doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.02.007

幺半群-矩阵型自动机的商自动机

徐　慧[1],田　径[2]

(1.空军工程大学理学院,陕西 西安 710051)
(2.西安外国语大学经济金融学院,陕西 西安 710128)

[**摘要**]　本文从两个幺半群之间的同态出发,构造(n,S)-自动机之间的满同态,得到自动机的同余关系,进一步,在状态集的商集上,重新构造新的自动机(即所谓商自动机),并阐述了所构造的自动机与满同态所对应的自动机是同构的. 在此基础上,引入(n,S)-自动机上的所谓的 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 关系,证明了这两个关系是可交换的.
[**关键词**]　幺半群-矩阵型自动机,同态,同余,商自动机
[**中图分类号**]O152.7　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2017)02-0039-04

Factor Automata of Monoid-Matrix Type Automata

Xu Hui[1],Tian Jing[2]

(1.School of Science,Air Force Engineering University,Xi'an 710051,China)
(2.School of Economy and Finance,Xi'an International Studies University,Xi'an 710128,China)

Abstract:In this paper,we start with a monoid homomorphism. Then we construct an(n,S)-automaton homomorphism and a congruence. Further,a new automaton(that is,factor automaton) is contructed on the quotient set. Also,we prove that factor automaton is isomorphic to homomorphic image. Based on these,we introduce two binary relations $\mathscr{L}$ and $\mathscr{R}$ on(n,S)-automaton and prove that they are commutative.
Key words:Monoid-matrix type automaton,homomorphism,congruence,factor automaton

有限自动机是具有离散输入和输出系统的一种数学模型,它在计算机科学、生物学、管理学等众多领域中具有广泛应用. Fleck 将自动机形式地定义为三元组(A,Σ,δ),其中 A 为有限状态集,Σ 为有限字母表,δ 为集合 $A\times\Sigma$ 到 A 上的函数,称为状态转换函数[1]. 令 $\boldsymbol{\Sigma}^*$ 表示 $\boldsymbol{\Sigma}$ 上所有有限字符串构成的集合,则 δ 可以扩张成 $A\times\boldsymbol{\Sigma}^*$ 到 A 上的函数 $\bar{\delta}$:

(1)$\bar{\delta}(a,\varepsilon)=a,\ \forall a\in A$;

(2)$\bar{\delta}(a,xu)=\bar{\delta}(\delta(a,u),x),\ \forall a\in A,x\in\boldsymbol{\Sigma},u\in\boldsymbol{\Sigma}^*$.

为了方便起见,仍用 δ 表示 $\bar{\delta}$.

关于自动机代数理论的研究是自动机理论的重要课题之一. Ito 系统地研究了强连通自动机的代数理论[2]. 为了确定强连通自动机的结构,Ito 提出并研究了群-矩阵型自动机[2]. 他证明了对于任意的强连通自动机,存在一个正则群-矩阵型自动机与之同构. 文献[3-5]提出了所谓严格自动机的定义,利用正则幺半群-矩阵型自动机给出了严格自动机的一种表示,同时解决了严格自动机的分类问题.

基于对强连通自动机自同构群理论的研究,Ito 研究了群-矩阵型自动机的商自动机. 受此启发,本文将研究幺半群-矩阵型自动机及其商自动机. 设(n,S)-自动机 $\boldsymbol{A}=(S_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_\Psi)$,$\tau$ 是 S 到某个幺半群的同态映射. 首先证明 τ 在 $\hat{S}_n$ 上的扩张是 $\boldsymbol{A}$ 到$(n,\tau(S))$-自动机 $\boldsymbol{A}_\tau=((\tau(\hat{S}))_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\tau[\Psi]})$上的同态. 然后证明 $\boldsymbol{A}/\ker\hat{\tau}\cong\boldsymbol{A}_\tau$. 最后,按照半群理论的 Green-关系,介绍$(n,S)$-自动机上的两个二元关系 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$,同时证明 $\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathscr{R}\circ\mathscr{L}$.

收稿日期:2017-03-21.
基金项目:国家自然科学基金项目(61402364).
通讯联系人:徐慧,博士,讲师,研究方向:半环与自动机的代数理论. E-mail:xaxuhui716@126.com

1　预备知识

本节将介绍自动机和幺半群-矩阵型自动机的有关概念,其他未定义的概念和符号请参考文献[5].

设自动机 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$,$\boldsymbol{B}=(B,\Sigma,\gamma)$,$f$ 是 A 到 B 的映射. 若对 $\forall a\in A,x\in\Sigma$ 有 $f(\delta(a,x))=\gamma(f(a),x)$ 成立,则称 f 为自动机 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的同态[6]. 若同态 f 是双射,则称 f 为同构[6]. 若存在从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的同构,则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是同构的,记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$. 自动机 $\boldsymbol{A}$ 到其自身的同态和同构分别称为自同态和自同构. 我们用 $E(\boldsymbol{A})$ 和 $G(\boldsymbol{A})$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的自同态和自同构的全体. 可证在通常意义的映射合成运算下 $E(\boldsymbol{A})$ 和 $G(\boldsymbol{A})$ 分别构成一个含幺半群和群,分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的自同态幺半群和自同构群[6].

设 $\boldsymbol{A}=(A,\Sigma,\delta)$,$\rho$ 是状态集 A 上的等价关系. 若对 $\forall a,b\in A,x\in\Sigma$ 有

$$(a,b)\in\rho\Rightarrow(\delta(a,x),\delta(b,x))\in\rho,$$

则称 ρ 是自动机 $\boldsymbol{A}$ 上的同余[6]. 按照泛代数中的记号,我们将 a 所在的 ρ 类记为 ρ_a,即

$$\rho_a=\{b\in A,(a,b)\in\rho\}.$$

设 ρ 是 A 上的同余,记 $A/\rho=\{\rho_a,a\in A\}$,对 $\forall\rho_a\in A/\rho,x\in\Sigma$ 定义 $\delta_\rho(\rho_a,x)=\rho_{\delta(a,x)}$,称自动机 $\boldsymbol{A/\rho}=(A/\rho,\Sigma,\delta_\rho)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 关于 ρ 的商自动机.

设 S 是有限幺半群,1_S 是幺元. 给 S 添加一个新的元素 0,在集合 $S\cup\{0\}$ 上定义满足如下条件的一个二元运算“·”:

(1)“·”是 S 中二元运算的扩张;

(2)$s\cdot0=0\cdot s=0\cdot0=0,\ \forall s\in S$.

可得一个有零元的幺半群,记作 ${}^0S$. 在 ${}^0S$ 上定义一个部分运算“+”如下:

(1)$s+0=0+s=s,0+0=0,\ \forall s\in S$;

(2)$s+s'$ 没有定义,$\forall s,s'\in S$.

设 $s_1,s_2,\cdots,s_n\in{}^0S$,将 $s_1+s_2+\cdots+s_n$ 简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}s_i$. 显然,当且仅当 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 中至多只有一个非零元时,$\sum\limits_{i=1}^{n}s_i$ 有意义.

设 n 是正整数,$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 ${}^0S$ 上的行向量. 若存在唯一的正整数 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_i\neq0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 S 上的 n 阶幺半群-向量[3]. S 上的 n 阶幺半群-向量的全体记为 $\hat{\boldsymbol{S}}_n$. 设 $s\in S,\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\hat{\boldsymbol{S}}_n$,定义 $s\cdot\alpha$ 如下:

$$s\cdot\boldsymbol{\alpha}=(sa_1,sa_2,\cdots,sa_n).$$

令 $\varepsilon_1=(1_S,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1_S,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1_S)$,则

$$\hat{\boldsymbol{S}}_n=\{s\varepsilon_i\mid s\in S,i=1,2,\cdots,n\}.$$

设 $\boldsymbol{M}$ 是 ${}^0S$ 上的 $n\times n$ 矩阵,如果 $\boldsymbol{M}$ 的任意行向量是 $\hat{\boldsymbol{S}}_n$ 中的元素,那么就称 $\boldsymbol{M}$ 为 S 上的 n 阶幺半群-矩阵[3]. S 上 n 阶幺半群-矩阵的全体记为 $\tilde{\boldsymbol{S}}_n$. 可以证明,$\tilde{\boldsymbol{S}}_n$ 在通常的矩阵乘法运算下构成一个幺半群,其中单位矩阵为 (e_{pq}). 设 $s\varepsilon_i\in\hat{\boldsymbol{S}}_n,M\in\tilde{\boldsymbol{S}}_n$. 若 $\boldsymbol{M}_{ij}=r$ 且 $r\neq0$,则在通常的行向量与矩阵乘法运算下,有 $s\varepsilon_i\cdot\boldsymbol{M}=(sr)\varepsilon_j\in\hat{\boldsymbol{S}}_n$.

定义 1[3]　设 $(S,\cdot)$ 是有限幺半群,n 是正整数,Ψ 是 Σ 到 $\tilde{\boldsymbol{S}}_n$ 上的映射. 任取 $s\varepsilon_i\in\hat{\boldsymbol{S}}_n,x\in\Sigma$,定义

$$\delta_\Psi(s\varepsilon_i,x)=s\varepsilon_i\cdot\Psi(x).$$

则称自动机 $\boldsymbol{A}=(\hat{\boldsymbol{S}}_n,\Sigma,\delta_\Psi)$ 是 S 上的 n 阶幺半群-矩阵型自动机,简称 (n,S)-自动机.

设 $x\in\Sigma$,通常记 $\Psi(x)=(\psi_{pq}(x))$,其中 $\psi_{pq}(x)$ 是 $\Psi(x)$ 的 pq-元. 定义 1 中的映射 Ψ 可以扩张成幺半群同态 $\bar{\Psi}:\Sigma^*\to\tilde{S}_n$,方法如下:

(1)$\bar{\Psi}(\varepsilon)=(e_{pq})$;

(2)$\bar{\Psi}(x_1x_2\cdots x_n)=\Psi(x_1)\cdot\Psi(x_2)\cdot\cdots\cdot\Psi(x_n),\ \forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in\Sigma$.

方便起见,我们仍用 Ψ 表示 $\bar{\Psi}$.

2 商自动机

设S,T是幺半群,映射$\tau:S\to T$,(n,S)-自动机$\boldsymbol{A}=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$. 任取$x\in\boldsymbol{\Sigma}$,定义$\tau[\Psi](x)=(\tilde{\tau}(\psi_{pq}(x)))$,其中$\tilde{\tau}$是$\tau$在${}^0S$上的扩张,$\tilde{\tau}(0)=0$,$\Psi(x)=(\psi_{pq}(x))$. 显然,$((\tau(\hat{S}))_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\tau[\Psi]})$是$(n,\tau(S))$-自动机,简记为$\boldsymbol{A}_{\tau}$.

易证,若$s\varepsilon_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{A})$,则$\tau(s)\varepsilon_i\in\mathrm{Gen}(\boldsymbol{A}_{\tau})$.

命题1 设(n,S)-自动机$\boldsymbol{A}=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$. 若$\boldsymbol{A}$是循环自动机,则$\boldsymbol{A}_{\tau}=((\tau(\hat{S}))_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\tau[\Psi]})$也是循环自动机.

进一步,我们可以得到

命题2 设(n,S)-自动机$\boldsymbol{A}=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$,$(n,\tau(S))$-自动机$\boldsymbol{A}_{\tau}=((\tau(\hat{S}))_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\tau[\Psi]})$. 定义$\hat{\tau}:\hat{S}_n\to\hat{S}'_n$如下:

$$\hat{\tau}(s\varepsilon_i)=\tau(s)\varepsilon_i,\ \forall s\varepsilon_i\in\hat{S}_n.$$

若τ是同态,则$\hat{\tau}$是$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{A}_{\tau}$的同态.

证明 设$s\varepsilon_i\in\hat{S}_n,x\in\boldsymbol{\Sigma}$. 不妨设$\psi_{ij}(x)=t\neq0$,则$s\varepsilon_i\cdot\Psi(x)=(st)\varepsilon_j$. 从而

$$\hat{\tau}(\delta_{\Psi}(s\varepsilon_i,x))=\hat{\tau}(s\varepsilon_i\cdot\Psi(x))=\hat{\tau}((st)\varepsilon_j)=\tau(st)\varepsilon_j.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\delta_{\tau[\Psi]}(\hat{\tau}(s\varepsilon_i),x)&=\hat{\tau}(s\varepsilon_i)\cdot\tau[\Psi](x)=\tau(s)\varepsilon_i\cdot(\tilde{\tau}(\psi_{pq}(x)))=\\&(\tau(s)\tau(\psi_{ij}(x)))\varepsilon_j=(\tau(s)\tau(t))\varepsilon_j=\tau(st)\varepsilon_j.\end{aligned}$$

所以$\hat{\tau}$是$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{A}_{\tau}$的同态.

令

$$\ker\hat{\tau}=\{(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\hat{S}_n\times\hat{S}_n\mid\hat{\tau}(s\varepsilon_i)=\hat{\tau}(t\varepsilon_j)\}.$$

显然,$\ker\hat{\tau}$是$\hat{S}_n$上的等价关系. 若$s\varepsilon_i\ker\hat{\tau}\,t\varepsilon_j$,则$i=j$,且$\tau(s)=\tau(t)$. 设$x\in\boldsymbol{\Sigma}$,$\psi_{ik}(x)=m\neq0$,则

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(\delta_{\Psi}(s\varepsilon_i,\sigma))&=\hat{\tau}((s\varepsilon_i)\cdot\Psi(\sigma))=\hat{\tau}((sm)\varepsilon_k)=\tau(sm)\varepsilon_k=\tau(s)\tau(m)\varepsilon_k\\&=\tau(t)\tau(m)\varepsilon_k=\tau(tm)\varepsilon_k=\hat{\tau}((tm)\varepsilon_k)=\hat{\tau}(\delta_{\Psi}(t\varepsilon_i,\sigma)).\end{aligned}$$

从而$(\delta_{\Psi}(s\varepsilon_i),\delta_{\Psi}(t\varepsilon_j))\in\ker\hat{\tau}$. 所以$\ker\hat{\tau}$是$\boldsymbol{A}$上的同余.

下面讨论商自动机$\boldsymbol{A}/\ker\hat{\tau}=(\hat{S}_n/\ker\hat{\tau},\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\ker\hat{\tau}})$和$(n,\tau(S))$-自动机$\boldsymbol{A}_{\tau}=((\tau(\hat{S}))_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\tau[\Psi]})$之间的关系.

定理1 设$\boldsymbol{A}=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$是$(n,S)$-自动,若$\tau$是$S$到某个幺半群的满同态,则$\boldsymbol{A}/\ker\hat{\tau}\cong\boldsymbol{A}_{\tau}$.

证明 定义映射$\phi:\hat{S}_n/\ker\tau\to(\tau(\hat{S}))_n$如下:

$$\phi(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i})=\tau(s)\varepsilon_i,\ \forall\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i}\in\hat{S}_n/\ker\hat{\tau}.$$

首先,验证ϕ的定义是合理的. 若$s\varepsilon_i\ker\hat{\tau}\,t\varepsilon_j$,则$\hat{\tau}(s\varepsilon_i)=\hat{\tau}(t\varepsilon_j)$,从而$\tau(s)\varepsilon_i=\tau(t)\varepsilon_j$,因此$\phi(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i})=\phi(\ker\hat{\tau}_{t\varepsilon_j})$.

其次,证明ϕ是双射. 显然,ϕ是满射. 因此,只需证明ϕ是单射. 若存在$\tau(s)\varepsilon_i,\tau(t)\varepsilon_j\in(\tau(\hat{S}))_n$使得$\tau(s)\varepsilon_i=\tau(t)\varepsilon_j$,则$\hat{\tau}(s\varepsilon_i)=\hat{\tau}(t\varepsilon_j)$,从而$\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i}=\ker\hat{\tau}_{t\varepsilon_j}$.因此,$\phi$是单射.

最后,证明ϕ是同态. 即需证明对$\forall s\varepsilon_i\in\hat{S}_n,x\in\boldsymbol{\Sigma}$有

$$\phi(\delta_{\ker\hat{\tau}}(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i},x))=\delta_{\tau(\Psi)}(\phi(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i}),x).$$

给定$s\varepsilon_i\in\hat{S}_n,x\in\boldsymbol{\Sigma}$. 若$\psi_{ik}(x)=m\neq0$,则$\tau(\psi_{ik}(x))=\tau(m)$. 从而

$$\phi(\delta_{\ker\hat{\tau}}(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i},x))=\phi(\ker\hat{\tau}_{\delta(s\varepsilon_i,x)})=\phi(\ker\hat{\tau}_{(s\varepsilon_i)\cdot\Psi(x)})=\phi(\ker\hat{\tau}_{(sm)\varepsilon_k})=\tau(sm)\varepsilon_k.$$

另一方面,

$$\delta_{\tau[\Psi]}(\phi(\ker\hat{\tau}_{s\varepsilon_i}),x)=\delta_{\tau[\Psi]}(\tau(s)\varepsilon_i,x)=\tau(s)\varepsilon_i\cdot\tau[\Psi](x)=\tau(s)\tau(m)\varepsilon_k=\tau(sm)\varepsilon_k.$$

设 $\boldsymbol{A}=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$,$\tau$ 是半群 S 上的一个同态映射. 下面我们按照半群理论中的 Green-关系引入两个二元关系 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{L}=\{(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\hat{S}_n\times\hat{S}_n \mid i=j\}.$$

$$\mathscr{R}=\{(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\hat{S}_n\times\hat{S}_n \mid \tau(s)=\tau(t)\}.$$

不难证明,$\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 分别是状态集 $\hat{S}_n$ 上的等价关系,且 $\mathscr{L}\cap\mathscr{R}=\ker\hat{\tau}$.

命题3　设(n,S)-自动机 $A=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$,则 $\mathscr{L}$ 是 A 上的同余关系.

证明　设 $s\varepsilon_i,t\varepsilon_j\in\hat{S}_n$. 若$(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\mathscr{L}$,则 $i=j$. 任取 $x\in\boldsymbol{\Sigma}$,不妨设 $\psi_{ik}(x)=r\neq0$,则 $s\varepsilon_i\cdot\boldsymbol{\Psi}(x)=(sr)\varepsilon_k$, $t\varepsilon_j\cdot\boldsymbol{\Psi}(x)=(tr)\varepsilon_k$. 显然,$((sr)\varepsilon_k,(tr)\varepsilon_k)\in\mathscr{L}$. 从而$((\delta_{\Psi}(s\varepsilon_i,x))(\delta_{\Psi}(s\varepsilon_i,x)))\in\mathscr{L}$. 因此,$\mathscr{L}$ 是 A 上的同余.

命题4　设(n,S)-自动机 $A=(\hat{S}_n,\boldsymbol{\Sigma},\delta_{\Psi})$,则 $\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\mathscr{R}\circ\mathscr{L}=\hat{S}_n\times\hat{S}_n$.

证明　设$(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\hat{S}_n\times\hat{S}_n$. 根据 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{R}$ 的定义可知,$(s\varepsilon_i,t\varepsilon_i)\in\mathscr{L}$,且$(t\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\mathscr{R}$,故$(s\varepsilon_i,t\varepsilon_j)\in\mathscr{L}\circ\mathscr{R}$. 从而 $\hat{S}_n\times\hat{S}_n\subseteq\mathscr{L}\circ\mathscr{R}$. 因此 $\mathscr{L}\circ\mathscr{R}=\hat{S}_n\times\hat{S}_n$. 同理可以证明 $\mathscr{R}\circ\mathscr{L}=\hat{S}_n\times\hat{S}_n$.

[参考文献]

[1] FLECK A C. Isomorphism groups of automata[J]. Journal of the association for computing machinery,1962,9(4):469-476.

[2] ITO M. Algebraic theory of automata and languages[M]. Singapore:World Scientific Press,2004.

[3] TIAN J,ZHAO X Z. Representations of commutative asynchronous automata[J]. Journal of computer and system sciences,2012,78:504-516.

[4] TIAN J,ZHAO X Z,SHAO Y. On structure and representations of cyclic automata[J]. Theoretical computer science,2016,609:344-360.

[5] XU H,TIAN J,ZHAO X Z. Monoid-matrix type automaton[J]. Theoretical computer science,2014,520:1-10.

[6] HOWIE J M. Automata and languages[M]. Oxford:Clarendon Press,1991.

[责任编辑:陆炳新]