doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.03.004

集值单调测度的自连续与伪自连续性

刘晨玉,吴健荣

(苏州科技大学数理学院,江苏 苏州 215009)

[摘要]　在集值单调测度空间上,给出了集值单调测度的集值零可加、集值自连续、集值一致自连续、集值伪零可加、集值伪自连续和集值伪一致自连续等性质,并讨论了它们之间的蕴涵关系.

[关键词]　集值分析,单调测度,自连续,伪自连续

[中图分类号]O159　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2017)03-0021-08

Autocontinuity and Pseudo-Autocontinuity of Set-Valued Monotone Measures

Liu Chenyu,Wu Jianrong

(College of Mathematics and Physics,Suzhou University of Science and Technology,Suzhou 215009,China)

Abstract: On monotone set-valued measure space, set-valued null-additive, set-valued autocontinuity, set-valued uniformly autocontinuity,set-valued pseudo-null-additive,set-valued pseudo-autocontinuity,set-valued uniformly pseudo-autocontinuity and so on,are defined. And some relationships among them are further discussed.

Key words:set-valued analysis,monotone measure,autocontinuity,pseudo-autocontinuity

单调测度是指在空集处取值为零的单调集函数.早在 20 世纪 50 年代 Choquet[1]提出了容度理论,之后 Dempster[2]研究了上、下概率,20 世纪 70 年代 Sugeno[3]又提出了模糊测度的概念,这些概念都属于单调测度的范畴.单调测度可以用于刻画一些不确定环境,特别在决策、人工智能、模式识别、数量经济等方面有重要应用[4],近年来,单调测度的研究得到了蓬勃的发展.例如:Li 和 Song[5]讨论了 Lebesgue 定理,Li 和 Mesiar[6]研究了度量空间上单调测度原子的性质;Watanabe[7]和 Watanabe 等[8]对取值于序 Banach 空间的单调测度,给出了 Egoroff 定理和 Lusin 定理等. Gagolewski 和 Mesiar[9]则利用单调测度构建了科学影响评价的一般模型.

由于单调测度不具有可加性,经典测度论中的一些重要内容不能直接推广至单调测度论中.为此,一些学者探索用一些较弱的“连续性”来代替“可加性”,建立起类似于经典测度论中的一些重要结论,取得了非常好的效果.例如:1984 年,王震源[10]在模糊测度中,首次提出自连续性、零可加性等重要概念,之后又分别在文献[11-12]中进一步提出伪自连续性、一致自连续性等重要概念,并把经典测度论中多个著名的定理推广到模糊测度空间上.2003 年以来,李军等[13-17]又对这些定理作出了进一步的推广.

文献[18]利用 $P_0(\mathbf{R})$(实数空间 $\mathbf{R}$ 上的全体非空子集)中一种不同于包含关系的序关系,首次提出集值模糊测度的相关理论;Sofian-Boca[19]和 Gavrilut[20]则利用这种序关系引入了 $\mathbf{R}$ 上的集值和区间值单调测度. 2008 年,高娜等[21]进一步将此序关系推广到了 m 维正实空间的全体非空子集 $P_0(R_+^m)$ 上,并讨论了取值于 $P_0(R_+^m)$ 的模糊测度的自连续、一致自连续、逆自连续、一致逆自连续性.针对该集值模糊测度,汪彬,王贵君[22]讨论了集值模糊测度的伪自连续和一致伪自连续性;赵新虎,王贵君[23]则研究了函数列的伪依集值模糊测度的收敛性.近年来,Precupanu、Gavrilut 等人[24-26]进一步将集值模糊测度推广到 n 维空间,利用集合的包含关系来描述集值单调测度的单调性,并在集值单调测度空间上研究了正则性、Egoroff 型定理、Lusin 型定理等问题.

收稿日期:2016-11-18.
基金项目:国家自然科学基金(11371013).
通讯联系人:吴健荣,教授,研究方向:非线性分析. E-mail:jrwu@ mail.usts.edu.cn

2015 年,开学文等[27]利用文献[21]中提出的 $P_0(R_+^m)$ 上的序结构,给出了集值单调测度的概念和集值单调测度空间上可测函数列的几种重要收敛概念,并把经典测度论中的 Lebesgue 定理、Egoroff 定理推广到了集值单调测度空间上.

鉴于连续性在非可加测度中的重要性,本文将在文献[27]的基础上,引入集值单调测度的自连续、零可加、伪自连续、伪零可加等概念,重点讨论它们之间的关系,进一步完善集值单调测度的理论.由于集值单调测度以集值测度、集值模糊测度、单调测度为特例,因此本文所得到的结论具有相当的宽泛性.

1　预备知识

本文一律用 $\mathbf{R}_+$ 表示全体非负实数,X 表示任意非空集合,Ω 为 X 上的一个 σ-代数,(X,Ω) 为任意可测空间.$R_+^m=\{x;x=(x_1,x_2,\cdots,x_m),x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m\}$ 表示 m 维正欧式空间,$P_0(R_+^m)$ 表示 m 维正欧式空间 R_+^m 中全体非空子集构成的集类.并规定 $P_0(R_+^m)$ 中的运算如下:$\forall \bar{A},\bar{B}\in P_0(R_+^m)$, $\forall \alpha\in \mathbf{R}^+$,

$$\bar{A}\pm\bar{B}=\{\bar{a}\pm\bar{b}\mid \bar{a}\in\bar{A},\bar{b}\in\bar{B}\},$$

$$\alpha\pm\bar{A}=\bar{\alpha}\pm\bar{A},\text{其中 }\bar{\alpha}=(\alpha,\alpha,\cdots,\alpha),$$

$$\alpha\cdot\bar{A}=\{\alpha\cdot\bar{a}\mid \bar{a}\in\bar{A}\},$$

设 $\bar{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in R_+^m$,$\bar{A}\in P_0(R_+^m)$,规定 $\|\bar{a}\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}a_i$, $\|\bar{A}\|=\sup\limits_{\bar{a}\in\bar{A}}\|\bar{a}\|$.

定义 1[21]　设 $\bar{A},\bar{B}\in P_0(R_+^m)$,如果满足条件:

(1) $\forall \bar{a}\in\bar{A}$, $\exists \bar{b}\in\bar{B}$,使 $\|\bar{a}\|\leqslant\|\bar{b}\|$,

(2) $\forall \bar{b}\in\bar{B}$, $\exists \bar{a}\in\bar{A}$,使 $\|\bar{a}\|\leqslant\|\bar{b}\|$,

则称 $\bar{A}$ 弱于 $\bar{B}$,或称 $\bar{B}$ 强于 $\bar{A}$,记为 $\bar{A}\prec\bar{B}$ 或 $\bar{B}\succ\bar{A}$.

根据定义,很明显可得下列性质:

(1)设 $\phi\neq\bar{A},\bar{B}\in P_0(R_+^m)$,若 $\bar{A}\prec\bar{B}$ 且 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta$,则 $\bar{A}+\alpha\prec\bar{B}+\beta,\alpha\cdot\bar{A}\prec\alpha\cdot\bar{B}$;

(2)若 $\bar{A},\bar{B},\bar{C}\in P_0(R_+^m)$,$\bar{A}\prec\bar{B}$ 且 $\bar{B}\prec\bar{C}$,则 $\bar{A}\prec\bar{C}$.

注 1　若 $\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}\in P_0(R_+^m)$,$\bar{A}\prec\bar{B}$ 且 $\bar{C}\prec\bar{D}$,但 $\bar{A}+\bar{C}\prec\bar{B}+\bar{D}$ 不一定成立.例如:

设 $\bar{A}=\{(1,2,3),(3,1,2)\}$,$\bar{B}=\{(1,1,3),(1,3,1)\}$,$\bar{C}=\{(2,2,2),(1,2,1)\}$,$\bar{D}=\{(4,3,1),(2,0,1)\}$,则显然有 $\bar{A}\prec\bar{B}$,$\bar{B}\prec\bar{A}$,$\bar{C}\prec\bar{D}$,$\bar{D}\nprec\bar{C}$,但是 $\bar{A}+\bar{C}=\{(3,4,5),(2,4,4),(5,3,4),(4,3,3)\}\nprec\bar{B}+\bar{D}=\{(5,4,4),(3,1,4),(5,6,2),(3,3,2)\}$.

定义 2[21]　设 $\bar{A},\bar{B}\in P_0(R_+^m)$,若 $\bar{A}\prec\bar{B}$ 且 $\bar{B}\prec\bar{A}$,则称 $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 拟等价,记为 $\bar{A}\approx\bar{B}$.

注 2　显然,$P_0(R_+^m)$ 中两个拟等价的元素作为集合并不一定相等,但 $\bar{A}\approx\{\bar{0}\}$ 等同于 $\bar{A}=\{\bar{0}\}$.

注 3　“拟等价”是 $P_0(R_+^m)$ 中的一种等价关系,可作商空间 $P_0(R_+^m)/\approx$,将每个等价类中元素不作区分,用一个元素来代表.在此意义下,$\bar{A}\approx\bar{B}$ 也常写成 $\bar{A}=\bar{B}$.

定义 3[22]　若 $\{\bar{A}_n\}$,$\bar{A}\in P_0(R_+^m)$,如果 $\forall\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有 $\bar{A}\prec\varepsilon+\bar{A}_n$ 且 $\bar{A}_n\prec\varepsilon+\bar{A}$,则称 $\{\bar{A}_n\}$ 依序 $\prec$ 拟等价收敛于 $\bar{A}$,记为 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\bar{A}_n=\bar{A}$.

注 4　这里的极限定义与[21]中的稍有不同. 用不等式组“$\bar{A}\prec\varepsilon+\bar{A}_n$ 且 $\bar{A}_n\prec\varepsilon+\bar{A}$”,代替[21]中的“$\bar{A}-\varepsilon\prec\bar{A}_n\prec\bar{A}+\varepsilon$”,这是考虑到 $\bar{A}-\varepsilon$ 未必再属于 $P_0(R_+^m)$.

注 5　由注 2 及注 3,除极限值为 $\{\bar{0}\}$ 外,上述极限在集合相等意义下一般是不唯一的;若把 $P_0(R_+^m)$ 中“拟等价”的元素视为同一元素,则极限是唯一.

定义 4[27]　设 (X,Ω) 为可测空间,集函数 $\pi:\Omega\to P_0(R_+^m)$ 满足以下条件:

(1) $\pi(\Phi)=\{\bar{0}\}$,

(2)(单调性)若 $\forall A,B\subset\Omega$,且 $A\subset B$,则有 $\pi(A)\prec\pi(B)$,

则称 π 为 (X,Ω) 上的集值单调测度,称 (X,Ω,π) 为集值单调测度空间.

本文余下部分中,总令 (X,Ω,π) 为集值单调测度空间(有时简记为 X).

2 集值单调测度的自连续性

定义 5 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,若 $\forall A,B\in\Omega$ 且 $\pi(B)=\{\bar{0}\}$,有 $\pi(A\cup B)=\pi(A)$(分别地,$\pi(A\backslash B)=\pi(A)$),则称 π 是集值零可加的(分别地,π 是集值零可减的).

定义 6 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,若 $\forall\{A_n\}\subset\Omega, A_n\downarrow\Phi$ 即 $A_{n+1}\subset A_n(\forall n\in\mathbf{N})$ 且 $\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\Phi$,有 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A_n)=\{\bar{0}\}$,则称 π 是集值序连续的.

定义 7 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1) $\forall\{A_n\}\subset\Omega, A\in\Omega$,当 $A_n\downarrow A$ 且存在某个 n_0 使 $\|\pi(A_{n_0})\|<\infty$ 时,必有 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A_n)=\pi(A)$,则称 π 是集值上连续的;当 $A_n\uparrow A$ 时,必有 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A_n)=\pi(A)$,则称 π 是集值下连续的.

(2)若 π 既是集值上连续的,又是集值下连续的,则称 π 是集值连续的.

定义 8 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1)若 $\forall A\in\Omega,\forall\{B_n\}\subset\Omega$ 且 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(B_n)=\{\bar{0}\}$,有 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A\cup B_n)=\pi(A)$(分别地,$\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A\backslash B_n)=\pi(A)$),则称 π 是集值上自连续的(分别地,集值下自连续的).

(2)若 π 既是集值上自连续的,又是集值下自连续的,则称 π 是集值自连续的.

定义 9 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1)若 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$ 且 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有 $\pi(A\cup B)\prec\pi(A)+\varepsilon$(分别地,$\pi(A)\prec\pi(A\backslash B)+\varepsilon$),则称 π 是集值一致上自连续的(分别地,π 是集值一致下自连续的).

(2)若 π 既是集值一致上自连续的,又是集值一致下自连续的,则称 π 是集值自连续的.

定理 1 集值单调测度 π 的集值零可加性与集值零可减性等价.

证明 设 $\forall A,B\in\Omega,\pi(B)=\{\bar{0}\}$.

(1)若 π 是集值零可加的,由 π 的单调性,可得 $\pi(A\cap B)=\{\bar{0}\}$.

又因为 $A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$,结合 π 的集值零可加性,可得

$$\pi(A)=\pi((A\backslash B)\cup(A\cap B))=\pi(A\backslash B),$$

即得 π 是集值零可减的.

(2)若 π 是集值零可减的,由 π 的单调性,可得 $\pi(B\backslash A)=\{\bar{0}\}$.

又因为 $A=(A\cup B)\backslash(B\backslash A)$,结合 π 的集值零可减性,可得

$$\pi(A)=\pi((A\cup B)\backslash(B\backslash A))=\pi(A\cup B),$$

即得 π 是集值零可加的.

定理 2 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1)若 π 是集值上自连续的,则 π 是集值零可加的.

(2)若 π 是集值下自连续的,则 π 是集值零可减的.

证明 由定义可易得证.

定理 3 设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1)若 π 是集值序连续且集值上自连续的,则 π 是集值上连续的.

(2)若 π 是集值序连续且集值下自连续的,则 π 是集值下连续的.

证明 (1)设 $\{A_n\}\subset\Omega, A\in\Omega, A_n\downarrow A$ 且存在某个 n_0 使 $\|\pi(A_{n_0})\|<\infty$,并令 $B_n=A_n\backslash A$,则 $B_n\downarrow\Phi$.由 π 是集值序连续的,可得

$$\overset{\wedge}{\lim_{n\to\infty}}\pi(B_n)=\{\bar{0}\}.$$

又由 $A_n=A\cup B_n$ 和 π 的集值上自连续性,可得

$$\overset{\wedge}{\lim_{n\to\infty}}\pi(A_n)=\overset{\wedge}{\lim_{n\to\infty}}\pi(A\cup B_n)=\pi(A).$$

所以 π 是集值上连续的.

类似方法可证(2).

定理 4　设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,

(1)若 π 是集值一致上自连续的,则 π 是集值上自连续的;

(2)若 π 是集值一致下自连续的,则 π 是集值下自连续的.

证明　(1)设 $\forall A,B\in\Omega$, $\forall\{B_n\}\subset\Omega$ 且 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(B_n)=\{\bar{0}\}$,由于 π 是集值一致上自连续的,则 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有

$$\pi(A\cup B)\prec\pi(A)+\varepsilon.$$

由于 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(B_n)=\{\bar{0}\}$,可知必存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有 $\pi(B_n)\prec\{0\}+\delta=\{\bar{\delta}\}$,从而有 $\forall\varepsilon>0$,

$$\pi(A\cup B_n)\prec\pi(A)+\varepsilon.$$

另一方面,因为 $A\subset A\cup B_n$ 和 π 的单调性,所以

$$\pi(A)\prec\pi(A\cup B_n)+\varepsilon.$$

从而得到

$$\overset{\wedge}{\lim_{n\to\infty}}\pi(A\cup B_n)=\pi(A),$$

即得 π 是集值上自连续的.

类似方法可证(2).

定理 5　设 π 是 (X,Ω) 上的集值单调测度,则下列命题等价:

(1) π 是集值一致自连续的;

(2) π 是集值一致上自连续的;

(3) π 是集值一致下自连续的;

(4) $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有 $\pi(A)\prec\pi(A\Delta B)+\varepsilon$ 和 $\pi(A\Delta B)\prec\pi(A)+\varepsilon$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2)显然成立.

(2)$\Rightarrow$(3)因为 π 是集值一致上自连续的,所以 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有 $\pi(A\cup B)\prec\pi(A)+\varepsilon$.

由 π 的单调性,可知 $\pi(A\cap B)\prec\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$.又因为 $A=(A\backslash B)\cup(A\cap B)$,则可得

$$\pi(A)=\pi((A\backslash B)\cup(A\cap B))\prec\pi(A\backslash B)+\varepsilon.$$

所以 π 是集值一致下自连续的.

(3)$\Rightarrow$(4)因为 π 是集值一致下自连续的,所以 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有 $\pi(A)\prec\pi(A\backslash B)+\varepsilon$.

由 π 的单调性,可知 $\pi(A\cap B)\prec\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$, $\pi(A)\prec\pi(A\cup B)$.又因为 $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$,所以可得

$$\pi(A)\prec\pi(A\cup B)\prec\pi((A\cup B)\backslash(A\cap B))+\varepsilon=\pi(A\Delta B)+\varepsilon.$$

另一方面,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时, $\pi(B\backslash A)\prec\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$.又因为 $A\backslash B=(A\Delta B)\backslash(B\backslash A)$,所以可得

$$\pi(A\Delta B)\prec\pi((A\Delta B)\backslash(B\backslash A))+\varepsilon=\pi(A\backslash B)+\varepsilon\prec\pi(A)+\varepsilon.$$

即证.

(4)$\Rightarrow$(1) $\forall\varepsilon>0$,由假设可知存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时,有 $\pi(A)\prec\pi(A\Delta B)+\varepsilon$ 和 $\pi(A\Delta B)\prec\pi(A)+\varepsilon$.

注意到,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时, $\pi(B\backslash A)\prec\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$.又因为 $A\cup B=A\Delta(B\backslash A)$,所以有

$$\pi(A\cup B)=\pi(A\Delta(B\backslash A))\prec\pi(A)+\varepsilon,$$

则 π 是集值一致上自连续的.

另一方面,当 $\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$ 时, $\pi(A\cap B)\prec\pi(B)\prec\{\bar{\delta}\}$.又 $A\backslash B=A\Delta(A\cap B)$,所以有

$$\pi(A)\prec\pi(A\Delta(B\cap A))=\pi(A\backslash B)+\varepsilon,$$

则 π 是集值一致下自连续的.从而 π 是集值一致自连续的.

3 集值单调测度的伪自连续性

定义 10 设 π 是(X,Ω)上的集值单调测度,若 $\forall A,B\in\Omega$ 当 $\pi(A\cap B)=\pi(A)$ 时,$\forall C\in A\cap\Omega$,有 $\pi((A\backslash B)\cup C)=\pi(C)$(分别地,$\pi(B\cap C)=\pi(C)$),则称 π 是集值伪零可加的(分别地,π 是集值伪零可减的).

定义 11 设 π 是(X,Ω)上的集值单调测度,

(1)若 $\forall A\in\Omega$, $\{B_n\}\subset\Omega$, 当 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A\cap B_n)=\pi(A)$ 时,有 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi((A\backslash B_n)\cup C)=\pi(C)$(分别地,$\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(B_n\cap C)=\pi(C)$),则称 π 是集值伪上自连续的(分别地,π 是集值伪下自连续的).

(2)若 π 既是集值伪上自连续的,又是集值伪下自连续的,则称 π 是集值自连续的.

定义 12 设 π 是(X,Ω)上的集值单调测度,

(1)若 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$, 当 $\|\pi(A)\|<\infty$ 且 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时,$\forall C\in A\cap\Omega$,有 $\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon$(分别地,$\pi(C)\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon$),则称 π 是集值一致伪上自连续的(分别地,π 是集值一致伪下自连续的).

(2)若 π 既是集值一致伪上自连续的,又是集值一致伪下自连续的,则称 π 是集值伪自连续的.

定理 6 集值单调测度 π 的集值伪零可加性与集值伪零可减性等价.

证明 设 $\forall A,B\in\Omega$ 且 $\pi(A\cap B)=\pi(A)$, $\forall C\in A\cap\Omega$,

(1)若 π 是集值伪零可加的,则有 $\pi(C)=\pi((A\backslash B)\cup C)$. 因为

$$\begin{aligned}(A\backslash B)\cup(B\cap C)=(A\cap B^c)\cup(B\cap C)&=(A\cup(B\cap C))\cap(B^c\cup(B\cap C))=\\&((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap((B^c\cup B)\cap(B^c\cup C))=A\cap(B^c\cup C)=\\&(A\cap B^c)\cup(A\cap C)=(A\cap B^c)\cup C=(A\backslash B)\cup C,\end{aligned}$$

所以

$$\pi((A\backslash B)\cup(B\cap C))\approx\pi((A\backslash B)\cup C)\approx\pi(C).$$

又 $B\cap C\subseteq C\in A\cap\Omega$,可得

$$\pi((A\backslash B)\cup(B\cap C))=\pi(B\cap C).$$

从而得到

$$\pi(B\cap C)=\pi(C),$$

即得 π 是集值伪零可减的.

(2)若 π 是集值伪零可减的,则有 $\pi(B\cap C)=\pi(C)$. 因为

$$((A\backslash B)\cup C)\cap B=((A\backslash B)\cap B)\cup(B\cap C)=B\cap C,$$

所以 $\pi(((A\backslash B)\cup C)\cap B)=\pi(B\cap C)=\pi(C)$.

又$(A\backslash B)\cup C\in A\cap\Omega$,可得

$$\pi(((A\backslash B)\cup C)\cap B)=\pi((A\backslash B)\cup C).$$

从而得到

$$\pi((A\backslash B)\cup C)=\pi(C),$$

即得 π 是集值伪零可加的.

定理 7 设 π 是(X,Ω)上的集值单调测度,

(1)若 π 是集值伪上自连续的,则 π 是集值伪零可加的.

(2)若 π 是集值伪下自连续的,则 π 是集值伪零可减的.

证明 由定义可易得证.

定理 8 设 π 是(X,Ω)上的集值单调测度,

(1)若 π 是集值一致伪上自连续的,则 π 是集值伪上自连续的.

(2)若 π 是集值一致伪下自连续的,则 π 是集值伪下自连续的.

证明 (1)设 $\forall A,B\in\Omega$, $\|\pi(A)\|<\infty$, $\{B_n\}\subset\Omega$ 且 $\overset{\wedge}{\lim\limits_{n\to\infty}}\pi(A\cap B_n)=\pi(A)$.因为 π 是集值一致伪上自

连续的,则 $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall C\in A\cap\Omega$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时,有

$$\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon.$$

由于 $\mathop{\overset{\wedge}{\lim}}\limits_{n\to\infty}\pi(A\cap B_n)=\pi(A)$,可知必存在自然数 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B_n)+\{\bar{\delta}\}$,从而有

$$\pi((A\backslash B_n)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon.$$

又因为 $C\subset(A\backslash B_n)\cup C$ 和 π 的单调性,所以可得

$$\pi(C)\prec\pi((A\backslash B_n)\cup C)+\varepsilon.$$

从而得到

$$\mathop{\overset{\wedge}{\lim}}\limits_{n\to\infty}\pi((A\backslash B_n)\cup C)=\pi(C),$$

所以 π 是集值上自连续的.

类似方法可证(2).

定理 9　设 π 是一个集值单调测度,则下列命题等价:

(1) π 是集值一致伪自连续的;

(2) π 是集值一致伪上自连续的;

(3) π 是集值一致伪下自连续的;

(4) $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$, $\forall C\in A\cap\Omega$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时,有

$$\pi((A\backslash B)\Delta C)\prec\pi(C)+\varepsilon \text{ 和 } \pi(C)\prec\pi((A\backslash B)\Delta C)+\varepsilon.$$

证明　(1)$\Rightarrow$(2) 显然成立.

(2)$\Rightarrow$(3) 因为 π 是集值一致伪上自连续的,则 $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$, $\|\pi(A)\|<\infty$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时, $\forall C\in A\cap\Omega$,有

$$\pi\|(A\backslash B)\cup C\|\prec\pi(C)+\varepsilon.$$

由 $C\in A\cap\Omega$ 可知 $C\subseteq A$,则有

$$C=(C\cap B)\cup(C\backslash B)\subseteq(C\cap B)\cup(A\backslash B).$$

又 $A\backslash B\subseteq A$,由 π 的单调性和集值一致伪上自连续性,得到

$$\pi(C)\prec\pi((B\cap C)\cup(A\backslash B))\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon.$$

所以 π 是集值一致伪下自连续的.

(3)$\Rightarrow$(2) 因为 π 是集值一致伪下自连续的,则 $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$, $\|\pi(A)\|<\infty$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时, $\forall C\in A\cap\Omega$,有

$$\pi(C)\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon.$$

由 $C\in A\cap\Omega$ 可知 $(A\backslash B)\cup C\in A\cap\Omega$,所以有

$$\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(((A\backslash B)\cup C)\cap B)+\varepsilon.$$

又

$$((A\backslash B)\cup C)\cap B=((A\backslash B)\cap B)\cup(B\cap C)=B\cap C,$$

则由 π 的单调性,可得

$$\pi(((A\backslash B)\cup C)\cap B)\approx\pi(B\cap C)\prec\pi(C).$$

从而有

$$\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon,$$

所以 π 是集值一致伪上自连续的.

(3)$\Rightarrow$(4) 由上面证明可知已知(3)$\Leftrightarrow$(2),故 π 既是集值一致伪上自连续的,也是集值一致伪下自连续的,则 $\forall \varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$, $\|\pi(A)\|<\infty$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时, $\forall C\in A\cap\Omega$,有

$$\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon \text{ 和 } \pi(C)\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned}(A\backslash B)\Delta C=&((A\backslash B)\cup C)\backslash((A\backslash B)\cap C)=((A\backslash B)\cup C)\cap((A\backslash B)\cap C)^c=\\&((A\backslash B)\cup C)\cap((A\backslash B)^c\cup C^c)=(((A\backslash B)\cup C)\cap(A\backslash B)^c)\cup(((A\backslash B)\cup C)\cap C^c)=\\&(C\cap(A\backslash B)^c)\cup((A\backslash B)\cap C^c)=(C\cap(A^c\cup B))\cup((A\backslash B)\cap C^c)\supseteq B\cap C,\end{aligned}$$

所以有

$$B\cap C\subseteq(A\backslash B)\Delta C\subseteq(A\backslash B)\cup C.$$

再结合 π 的单调性和集值一致伪自连续性,可得

$$\pi((A\backslash B)\Delta C)\prec\pi((A\backslash B)\cup C)\prec\pi(C)+\varepsilon$$

和

$$\pi(C)\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon\prec\pi((A\backslash B)\Delta C)+\varepsilon,$$

即证.

(4)⇒(1)设 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得 $\forall A,B\in\Omega$,当 $\pi(A)\prec\pi(A\cap B)+\{\bar{\delta}\}$ 时,$\forall C\in A\cap\Omega$,有

$$\pi((A\backslash B)\Delta C)\prec\pi(C)+\varepsilon \text{ 和 } \pi(C)\prec\pi((A\backslash B)\Delta C)+\varepsilon.$$

由 $C\in A\cap\Omega$ 可知 $C\subseteq A$,则

$$C=(C\backslash B)\cup(C\cap B)\subseteq(A\backslash B)\cup(C\cap B).$$

又

$$(A\backslash B)\Delta(C\cap B)=((A\backslash B)\cup(C\cap B))\backslash((A\backslash B)\cap(C\cap B))=(A\backslash B)\cup(C\cap B),$$

则有

$$C\cap B\subseteq C\subseteq(A\backslash B)\Delta(C\cap B).$$

于是可得

$$\pi(C)\prec\pi((A\backslash B)\Delta(C\cap B))\prec\pi(B\cap C)+\varepsilon,$$

即得 π 是集值一致伪下自连续的.又由(3)⇒(2)可知 π 是集值一致伪上自连续的,所以 π 是集值一致伪自连续的.

[参考文献]

[1] CHOQUET G. Theory of capacities[J]. Annales de l'institute Fourier,1954,5:131-295.

[2] DEMPSTER A P. Upper and lower probabilities induced by multi-valued mapping[J]. Ann Math Statist,1967,38:325-339.

[3] SUGENO M. Theory of fuzzy integrals and its applications[D]. Tokyo:Tokyo Institute of Technology,1974.

[4] LIGINLAL O,OW T T. Moduling attitude to risk in human decision process:an application of fuzzy measures[J]. Fuzzy sets and systems,2006,157:3 040-3 054.

[5] LI J,SONG J J. Lebesgue theorems in non-additive measure theory[J]. Fuzzy sets and systems,2005,149:543-548.

[6] LI J,MESIAR R,PAP E. Atoms of weakly null-additive monotone measures and integrals[J]. Information sciences,2014,257:183-192.

[7] WATANABE T. On sufficient conditions for the Egoroff theorem of an ordered topological vector space-valued non-additive measure[J]. Fuzzy sets and systems,2011,162:79-83.

[8] WATANABE T,KAWASAKI T,TANAKA T. On a sufficient condition of Lusin's theorem for non-additive measures that take values in an ordered topological vector space[J]. Fuzzy sets and systems,2012,194:66-75.

[9] GAGOLEWSKI M,MESIAR R. Monotone measures and universal integrals in a uniform framework for the scientific impact assessment problem[J]. Information sciences,2014,263:166-174.

[10] WANG Z. The autocontinuity of set function and the fuzzy integral[J]. J Math Anal Appl,1984,99:195-218.

[11] WANG Z. Asymptotic structural characteristics of fuzzy measures and their applications[J]. Fuzzy sets and systems,1985,16:277-290.

[12] WANG Z,KLIR G J. Fuzzy measure theory[M]. New York:Plenum Press,1992.

[13] LI J. Order continuity of monotone set function and convergence of measurable functions sequence[J]. Applied mathematics and computation,2003,135:211-218.

[14] LI J. On Egoroff's theorems on fuzzy measure space[J]. Fuzzy sets and systems,2003,135:367-375.

[15] LI J,OUYANG Y,YASUDA M.Pseudo-convergence of measurable functions on Sugeno fuzzy measure space[C]//Proceeding of the 17th Joint Conference on Information Science,North Carolina,2003:56-59.

[16] SONG J J,LI J. Regularity of null-additive fuzzy measure on metric spaces[J]. International journal of general systems,2003,32(3):271-279.

[17] 李桂玲,李军. 单调集函数的连续性与可测函数序列的收敛[J]. 模糊系统与数学,2005,19(3):111-115.

[18] GUO C,ZHANG D. On set-valued fuzzy measures[J]. Information sciences,2004,160:13-25.

[19] SOFIAN B F N. Another Gould type integral with respect to a multisubmeasure[J]. Annals of the alexandru ioan cuza university-mathematics,2011,57:13-30.

[20] GAVRILUT A C. Remarks on monotone interval-valued set multifunctions[J]. Information sciences,2014,259:225-230.

[21] 高娜,李艳红,王贵君. 集值模糊测度的自连续性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2008,31(4):386-389.

[22] 汪彬,王贵君. 新序意义下集值模糊测度的伪自连续性[J]. 模糊系统与数学,2010,24(2):88-92.

[23] 赵新虎,王贵君. 新序结构下函数列的伪依集值模糊测度收敛[J]. 模糊系统与数学,2011,25(2):2-6.

[24] GAVRILU A. Properties of regularity for multisubmeasures[J]. Annals of the alexandru ioan cuza university-mathematics, 2004,50:373-392.

[25] PRECUPANU A,GAVRILUT A. A set-valued Egoroff type theorem[J]. Fuzzy sets and systems,2011,175:87-95.

[26] PRECUPANU A,GAVRILUT A. Set-valued Lusin type theorem for null-null-additive set multifunctions[J]. Fuzzy sets and systems,2012,204:106-116.

[27] 开学文,吴健荣,李姣姣. 集值单调测度空间上的 Lesbegue 与 Egoroff 定理[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2015,40(8):10-15.

[责任编辑:陆炳新]