doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.03.001

广义 NBUT 寿命分布及其封闭性质

王丰效

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844000)

[**摘要**]　利用广义试验总时间变换序,给出了广义 NBUT(简记为 GNBUT)寿命分布的概念,讨论了 GNBUT 寿命分布与 NBUT 寿命分布的关系.进一步给出了 GNBUT 寿命分布在构成串联系统和随机小下的封闭性质.

[**关键词**]　广义试验总时间变换序,NBUT,GNBUT,串联系统,随机小

[**中图分类号**]O211.5　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2017)03-0001-04

Some Properties of Generalized NBUT Lifetime Distribution

Wang Fengxiao

(College of Mathematics and Statistics,Kashigar University,Kashi 844000,China)

Abstract:Based on the generalized total time on test transform order, a new lifetime distribution named generalized NBUT(GNBUT) is established. Relationship between the GNBUT lifetime distribution and the NBUT lifetime distribution are discussed. It is found that the implications are closely related to the IFR or DFR property of the referred life distribution G. Preservation of the GNBUT is also developed by taking the minima.

Key words:generalized total time on test transform order,NBUT,GNBUT,series system,random minima

随机变量的随机比较在可靠性分析和保险精算理论中都有其重要的意义,近年来有许多关于非负独立随机变量的随机比较的成果[1-3]. 基于剩余寿命的随机比较,许多寿命分布类,如 NBU,NBUC,NBUT 等被进行了广泛的研究[4-8]. 文献[9]讨论了广义试验总时间变换序,并建立了 IFR 序关系的非参数检验方法. 文献[10]讨论了广义试验总时间变换序的相关性质. 基于随机序的寿命分布类研究一直是可靠性理论的一个主题. 由于可靠性理论研究元部件和系统的失效规律,以及对可靠性的有效控制,从而为工程系统提供必需的设计准则、检验手段. 在广义试验总时间变换序的基础上,本文给出了基于广义试验总时间变换序的一类寿命分布类 GNBUT,讨论了 GNBUT 寿命分布与 NBUT 寿命分布的关系. 进一步研究了 GNBUT 寿命分布在构成串、并联系统以及构成随机大、随机小下的封闭性质或反向封闭性.

如果 X,Y,Z 是 3 个非负连续型随机变量,其分布函数和密度函数分别为 $F(x)$,$G(x)$,$K(x)$ 和 $f(x)$,$g(x)$,$k(x)$,生存函数分别为 $\bar{F}(x)=1-F(x)$,$\bar{G}(x)=1-G(x)$ 和 $\bar{K}(x)=1-K(x)$.令

$$F^{-1}(p)=\sup\{x\,|\,F(x)\leqslant p\},G^{-1}(p)=\sup\{x\,|\,G(x)\leqslant p\},K^{-1}(p)=\sup\{x\,|\,K(x)\leqslant p\}$$

分别为这 3 个随机变量各自的 p-分位点.

Barlow 引入并研究了随机变量的试验总时间变换,随机变量 X,Z 的试验总时间(total time on test)变换分别为

$$T_X(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(t)\,\mathrm{d}t,\quad T_Z(p)=\int_0^{K^{-1}(p)}\bar{K}(t)\,\mathrm{d}t,$$

称 Z 以试验总时间变换序大于 X(记为 $X\leqslant_{ttt}Z$),如果对任意 $0<p<1$ 有 $T_X(p)\leqslant T_Z(p)$.

随机变量 X,Z 关于 Y 的广义试验总时间(generalized total time on test)变换分别为

$$H_X^{-1}(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}gG^{-1}(F(t))\,\mathrm{d}t,H_Z^{-1}(p)=\int_0^{K^{-1}(p)}gG^{-1}(K(t))\,\mathrm{d}t,0<p<1.$$

收稿日期:2017-02-15.

基金项目:广东省科技计划项目(2014A020209087),喀什大学高层次人才科研启动经费(GCC15ZK-007).

通讯联系人:王丰效,教授,硕士生导师,研究方向:随机序、应用概率统计. E-mail:fxw-hz@126.com

广义试验总时间变换的提出也归功于 Barlow 等[5],他们利用这个结构建立了 IFR 序关系的非参数检验方法.

称 Z 以广义试验总时间变换序大于 X(记为 $X\leqslant_{gttt}Z$)[10],如果对任意 $0<p<1$ 有 $H_X^{-1}(p)\leqslant H_Z^{-1}(p)$. 显然当随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布时,广义试验总时间变换序与试验总时间变换序等价,即 $X\leqslant_{gttt}Z\Leftrightarrow X\leqslant_{ttt}Z$.

1　主要结果

为了引用方便,先给出一个有用的引理.

引理 1[8]　设 W 是区间(a,b)上的一个测度(不必为正).

(1)如果对所有 $t\in(a,b)$,有 $\int_a^t \mathrm{d}W(x)\geqslant 0$. h 是一个定义在区间(a,b)的非负递减函数,则 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}W(x)\geqslant 0$,

(2)如果对所有 $t\in(a,b)$,有 $\int_t^b \mathrm{d}W(x)\geqslant 0$. h 是一个定义在区间(a,b)的非负递增函数,则 $\int_a^b h(x)\mathrm{d}W(x)\geqslant 0$.

定义 1　设 X 是随机变量,其剩余寿命 $X_t=(X-t\mid X>t)$ 的分布函数为 $F_t(x)$. 如果对任意的 $0<p<1$,有 $X_t\leqslant_{gttt}X$,则称 X 关于随机变量 Y 以广义试验总时间序新比旧好(记为 GNBUT). 易知 X 属于 GNBUT 当且仅当

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\mathrm{d}x,0<p<1.$$

如果对任意的 $0<p<1$,有 $X_t\geqslant_{gttt}X$,则称 X 关于随机变量 Y 以广义试验总时间序新比旧差(记为 GNWUT). 易知 X 属于 NBUT 当且仅当

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\mathrm{d}x,0<p<1.$$

另外,当随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布时,GNBUT 寿命分布与 NBUT 寿命分布等价. 下面的定理 1 和定理 2 给出了 GNBUT 寿命分布与 NBUT 寿命分布之间的关系.

定理 1　设随机变量 Y 是失效率递增(IFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递增,则 $X\in\text{GNBUT}\Rightarrow X\in\text{NBUT}$.

证明　若 $X\in\text{GNBUT}$,即

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\mathrm{d}x,0<p<1.$$

从而有

$$\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\mathrm{d}x=\int_0^p gG^{-1}(u)\mathrm{d}(F^{-1}(u)-F_t^{-1}(u))\geqslant 0.$$

由于 Y 是失效率递增(IFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递增,从而$(1-u)/gG^{-1}(u)$关于 $u\geqslant 0$ 递减,由引理 1(1)可得

$$\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} \bar{F}_t(x)\mathrm{d}x=\int_0^p (1-u)\mathrm{d}(F^{-1}(u)-F_t^{-1}(u))\geqslant 0,$$

则 $\int_0^{F_t^{-1}(p)}\bar{F}_t(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(x)\mathrm{d}x$,故 $X\in\text{NBUT}$.

定理 2　设随机变量 Y 是失效率递减(DFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递减,则 $X\in\text{NBUT}\Rightarrow X\in\text{GNBUT}$.

证明　若 $X\in\text{NBUT}$,即

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} \bar{F}_t(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\mathrm{d}x,0<p<1,$$

从而有

$$\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} \bar{F}_t(x)\mathrm{d}x=\int_0^p (1-u)\mathrm{d}(F^{-1}(u)-F_t^{-1}(u))\geqslant 0.$$

由于 Y 是失效率递减(DFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递减,从而 $gG^{-1}(u)/(1-u)$ 关于 $u\geqslant 0$ 递减,由引理 1(1)可得

$$\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^p gG^{-1}(u)\,\mathrm{d}(F^{-1}(u)-F_t^{-1}(u))\geqslant 0,$$

即

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\,\mathrm{d}x,$$

故 $X\in$ GNBUT.

由定理 1 和定理 2 容易得到下面的定理 3.

定理 3 设随机变量 Y 是 DFR 的,随机变量 Y_1 是 DFR 的. 如果随机变量 X 关于 Y 是 GNBUT,则 X 关于 Y_1 也是 GNBUT.

类似于定理 1 和定理 2,用同样的方法可得下面的定理 4 和定理 5.

定理 4 设随机变量 Y 是失效率递增(IFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递增,则 $X\in$ GNBUT$\Rightarrow X\in$ NWUT.

证明 若 $X\in$ GNBUT,即

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\,\mathrm{d}x,0<p<1,$$

从而有

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^p gG^{-1}(u)\,\mathrm{d}(F_t^{-1}(u)-F^{-1}(u))\geqslant 0.$$

由于 Y 是失效率递增(IFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递增,从而 $(1-u)/gG^{-1}(u)$ 关于 $u\geqslant 0$ 递减,由引理 1(1)可得

$$\int_0^{F_t^{-1}(p)} \bar{F}_t(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^p (1-u)\,\mathrm{d}(F_t^{-1}(u)-F^{-1}(u))\geqslant 0,$$

即有 $\int_0^{F_t^{-1}(p)}\bar{F}_t(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(x)\,\mathrm{d}x$,故 $X\in$ NWUT.

定理 5 设随机变量 Y 是失效率递减(DFR)的,即失效率函数 $g(x)/\bar{G}(x)$ 关于 $x\geqslant 0$ 递减,则 $X\in$ GNWUT$\Rightarrow X\in$ NBUT.

下面的几个结论给出了 GNBUT 寿命分布类在构成串联系统以及随机小的封闭性质.

定理 6 设 $X_1,\cdots,X_n$ 与 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是分别来自总体 X 与 Y 的简单随机样本,并且 $X_1,\cdots,X_n$ 分别关于 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是 GNBUT,则 $\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 关于 $\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 也是 GNBUT.

证明 记 $F_{1:n}(x)$, $G_{1:n}(x)$ 分别为 $\min\{X_1,\cdots,X_n\}$, $\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 的分布函数,$F_i(x)$, $G_i(x)$ 分别为 X_i, Y_i 的分布函数. 剩余寿命 $X_{it}=(X_i-t\mid X_i>t)$ 的分布函数为 $F_{it}(x)$. $\min\{X_{1t},\cdots,X_{nt}\}$ 的分布函数为 $F_{1:t}(x)$. 由于 X_i 关于 Y_i 是 GNBUT,即 $X_{it}\leqslant_{gttt}X_i$,从而有

$$\int_0^{F_{it}^{-1}(p)} g_iG_i^{-1}(F_{it}(x))\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{F_i^{-1}(p)} g_iG_i^{-1}(F_i(x))\,\mathrm{d}x.$$

注意到 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布,所以 $g_iG_i^{-1}(F_i(x))=gG^{-1}F(x)$, $g_iG_i^{-1}(F_{it}(x))=gG^{-1}F_t(x)$. 另外 $G_{1:n}^{-1}(F_{1:n}(x))=G^{-1}F(x)$, $G_{1:n}^{-1}(F_{1:t}(x))=G^{-1}F_t(x)$,因此

$$\begin{aligned}&\int_0^{F^{-1}(p)} gG^{-1}(F(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG^{-1}(F_t(x))\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^{F^{-1}(p)} gG_{1:n}^{-1}(F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{F_t^{-1}(p)} gG_{1:n}^{-1}(F_{1:t}(x))\,\mathrm{d}x=\\&\int_0^t g(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(x-F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))\geqslant 0.\end{aligned}$$

而 $\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 的密度函数 $g_{1:n}(x)=ng(x)\bar{G}^{n-1}(x)$,并且函数 $n\bar{G}^{n-1}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))$ 关于 $x\geqslant 0$ 递减,由引理 1 可得

$$\int_0^t g(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,n\bar{G}^{n-1}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(x-F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))\geqslant 0,$$

所以

$$\int_0^t g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(x-F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))\geqslant 0,$$

故

$$\int_0^t g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))\leqslant \int_0^t g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{F_{1:n}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))\leqslant \int_0^{F_{1:n}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{F_{1:n}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}(F_{1:t}^{-1}F_{1:n}(x))= \int_0^{F_{1:t}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:t}(x))\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{F_{1:t}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:t}(x))\,\mathrm{d}x\leqslant \int_0^{F_{1:n}^{-1}(p)} g_{1:n}(G_{1:n}^{-1}F_{1:n}(x))\,\mathrm{d}x.$$

因此关于 $\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 有

$$\min\{X_{1t},\cdots,X_{nt}\}\leqslant_{gttt}\min\{X_1,\cdots,X_n\}.$$

又由于 $\min\{X_{1t},\cdots,X_{nt}\}=_{st}(\min\{X_1,\cdots,X_n\})_t$,所以

$$(\min\{X_1,\cdots,X_n\})_t\leqslant_{gttt}\min\{X_1,\cdots,X_n\}.$$

故 $\min\{X_1,\cdots,X_n\}$ 关于 $\min\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 也是 GNBUT.

定理 7 设 $X_1,X_2,\cdots$ 与 $Y_1,Y_2,\cdots$ 分别是两个独立同分布随机变量序列,随机变量 N 是与这两个随机变量序列独立的正整值随机变量,并且 X_i 分别关于 Y_i 是 GNBUT,则 $\min\{X_1,\cdots,X_N\}$ 关于 $\min\{Y_1,\cdots,Y_N\}$ 也是 GNBUT.

2 结论

广义试验总时间变换序是试验总时间变换序的一种推广,相应的基于广义试验总时间变换序的 GNBUT 寿命分布也可以看作是 NBUT 寿命分布类的推广. 本文讨论了 GNBUT 寿命分布与 NBUT 寿命分布之间的关系,表明 GNBUT 寿命分布在一定条件下可以看成是 NBUT 寿命分布的推广. 考虑到寿命分布随机比较的复杂性以及系统结构的复杂性,在具体研究问题时我们往往以串联系统与并联系统为代表进行研究,或以串联系统与并联系统为研究问题的切入点. 因此本文给出了这类寿命分布在构成串联系统以及随机小下的封闭性质,推广了文献中的相关结果.

[参考文献]

[1] 王丰效. 平均样本间隔的性质及其在拍卖中的应用[J]. 数学的实践与认识,2007,37(5):60-64.

[2] 王丰效. Preservation property of NBUCA life distributions[J]. Chin Quart J of Math,2015,30(2):206-210.

[3] 王丰效. NBUCA 寿命分布在 L-S 变换的封闭性质[J]. 南京师大学报(自然科学版),2015,38(1):21-24.

[4] CHANG K H. Stochastic orders of the sums of two exponential random variables[J]. Statist Probab Lett,2001,51:389-396.

[5] CAO J,WANG Y. The NBUC and NWUC classes of life distributions[J]. Journal of applied probability,1991(28):473-479.

[6] KOCHAR S C,LI X,SHAKED M. The total time on test transform order and the excess wealth stochastic orders of life distributions[J]. Advances in applied probability,2002(34):826-845.

[7] BARTOSZEWICZ J. Dispersive ordering and the total time on test transformation[J]. Statistics and probability letters,1986(4):285-288.

[8] SHAKED M,SHANTHIKUMAR J G. Stochastic orders and their applications[M]. San Diago:Academic Press,1994.

[9] NEATH A V,SAMANIEGO F J. On the total time on test transform of an IFRA distribution[J]. Statistics and probability letters,1992(14):289-291.

[10] 李效虎,郝学奎. 广义试验总时间变换序的一些性质[J]. 兰州大学学报(自然科学版),2004,40(6):1-3.

[责任编辑:陆炳新]