doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.02.001

对称三对角 Toeplitz 矩阵的条件数估计

杨兴东,丁三芹,刘诗卉,苏润青

(南京信息工程大学数学与统计学院,江苏 南京 210044)

[**摘要**] 三对角 Toeplitz 矩阵在三次样条插值、三项差分方程、并行计算以及电信控制分析与热传导方程等学科有着重要的应用. 目前,关于三对角 Toeplitz 矩阵的研究在国内外十分活跃. 本文则研究对称三对角 Toeplitz 矩阵范数条件数,给出对称三对角 Toeplitz 矩阵的 2-范数以及 F-范数的估计式,同时给出数值例子.

[**关键词**] 对称三对角 Toeplitz 矩阵,条件数,估计,2-范数,F-范数

[**中图分类号**]O151.21 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2017)02-0001-06

The Estimate for the Condition Numbers of a Symmetry Tridiagonal Toeplitz Matrix

Yang Xingdong,Ding Sanqin,Liu Shihui,Su Runqing

(College of Mathematics and Statistics,Nanjing University of Information of Science and Technology,Nanjing 210044,China)

Abstract:In this paper,we studied the norm condition number of symmetry tridiagonal Toeplitz matrix. Then it gives the estimate for 2-norm and Frobenius norm of a symmetry tridiagonal Toeplitz matrix,as well as a numerical example. Tridiagonal Toeplitz matrix which possesses potential practical significance in other applied fields,for example,subjects of cubic spline interpolation,three differential equations,parallel computing,analysis of telecommunication control,heat conduction equationsand so on.

Key words:symmetry tridiagonal Toeplitz matrix,condition number,estimate,2-norm,Frobenius norm

设 $a,b\in\mathbf{R}$,则 n 阶实对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

称为对称三对角 Toeplitz 矩阵. 三对角 Toeplitz 矩阵在三次样条插值、三项差分方程、并行计算等数学领域以及电信控制分析、热传导方程等物理领域都有着重要应用[1-5]. 近年来,中外学者对三对角 Toeplitz 矩阵的研究十分活跃[1-10]. 文献[1-5]研究了三对角 Toeplitz 矩阵逆的表示方法. 文献[11-12]研究了次对角线为零的二对角 Toeplitz 矩阵的条件数估计.

本文中,$\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位矩阵,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量集,$\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示实数域上 $m\times n$ 矩阵集. $|\lambda_1(\boldsymbol{A})|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(\boldsymbol{A})|$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 之模的递降排序.

$\sigma_i(\boldsymbol{A})(i=1,\cdots,n)$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值,$\sigma_1(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值的降次排序. 显然,如果 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,则 $\sigma_1(\boldsymbol{A})=|\lambda_1(\boldsymbol{A})|$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,则记号 $\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数,简记为 F-范数,其中 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹. $\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\lambda_1(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}=\sigma_1(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的普范数,又称为 2-范数.

收稿日期:2016-05-16.

基金项目:国家自然科学青年基金(4096048)、江苏省青年科学基金(BK20130985).

通讯联系人:杨兴东,教授,研究方向:数值代数. E-mail:xdyangnuist@163.com

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\|\cdot\|$ 为向量范数,则由向量范数诱导的矩阵范数

$$\|\boldsymbol{A}\|=\max_{\|x\|\neq 0,x\in\mathbf{R}}\frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}=\max_{\|x\|=1,x\in\mathbf{R}}\|\boldsymbol{Ax}\|.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的条件数定义为

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|\Delta A\|\leqslant\varepsilon\|A\|}\frac{\|(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\|}{\varepsilon\|\boldsymbol{A}^{-1}\|}.$$

众所周知[1-10],当矩阵范数为向量诱导范数时,

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{A}^{-1}\|.\tag{2}$$

显然谱范数为诱导矩阵范数,因而

$$\operatorname{cond}_2(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2.$$

然而,Frobenius 范数不是诱导范数. 一般地

$$\operatorname{cond}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{A})\neq\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathrm{F}}.$$

其反例见文献[9]. 早在 1995 年,Desmond J Hisham 获得 Frobenius 范数条件数计算公式如下

$$\operatorname{cond}_{\mathrm{F}}(\boldsymbol{A})=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|\Delta A\|_{\mathrm{F}}\leqslant\varepsilon\|A\|_{\mathrm{F}}}\frac{\|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})-\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathrm{F}}}{\varepsilon\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathrm{F}}}=\frac{\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2^2}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_{\mathrm{F}}}.\tag{3}$$

本文研究对称三对角 Toeplitz 矩阵 2-范数以及 Frobenius 范数条件数,给出式(2)与式(3)的估计,使之计算更加简洁方便.

为了得到 Toeplitz 矩阵条件数估计,我们需要若干引理.

1　有关引理

引理 1[7]　设 n 阶对称三对角 Toeplitz 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如(1)所示,$\lambda_i(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则

$$\lambda_i(\boldsymbol{A})=a+2b\cos\frac{i\pi}{n+1}(1\leqslant i\leqslant n).$$

说明:当 $n\to\infty$ 时,$|\lambda_i(\boldsymbol{A})|=\left|a+2b\cos\frac{i\pi}{n+1}\right|\to|a+2b|\quad(i=1,\cdots,n)$,因此,当$\frac{|a|}{2|b|}>1$,即$|a|>2|b|$时,$\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵,从而它是非奇异的.

引理 2[8]　设 $\boldsymbol{A}$ 如引理 1 所设,当$\frac{|a|}{2|b|}>1$ 时,记 $\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$,则

$$b_{ij}=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{ik\pi}{n+1}\sin\frac{jk\pi}{n+1}}{a+2b\cos\frac{k\pi}{n+1}}(1\leqslant i,j\leqslant n).$$

引理 3[10]　设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,$\|\cdot\|$ 为诱导矩阵范数,$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵,且 $\|\boldsymbol{A}\|<1$. 则

$$\frac{1}{1+\|\boldsymbol{A}\|}\leqslant\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-1})\|\leqslant\frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|}.$$

引理 4[11]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称矩阵,则

$$\|\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

2　2-范数条件估计

定理 1　设对称三对角 Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b&0&\cdots&0\\ b&a&b&\ddots&\vdots\\ 0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&b&a&b\\ 0&\cdots&0&b&a\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n},$$

并且$\frac{|a|}{2|b|}>1$,则

$$\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant \mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{2\left(|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}\right)}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{jk\pi}{n+1}\right|}{\left|a+2b\cos\frac{k\pi}{n+1}\right|}. \tag{4}$$

证 由引理 1,$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_k(\boldsymbol{A})=a+2b\cos\frac{k\pi}{n+1}$,设

$$|\lambda_1(\boldsymbol{A})|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(\boldsymbol{A})|,$$

则

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=|\lambda_1(\boldsymbol{A})|=|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_k=(t_{1k}\quad\cdots\quad t_{nk})^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 $\lambda_k(\boldsymbol{A})$ 的特征向量,并设

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n)$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,且 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{A}),\cdots,\lambda_n(\boldsymbol{A}))$.

由于$\frac{|a|}{2|b|}>1$ 以及由引理 1 可知 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}=(b_{ij})$,由引理 2 及引理 4 得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|b_{ij}|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{ik\pi}{n+1}\right|\left|\sin\frac{jk\pi}{n+1}\right|}{\left|a+2b\cos\frac{k\pi}{n+1}\right|}\leqslant\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left|\sin\frac{jk\pi}{n+1}\right|}{\left|a+2b\cos\frac{k\pi}{n+1}\right|}. \tag{5}$$

另一方面,记 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_n$($\boldsymbol{e}_i$ 表示 n 阶单位矩阵的第 i 列),则 $\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\sqrt{2}$. 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=a(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_n)+b(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_{n-1})\triangleq\boldsymbol{\beta}. \tag{6}$$

显然

$$a(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_n)\perp b(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_{n-1}),$$

故由勾股定理[12]

$$\|\boldsymbol{\beta}\|_2=\sqrt{\|a(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_n)\|_2^2+\|b(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_{n-1})\|}=\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

由式(6)

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta},$$

故

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_2=\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\|\boldsymbol{\beta}\|_2,\quad \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2\geqslant\frac{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2}{\|\boldsymbol{\beta}\|_2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{7}$$

故由式(2)与式(5)以及式(7)即得式(4). 证毕.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 以及实数 a 与 b 如定理 1 所设,且

$$|1-a|+2|b|\left|\cos\frac{\pi}{n+1}\right|<1,$$

则

$$\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}\leqslant\mathrm{cond}_2(A)\leqslant\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{1-|1-a|-2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}. \tag{8}$$

证 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$ 且

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1-a & -b & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -b & 1-a & -b & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & -b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -b & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & -b & 1-a & -b\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -b & 1-a\end{pmatrix}.$$

由引理 1,$\boldsymbol{B}$ 的特征值为

$$\lambda_k(\boldsymbol{B})=1-a-2b\cos\frac{k\pi}{n+1}\ (1\leqslant k\leqslant n),$$

于是

$$\|\boldsymbol{B}\|_2=|\lambda_k(\boldsymbol{B})|=|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}<1.$$

故由引理 3 得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|_2\leqslant\frac{1}{1-\|\boldsymbol{B}\|_2}=\frac{1}{1-|1-a|-2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}},\tag{9}$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_2=\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})^{-1}\|_2\geqslant\frac{1}{1+\|\boldsymbol{B}\|_2}=\frac{1}{1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}.\tag{10}$$

由式(2)以及式(9)、式(10)即可得证. 证毕.

注 1　在定理 2 假设之下,当 $a^2+b^2\leqslant 1$ 时,则

$$1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}\geqslant 1\geqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

从而

$$\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}\leqslant\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

这时应用式(4)的估计条件数 $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$ 的下界较应用式(8)估计更精确.

当 $|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ 时,如果 $a\geqslant 1$ 则

$$1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}=a+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}.$$

于是有

$$\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant 1=\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{1+|1-a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}.$$

这时应用式(8)估计条件数 $\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})$ 的下界较应用式(4)估计更精确.

注 2　当 $1-a\geqslant 0$ 时,式(8)为

$$\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{2-a+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}\leqslant\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{|a|+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}}{a-2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}},$$

当 $1-a<0$ 时,式(8)为

$$1 \leqslant \mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) \leqslant \frac{|a|+2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}}{2-a-2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}}.$$

3 F-范数条件数估计

定理 3 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 以及实数 a 与 b 如定理 1 所设,则

$$\frac{\sqrt{na^2+2(n-1)b^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}} \leqslant \mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A}) \leqslant \frac{4}{(n+1)^2}\times$$

$$\frac{\sqrt{na^2+2(n-1)b^2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\left|\sin\dfrac{jk\pi}{n+1}\right|}{a+2b\cos\dfrac{k\pi}{n+1}}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}}. \tag{11}$$

证 显然,由 $\boldsymbol{A}$ 的结构以及 F-范数的性质, $\|\boldsymbol{A}\|_F=\sqrt{na^2+2(n-1)b^2}$.
设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_i(\boldsymbol{A})(1\leqslant i\leqslant n)$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值为

$$\lambda_i^{-1}(\boldsymbol{A})=\frac{1}{a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}} \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Q}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}(\boldsymbol{A}),\cdots,\lambda_n^{-1}(\boldsymbol{A}))\triangleq\boldsymbol{\Lambda},$$

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_F=\{\mathrm{tr}[(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1}]\}^{1/2}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-2})]^{1/2}=\{\mathrm{tr}[\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}]\}^{1/2}=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Lambda}^2)]^{1/2}=$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)^{-2}\right]^{1/2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}}.$$

由式(3)、式(5)以及式(9)即得式(11). 证毕.

定理 4 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 以及实数 a 与 b 如定理 2 所设,则

$$\frac{1}{\left(1+|1-a|+2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}} \leqslant \mathrm{cond}_F(A) \leqslant$$

$$\frac{1}{\left(1-|1-a|-2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}}. \tag{12}$$

证 由定理 3 的证明以及式(3)、式(9)以及式(10)即得所证. 证毕.

注 3 当 $1-a\geqslant 0$ 时式(12)为

$$\frac{1}{\left(2-a+2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}} \leqslant \mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A}) \leqslant$$

$$\frac{1}{\left(a-2|b|\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\dfrac{i\pi}{n+1}\right)^2}}.$$

当 $1-a\leqslant 0$ 时式(12)为

$$\frac{1}{\left(a+2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)^2}}\leqslant \mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A})\leqslant$$
$$\frac{1}{\left(2-a-2|b|\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^2}\sqrt{\frac{na^2+2(n-1)b^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(a+2b\cos\frac{i\pi}{n+1}\right)^2}}.$$

4　数值例子

例　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&0&0&0&0\\1&4&1&0&0&0\\0&1&4&1&0&0\\0&0&1&4&1&0\\0&0&0&1&4&1\\0&0&0&0&1&4\end{pmatrix}$,则 $\frac{|a|}{2|b|}=2>1$.

利用 MATLAB 计算得,

$$\lambda_1(\boldsymbol{A})=5.801\,9,\lambda_2(\boldsymbol{A})=5.247\,0,\lambda_3(\boldsymbol{A})=3.550\,0,$$
$$\lambda_4(\boldsymbol{A})=2.753\,0,\lambda_5(\boldsymbol{A})=2.753\,0,\lambda_6(\boldsymbol{A})=2.198\,1.$$

由定理1,得

$$1.407\,2<\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A})<12.755\,3.$$

由定理3,得

$$0.828\,2<\mathrm{cond}_F(\boldsymbol{A})<62.820\,7.$$

[参考文献]

[1] JITENG J,TOMOHIRO S. Moawwad El-Mikkawy inversion of K-trdiagonal matrices with toeplitz structure[J]. Computers and matlewatics with applications,2013,65:116-125.

[2] DEMMEL J W. Numerical linear algebra[J]. Philadelphia:SIAM,1997:307-320.

[3] EL-MIKKAWY M E A. A generalized symbolic homas algorithm[J]. Appl Math,2012(3):342-345.

[4] FISCHER C F,USMANI R A. Properties of some tridiagonal matrices and their application to boundary value problems[J]. SIAM J Mumer Anal,1969,6(1):127-142.

[5] WITTENBURG J. Inverses of tridiagonal toeplitz and periodic matrices with applications to mechanics[J]. J Appl Math Mech,1998,62(4):575-587.

[6] YAMAMOTO T. Inversion formulas for tridiagonal matrices with applications to boundary value problems[J]. Numer Funct Anal Optim,2001,22:357-385.

[7] MEYER C D. Matrix analysis and applied linear algebra[J]. Philadelphia:SIAM,2000:279-307.

[8] SALKUYEH D K. Positive integer powers of the tridiagonal toeplitz matrix[J]. Lnt Math Forum,2006,22:1 061-1 065.

[9] DESMOND J H. Condition numbers and their conditions numbers[J]. Linear algebra and its applications,1995(214):193-213.

[10] ROGER A H,CHARLES R J. Toeplitz in matrix analysis[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1991:290-310.

[11] FANG Q. A note on the condition number of a matrix[J]. Journal of compatational and applied mathematics,2003(157):231-234.

[12] DING Z Y,YANG X D,CHEN C,et al. The estimations for the norm condition number of a matrix[J]. Mathematica applicata,2014,27(4):874-879.

[责任编辑:陆炳新]