的性质,及基于结构相似度 SSIM 的图像质量评价框架的内涵.在此基础上结合理论分析和实验结果认为两类基于 SVD 的图像质量评价算法存在错误评分的可能,导致客观评分与主观感知不一致.用 SSIM 框架的观点解释了基于 SVD 的图像质量评价算法,分析了算法的实质,并讨论了现有算法可能的改进方法.

[参考文献]

[1] SHNAYDERMAN A,GUSEV A,ESKICIOGLU A M. An SVD-based grayscale image quality measure for local and global assessment[J]. IEEE transactions on image processing,2006,15(2):422-429.

[2] 骞森,朱剑英. 基于奇异值分解的图像质量评价[J]. 东南大学学报(自然科学版),2006,36(4):643-646.

[3] YANG C A,KAVEH M. Image quality assessment using singular vectors[C]//Proceedings of SPIE 7529. California:International Society for Optics and Photonics,2010.

[4] NARWARIA M,LIN W. Scalable image quality assessment based on structural vectors[C]//Proceedings of IEEE International Workshop on Multimedia Signal Processing. Reo De Janeiro:IEEE,2009.

[5] WANG R,CUI Y,YUAN Y. Image quality assessment using full-parameter singular value decomposition[J]. Optical engineering,2011,50(5):057005.

[6] 奚晓婷,张建秋. 一种奇异值与其向量联合评估图像质量的测度[J]. 复旦学报(自然科学版),2012,51(1):83-90.

[7] WANG Z,BOVIK A C,SHEIKH H R,et al. Image quality assessment:from error visibility to structural similarity[J]. IEEE transactions on image processing,2004,13(4):600-612.

[8] 李航,路羊,崔慧娟,等. 基于频域的结构相似度的图像质量评价方法[J]. 清华大学学报(自然科学版),2009,49(4):559-562.

[9] 吕丹,毕笃彦. 基于结构相似的 DCT 域图像质量评价[J]. 吉林大学学报(工学版),2011,41(6):1 771-1 776.

[10] 叶盛楠,苏开娜,肖创柏,等. 基于结构信息提取的图像质量评价[J]. 电子学报,2008,36(5):856-861.

[11] 杨春玲,陈冠豪,谢胜利. 基于梯度信息的图像质量评判方法的研究[J]. 电子学报,2007,35(7):1 313-1 317.

[12] 苗莹,易三莉,贺建峰,等. 结合梯度信息的特征相似性图像质量评估[J]. 中国图象图形学报,2015,20(6):749-755.

[13] 高全学,梁彦,潘泉,等. SVD 用于人脸识别存在的问题及解决方法[J]. 中国图象图形学报,2006,11(12):1 784-1 791.

[14] XIAO L,WEI Z,YE J. Comments on“Robust embedding of visual watermarks using discrete wavelet transform and singular value decomposition”and theoretical analysis[J]. Journal of electronic imaging,2008,17(4):040501.

[15] 肖亮,叶建兵,韦志辉. 一类基于 SVD 的数字水印虚警分析与改进算法[J]. 南京理工大学学报(自然科学版),2010,34(2):227-231.

[16] 张飞艳,谢伟,陈荣元,等. 基于视觉加权的奇异值分解压缩图像质量评价测度[J]. 电子与信息学报,2010,32(5):1 061-1 065.

[17] SHEIKH H R,WANG Z,CORMACK L,et al. LIVE image quality assessment database release 2[DB/OL]. [2015-03-15]. <http://live.ece.utexas.edu/research/quality>.

[责任编辑:黄 敏]