doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.02.003

网的 S-收敛理论

徐振国

(国家科技基础条件平台中心,北京 100862)

[摘要]　借助半闭 L-集引入半闭远域、S-附着点、S-极限点、S-聚点的概念. 证明了网 N 的所有 S-极限点的并 $\lim_s N$ 和所有 S-聚点的并 $\mathrm{ad}_s N$ 均是半闭 L-集,网 N 的 S-极限点一定是它子网 T 的 S-极限点,网 N 的 S-极限点和 S-聚点在不定映射之下是保持的.

[关键词]　L-拓扑空间,半闭远域集,S-附着点,S-极限点,S-聚点,S-收敛

[中图分类号]O189.2　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2017)02-0012-04

S-Convergence Theory of Nets

Xu Zhenguo

(National Science and Technology Infrastructure Center,Beijing 100862,China)

Abstract: In this paper, semiclosed remote set, S-adherence point, S-limit point, S-cluster point are built by means of the concept of semiclosed L-sets. We proved that unions of all S-limit points of net N and unions of all S-cluster points of net N are semiclosed L-set, respectively; S-limit point of net N is S-limit points of it subnet T; under irresolute mapping S-limit point and S-cluster point of net N are hold.

Key words: L-topological space, semiclosed remote set, S-adherence point, S-limit point, S-cluster point, S-convergence

1　引言和预备

收敛理论不仅在拓扑和分析方面有重要的应用,同样,在推理和其它学科方面也有重要的应用.

在文献[1]中,作者在 I-拓扑中引入了具有开创性的重域概念,由此确立了完整的网的 Moore-Smith 收敛理论. 王国俊教授借助于分子的闭远域将这一理论推广到 L-拓扑中(见文献[2]). 随后又出现了多种收敛理论(见文献[3-7]),在文献[8]中,作者引入了半开 L-集、半闭 L-集和半连续映射的概念.

这篇文章,我们基于[2]的思想,借助于文献[8]中的半闭 L-集,引入半闭远域,确立网的 S-收敛理论.

整篇文章,$(L,\vee,\wedge,')$ 是完全分配的 de Morgan 代数,X 是非空集. L^X 是 X 上所有 L-fuzzy 集之集(简记为 L-集). L^X 中最小元和最大元分别记为 $\underline{0}$,$\underline{1}$.

L 中元素 a 称为素元,如果 $a\geqslant b\wedge c$ 意味着 $a\geqslant b$ 或 $a\geqslant c$. L 中元素 a 称为余素元,如果 a' 是素元(见文献[9]). L 中非零素元之集记为 $P(L)$,L 中非零余素元之集记为 $M(L)$. L^X 中非零余素元之集记为 $M(L^X)$,$M(L^X)$ 中每个元素称为点.

L-拓扑空间(简记为 L-空间)是偶对 (X,τ),这里 τ 是 L^X 的子族,这个子族包含 $\underline{0}$,$\underline{1}$,并且对有限交和任意并是封闭的. τ 称为 X 上的 L-拓扑,τ 中每个元称为开 L-集,它的补称为闭 L-集.

定义 1([8])　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$A\in L^X$. 则

(1)A 称为半开 L-集当且仅当 $A\leqslant cl(\mathrm{int}(A))$;

(2)A 称为半闭 L-集当且仅当 $\mathrm{int}(cl(A))\leqslant A$.

收稿日期:2017-02-16.

基金项目:国家自然科学基金(M1551001).

通讯联系人:徐振国,博士,副研究员,研究方向:模糊数学. E-mail:zhenguoxu@126.com

L^X 中所有半开 L-集之集和所有半闭 L-集之集记作 $SO(X)$ 和 $SC(X)$.

定义 2([8])　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$A\in L^X$. 则

(1)$scl(A)=\wedge\{B|B\geqslant A,B$ 是半闭 L-集$\}$;

(2)$sint(A)=\vee\{B|B\leqslant A,B$ 是半开 L-集$\}$.

定义 3([8])　令 (X,τ_1),(X,τ_2) 是两个 L-拓扑空间,则 f 称为不定映射,如果对每个 $B\in SO(Y)$,$f_L^{\leftarrow}(B)\in SO(X)$.

定义 4([2])　设 D 是定向集,X 是非空集,则称映射 $N:D\to X$ 为 X 中的网.

定义 5([2])　令 $N:D\to X$ 为 X 中的网,P 是针对 X 中的点而言的某个性质,如果存在 $n_0\in D$ 使得当 $n\in D$ 且 $n\geqslant n_0$ 时 $N(n)$ 具有性质 P,则称网 N 最终具有性质 P. 如果 $\forall n_0\in D$,存在 $n\in D,n\geqslant n_0$,使得 $N(n)$ 具有性质 P,则称网 N 经常具有性质 P.

2　网的 S-收敛

定义 6　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$x_\lambda\in M(L^X)$,$P\in L^X$. P 称为 x_λ 的远域集,如果 $x_\lambda\not\leqslant P$. 如果 P 是半闭 L-集,则 P 称为 x_λ 的半闭远域集. x_λ 的所有的半闭远域集之集记为 $\eta_s(x_\lambda)$.

定义 7　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$G\in L^X$ 且 $x_\lambda\in M(L^X)$. x_λ 称为 G 的 S-附着点,如果对每个 $P\in\eta_s(x_\lambda)$,$G\not\leqslant P$.

定理 1　(X,τ) 是 L-拓扑空间,$G\in L^X$ 且 $x_\lambda\in M(L^X)$,则

(1)x_λ 是 G 的 S-附着点当且仅当 $x_\lambda\leqslant scl(G)$;

(2)$scl(G)$ 等于 G 的所有 S-附着点的并.

证明　(1)($\Rightarrow$). 假设 $x_\lambda\not\leqslant scl(G)$,则 $scl(G)\in\eta_s(x_\lambda)$,由 $G\leqslant scl(G)$ 可知,x_λ 不是 G 的 S-附着点,矛盾.

($\Leftarrow$). 假设 $x_\lambda\leqslant scl(G)$ 及 x_λ 不是 G 的 S-附着点,则存在 $P\in\eta_s(x_\lambda)$ 使得 $G\leqslant P$,因为 P 是半闭 L-集,所以 $scl(G)\leqslant P$. 由 $P\in\eta_s(x_\lambda)$ 知,$x_\lambda\not\leqslant P$,从而 $x_\lambda\not\leqslant cl_s(G)$,矛盾.

(2)我们只需要考虑 $G\neq\underline{0}$ 的情况. 因为 $scl(G)=\vee\{x_\lambda|x_\lambda\leqslant scl(G)\}$,由(1),我们有 $scl(G)$ 是它的所有 S-附着点的并.

定义 8　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$x_\lambda\in M(L^X)$,$N=\{N(n)|n\in D\}$ 是 L^X 中的网. 则

(1)x_λ 称为 N 的 S-极限点,记为 $N\overset{S}{\to}x_\lambda$,如果对每个 $P\in\eta_s(x_\lambda)$,$N(n)\not\leqslant P$ 最终是真的;

(2)x_λ 称为 N 的 S-聚点,记为 $N\overset{S}{\infty}x_\lambda$,如果对每个 $P\in\eta_s(x_\lambda)$,$N(n)\not\leqslant P$ 经常是真的.

N 的所有 S-极限点的并和所有的 S-聚点的并分别记为 $\lim_s N$,$\mathrm{ad}_s N$. 显然 $\lim_s N\leqslant\mathrm{ad}_s N$.

定理 2　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$x_\lambda,x_\mu\in M(L^X)$ 且 $N=\{N(n)|n\in D\}$ 是 L^X 中的网. 则下列陈述是真的.

(1)设 $T=\{T(n)|n\in D\}$ 是和 N 有相同论域的网且对每个 $n\in D$,$T(n)\geqslant N(n)$. 如果 $N\overset{S}{\to}x_\lambda$,则 $T\overset{S}{\to}x_\lambda$;

(2)设 $T=\{T(n)|n\in D\}$ 是和 N 有相同论域的网且对每个 $n\in D$,$T(n)\geqslant N(n)$. 如果 $N\overset{S}{\infty}x_\lambda$,则 $T\overset{S}{\infty}x_\lambda$;

(3)如果 $N\overset{S}{\to}x_\lambda$ 及 $x_\lambda\geqslant x_\mu$,则 $N\overset{S}{\to}x_\mu$;

(4)如果 $N\overset{S}{\infty}x_\lambda$ 及 $x_\lambda\geqslant x_\mu$,则 $N\overset{S}{\infty}x_\mu$.

证明　证明是容易的,故略去.

定理 3　令 (X,τ) 是 L-拓扑空间,$x_\lambda\in M(L^X)$ 且 $N=\{N(n)|n\in D\}$ 是 L^X 中的网. 则

(1)$N\overset{S}{\to}x_\lambda$ 当且仅当 $x_\lambda\leqslant\lim_s N$;

(2)$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$ 当且仅当 $x_\lambda\leqslant\mathrm{ad}_s N$.

证明　(1)必要性是明显的,只证明充分性. 假设 $x_\lambda\leqslant\lim_s N$ 及 $P\in\eta_s(x_\lambda)$. 则 $\lim_s N$ 不小于等于 P. 由 $\lim_s N$ 的定义,存在 N 的 S-极限点 e,使得 $e\not\leqslant P$,即 $P\in\eta_s(e)$. 由 e 是 N 的 S-极限点,可知 N 最终不在 P

中,因此 $N\xrightarrow{S}x_\lambda$.

(2)的证明类似于(1).

定理4　令(X,τ)是L-拓扑空间且$N=\{N(n)\mid n\in D\}$是L^X中的网. 则$\lim_s N$,$\mathrm{ad}_s N$是半闭L-集.

证明　设$x_\lambda\leqslant scl(\lim_s N)$,则对每个$P\in\eta_s(x_\lambda)$,$\lim_s N$不小于等于$P$. 所以存在点$e$使得$e\leqslant\lim_s N$且$e\not\leqslant P$. 由定理3知$N\xrightarrow{S}e$. 从而$N(n)\not\leqslant P$最终是真的,于是$x_\lambda\leqslant\lim_s N$. 这表明$\lim_s N$是半闭$L$-集. 同理可证$\mathrm{ad}_s N$也是半闭$L$-集.

定理5　令(X,τ)是L-拓扑空间,$G\in L^X$且$x_\lambda\in M(L^X)$. 如果在G中存在网$N=\{N(n)\mid n\in D\}$使得$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$,则$x_\lambda\leqslant scl(G)$.

证明　假设$N=\{N(n)\mid n\in D\}$是G中的网且$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$. 设$P\in\eta_s(x_\lambda)$,则$N$经常不在$P$中,于是存在$n\in D$使得$N(n)$不小于等于$P$,但$N(n)\leqslant G$,因此$G\not\leqslant P$. 从而$x_\lambda$是$G$的$S$-附着点,即$x_\lambda\leqslant scl(G)$.

定理6　令(X,τ)是L-拓扑空间且$x_\lambda\in M(L^X)$. $N=\{N(n)\mid n\in D\}$是L^X中的网. 如果N有子网T使得$T\xrightarrow{S}x_\lambda$,则$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$.

证明　假设$T=\{T(m)\mid m\in E\}$是N的子网,$T\xrightarrow{S}x_\lambda$,$P\in\eta_s(x_\lambda)$且$n_0\in D$.

由子网的定义,存在映射$N_1:E\to D$及$m_0\in E$使得当$m\geqslant m_0(m\in E)$时$N_1(m)\geqslant n_0$,$(N_1(m)\in D)$. 因为$T\xrightarrow{S}x_\lambda$,则存在$m_1\in E$,使得当$m\geqslant m_1(m\in E)$时$T(m)$不小于等于$P$. 由于$E$是定向集,所以存在$m_2\in E$使得$m_2\geqslant m_0$且$m_2\geqslant m_1$. 从而$T(m_2)\not\leqslant P$,$N_1(m_2)\geqslant n_0$. 设$n=N_1(m_2)$,则$N(n)=N(N_1(m_2))=T(m_2)\not\leqslant P$. 这意味着$N(n)\not\leqslant P$经常是真的,所以$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$.

类似地可以证明下面定理.

定理7　令(X,τ)是L-拓扑空间且$x_\lambda\in M(L^X)$. $N=\{N(n)\mid n\in D\}$是L^X中的网. 如果$N\xrightarrow{S}x_\lambda$,则对$N$的每个子网$T$有$T\xrightarrow{S}x_\lambda$.

引理1　令(X,τ_1)和(Y,τ_2)是两个L-拓扑空间.映射$f:X\to Y$是不定映射当且仅当对每个$x_\lambda\in M(L^X)$及每个$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$,有$scl(f_L^\leftarrow(B))\in\eta_s(x_\lambda)$.

证明　($\Rightarrow$).假设f是不定映射且$x_\lambda\in M(L^X)$. 则对每个$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$,$f_L^\leftarrow(B)$是半闭的且$x_\lambda\not\leqslant f_L^\leftarrow(B)$,事实上,如果$x_\lambda\leqslant f_L^\leftarrow(B)$,则$f_L^\to(x_\lambda)\leqslant f_L^\to(f_L^\leftarrow(B))\leqslant B$与$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$矛盾. 因此,$x_\lambda\not\leqslant f_L^\leftarrow(B)$,所以$scl(f_L^\leftarrow(B))=f_L^\leftarrow(B)\in\eta_s(x_\lambda)$.

($\Leftarrow$).假设$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$,其中$x_\lambda\in M(L^X)$. 则$B$为$Y$中半闭$L$-集,且$f_L^\to(x_\lambda)\not\leqslant B$,从而$x_\lambda\not\leqslant f_L^\leftarrow(B)$. 事实上,如果$x_\lambda\leqslant f_L^\leftarrow(B)$,则$f_L^\to(x_\lambda)\leqslant f_L^\to(f_L^\leftarrow(B))\leqslant B$,与$f_L^\to(x_\lambda)\not\leqslant B$矛盾. 由$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$,知$scl(f_L^\leftarrow(B))\in\eta_s(x_\lambda)$,即$x_\lambda\not\leqslant scl(f_L^\leftarrow(B))$,所以$scl(f_L^\leftarrow(B))\leqslant f_L^\leftarrow(B)$. 而$scl(f_L^\leftarrow(B))\geqslant f_L^\leftarrow(B)$是显然的,这表明$scl(f_L^\leftarrow(B))=f_L^\leftarrow(B)$,而$scl(f_L^\leftarrow(B))$是$X$中半闭$L$-集,因此$f_L^\leftarrow(B)$是$X$中半闭的. 这证明了$f$是不定映射.

定理8　令(X,τ_1)和(Y,τ_2)是两个L-拓扑空间. 映射$f:X\to Y$是不定映射. 如果L^X中网$N\xrightarrow{S}x_\lambda$,则$f_L^\to(N)\xrightarrow{S}f_L^\to(x_\lambda)$.

证明　假设f是不定的且$N\xrightarrow{S}x_\lambda$. 令$B\in\eta_s(f_L^\to(x_\lambda))$,则由引理1有,$f_L^\leftarrow(B)\leqslant scl(f_L^\leftarrow(B))\in\eta_s(x_\lambda)$. 于是由$N\xrightarrow{S}x_\lambda$知,$N(n)\not\leqslant f_L^\leftarrow(B)$最终是真的. 因而$f_L^\to(N)\not\leqslant B$最终是真的. 所以$f_L^\to(N)\xrightarrow{S}f_L^\to(x_\lambda)$.

类似地可以证明下面定理.

定理9　令(X,τ_1)和(Y,τ_2)是两个L-拓扑空间. 映射$f:X\to Y$是不定映射. 如果L^X中网$N\overset{S}{\infty}x_\lambda$,则$f_L^\to(N)\overset{S}{\infty}f_L^\to(x_\lambda)$.

推论1　令(X,τ_1)和(Y,τ_2)是两个L-拓扑空间,映射$f:X\to Y$是不定映射. 则

(1)对 L^X 中每个网 N 有,$f_L^{\rightarrow}(\lim_s N) \leqslant \lim_s f_L^{\rightarrow}(N)$;

(2)对 L^Y 中每个网 T,$\lim_s f_L^{\leftarrow}(T) \leqslant f_L^{\leftarrow}(\lim_s(T))$.

证明 (1)假设 $N=\{N(n) \mid n \in D\}$ 是 L^X 中的网且 $g \in f_L^{\rightarrow}(\lim_s N)$. 则存在 $e \leqslant \lim_s N$ 且 $g=f_L^{\rightarrow}(e)$. 我们证明 $g \in \lim_s f_L^{\rightarrow}(N)$,事实上,由 $e \leqslant \lim_s N$ 及定理3,我们有 $N \xrightarrow{S} e$,由定理8,我们有 $f_L^{\rightarrow}(N) \xrightarrow{S} f_L^{\rightarrow}(e)=g$,再由定理3,$g \in \lim_s f_L^{\rightarrow}(N)$. 上述过程证明了 $g \in f_L^{\rightarrow}(\lim_s N)$ 便有 $g \in \lim_s f_L^{\rightarrow}(N)$,于是

$$f_L^{\rightarrow}(\lim_s N) \leqslant \lim_s f_L^{\rightarrow}(N).$$

(2)令 $T=\{T(n) \mid n \in D\}$ 是 L^Y 中的网. 则 $f_L^{\leftarrow}(T)$ 是 L^X 中的网. 因为 f 是不定的,根据(1),有 $f_L^{\rightarrow}(\lim_s f_L^{\leftarrow}(T)) \leqslant \lim_s f_L^{\rightarrow}(f_L^{\leftarrow}(T)) \leqslant \lim_s(T)$. 从而

$$f_L^{\leftarrow}(f_L^{\rightarrow}(\lim_s f_L^{\leftarrow}(T))) \leqslant f_L^{\leftarrow}(\lim_s(T)),$$

于是

$$\lim_s f_L^{\leftarrow}(T) \leqslant f_L^{\leftarrow}(f_L^{\rightarrow}(\lim_s f_L^{\leftarrow}(T))) \leqslant f_L^{\leftarrow}(\lim_s(T)).$$

即 $\lim_s f_L^{\leftarrow}(T) \leqslant f_L^{\leftarrow}(\lim_s(T))$.

[参考文献]

[1] PU B M,LIU Y M. Fuzzy topology Ⅰ. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence[J]. J Math Anal Appl,1980,765:71-599.

[2] 王国俊. L-fuzzy 拓扑空间理论[M]. 西安:陕西师范大学出版社,1988.

[3] BAI S Z. Q-convergence of fuzzy nets and weak separation axioms in fuzzy lattices[J]. Fuzzy sets and systems,1997,88:379-386.

[4] GEORGIOU D N,PAPADOPOULOS B K. On fuzzy θ-convergences[J]. Fuzzy sets and systems,2000,116:385-399.

[5] SHI F G,ZHENG C Y. O-convergence of fuzzy nets and its applications[J]. Fuzzy sets and systems,2003,140:499-507.

[6] YANG X F,LI S G. Net-theoretical convergence in (L,M)-fuzzy cotopological spaces[J]. Fuzzy sets and systems,2012,204:53-65.

[7] PANG B. On (L,M)-fuzzy convergence spaces[J]. Fuzzy sets and systems,2014,238:46-70.

[8] AZAD K K. On fuzzy semicontinuity,fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity[J]. Journal of mathematical analysis and applications,1981,82:14-32.

[9] GIERZ G,HOFMANN K H,KEIMEL K,et al. A compendium of continuous lattices[M]. Berlin:Springer Verlag,1980.

[责任编辑:陆炳新]