

# 面向多旅行商问题的多目标模拟退火算法研究

梁星星<sup>1</sup>, 马 扬<sup>1</sup>, 冯旸赫<sup>1</sup>, 张广平<sup>2</sup>, 马 豪<sup>3</sup>

(1.国防科技大学信息系统工程重点实验室, 湖南 长沙 410072)

(2.中国人民解放军 31111 部队, 江苏 南京 210023)

(3.中国西安卫星测控中心, 陕西 西安 710043)

**[摘要]** 多旅行商问题是经典旅行商问题的一种演化, 考虑一些约束, 可以转换为一些较现实的问题, 具有较高的理论研究和应用价值. 在多旅行商问题中, 一个任务由多位旅行商共同完成, 问题的求解难度较经典旅行商问题更大. 现有的研究中指定旅行商个数, 将问题转换为固定数量的多旅行商问题. 本文构建了求解 pareto 解的多目标多旅行商问题模型, 针对一定规模的城市数量和约束的问题, 获得多旅行商问题中旅行商的合适数量. 本文将旅行商的个数和多旅行商的最长访问路径作为优化目标, 采用改进的多目标模拟退火(IMOSA)算法和传统的多目标遗传算法对问题进行了求解. 采用 30 个城市的旅行商问题对两种算法进行了测试, 发现改进的多目标模拟退火算法相较于多目标遗传算法计算复杂度低, 且能发现较好的 pareto 解, 算法性能更优.

**[关键词]** 多旅行商问题, 多目标优化, 模拟退火, 遗传算法, 算法比较

**[中图分类号]** TP311 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2017)03-0080-07

## Research on Multi-objective Simulated Annealing Algorithm for Multi-traveling Salesman Problem

Liang Xingxing<sup>1</sup>, Ma Yang<sup>1</sup>, Feng Yanghe<sup>1</sup>, Zhang Guangping<sup>2</sup>, Ma Hao<sup>3</sup>

(1.Science and Technology on Information Systems Engineering Laboratory, College of Information System and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China)

(2.The PLA 31111 Troops, Nanjing 210023, China)

(3.China Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, China)

**Abstract:** Multi-traveling salesman problem is an evolution of the classic traveler problem. Considering some constraints, it can be converted into some more realistic problems, with high theoretical research and application value. In the multi-traveling salesman problem, a task is completed by a number of travel agents, the problem is more difficult than the classic traveler problem. In the existing study, they convert the problem into a fixed number of traveling salesmen problem. In this paper, we construct a multi-objective multi-traveling salesman problem model for seeking the pareto solution. In view of the problem of the number of cities and the constraints of a certain scale, we obtain the number of traveling salesmen of the problem. In this paper, the number of traveler and the longest access path of multi-traveler are taken as the optimization target. The improved multi-objective simulated annealing (IMOSA) algorithm and multi-objective genetic algorithm are used to solve the problem. The results show that the improved multi-objective simulated annealing algorithm is more complex than the multi-objective genetic algorithm and can find a better pareto solution and the algorithm performance is better than that of the multi-objective genetic algorithm.

**Key words:** multiple traveling salesmen problem, multi-objective optimization, simulated annealing algorithm, genetic algorithm, algorithm comparison

多旅行商问题(Multiple Traveling Salesman Problem, MTSP)是对经典旅行商问题(TSP)的推广, 即给定  $n$  个城市,  $m$  个旅行商从同一(或不同)城市出发, 分别走一条旅行路线, 使得每个城市有且仅有一个旅行商经过(除出发城市), 同时花费最小, 花费可以是距离、时间、费用等<sup>[1-4]</sup>. 相较于 TSP, MTSP 具有更广

收稿日期: 2017-03-18.

基金项目: 国家自然科学基金(71471174).

通讯联系人: 梁星星, 博士研究生, 研究方向: 多 Agent 强化学习. E-mail: doublestar\_l@163.com

泛的工程背景,如车辆路径规划<sup>[5]</sup>、应急物资配送<sup>[6]</sup>、无人机覆盖搜索<sup>[7]</sup>和不合格品控制<sup>[8]</sup>等. MTSP 已被证明属于 NP-hard 问题. 对于 MTSP 的求解算法,人们从生物机理中得到启发,提出了多种进化算法,如遗传算法<sup>[9-11]</sup>、蚁群算法<sup>[12-13]</sup>、蜂群算法<sup>[14]</sup>和杂草入侵算法<sup>[15]</sup>. 但是这些研究都在给定的旅行商数量的情况下进行研究,没有给出一种求解旅行商数量的有效方法. 对于现实情况,例如某快递公司根据财务能力,可以雇佣 5 名快递员对城市进行配送,要求每名快递员走的路径尽可能的短,实际情况可能雇佣 3 人就可以达到目标,从而减少人力支出;类似的有无人机调度,派出多少数量的无人机对指定数量的目标进行观测等. 从上分析可得,对于 MTSP 中旅行商数量的研究具有现实意义和价值.

本文提出了一种改进的多目标模拟退火算法(IMOSA),对多目标中的目标进行拆解,在分别求得给定旅行商数量  $N$  的前提下,求出第二个优化目标的最优解,构成一个 pareto 解,之后对 pareto 解进行非支配排序,获得多目标问题的最终 pareto 解. 该算法对目标进行拆解,有效降低了非支配排序的次数,大大降低了求解多目标 pareto 解的时间复杂度.

本文第一节对多旅行商问题中的多目标优化模型进行了设计,确定了问题的优化目标. 第二节对此问题下的多目标模拟退火算法进行了分析与设计. 第三节采用了 30 个城市的旅行商问题数据集,首先利用多目标的遗传算法对问题进行求解,其次采用本文设计的多目标模拟退火算法对问题进行了求解. 第四节对遗传算法和模拟退火的算法进行了结果比较,并分析了两种算法的性能差异. 第五节对已有研究工作总结,总结全文,并对未来值得关注的研究方向进行初步探讨.

## 1 问题表达

本文针对多旅行商问题中的旅行商数量问题进行研究,为满足一定路径长度等要求,采用多目标优化的方法,来求解出合适的旅行商数量.

本文设计的优化目标如式(1)和(2)所示,旅行商的数量  $N$  尽可能的少;同时,在旅行商数量为  $N$  的情况下,每个旅行商  $i$  从某一固定点出发,访问其所分配的城市后回到初始地点,所走的路径  $dis_i$  尽可能的短.  $N$  个旅行商中,所走距离最远的旅行商所走的路径尽可能的小,即  $Dis$  尽可能的小.

$$\min N, \quad (1)$$

$$Dis = \min \{ \max \{ dis_i | i = 1, 2, \dots, N \} \}. \quad (2)$$

这两个优化目标之间相互矛盾,前者的目标函数的最小化是以后者目标函数的增大为代价的,本文需要找出这两个优化目标的 pareto 解. 当  $N$  较小时,  $Dis$  较大;当  $N$  较大时,  $Dis$  较小. 当  $N$  趋向于城市的数量的时候,  $Dis$  趋向于出发城市与最远城市间的距离的 2 倍.  $Dis$  具有下界,  $N$  的上界为城市数量.

## 2 改进的多目标模拟退火算法(IMOSA)算法

### 2.1 IMOSA 算法的设计

(1)解的编码:IMOSA 算法将多旅行商的问题编为一组解,在解中采用标志位进行. 如图 1 所示,采用 2 个旅行商对编码为 0-10 的 11 个城市进行访问,假定所有的旅行商从城市 0 出发,标志位 -1 用以将旅行商的访问城市分开,旅行商 1 的访问城市顺序为 0→1→2→7→5→6→3→0,旅行商 2 的访问顺序为 0→9→10→8→4→0.

1	2	7	5	6	3	-1	9	10	8	4
---	---	---	---	---	---	----	---	----	---	---

图 1 解的编码方式

Fig. 1 Encoding of the solution

(2)适应值函数构造:求解每个旅行商的访问距离,取它们的最大值作为第二个优化目标,当次计算中旅行商的数量作为第一个优化目标. 如图 1 所示的解,第一个旅行商的访问距离为  $dis_1 = 300$ ,第二个访问距离为  $dis_2 = 270$ ,则第一个优化目标值为  $N = 2$ ,第二个优化目标为  $Dis = 300$ .

(3)初始状态设定:设定模拟算法的初始高温  $T_0$ ,终止温度  $T_f$ ,降温函数  $\Delta T$  以及等温过程中的迭代次数  $n(T_k)$ .

(4)邻域解:本文定义解的邻域为一次随机插入调整. 对于图 1 所示的例子,移动的城市为城市 6,移动到第 8 个位置,则原解变化为图 2 所示. 如果标志位 -1 移动到了第一位或者最后一位,或者两个标志位相邻,则此次移动失败,不计入迭代

1	2	7	5	6	3	-1	9	10	8	4
1	2	7	5	3	-1	9	6	10	8	4

图 2 邻域解的产生方式

Fig. 2 The generation of neighborhood solutions

次数,重新移动,如图 3 所示,出现三种情况之一皆为无效插入.

(5)邻域解的接受概率:邻域解的接受概率根据玻尔兹曼方程获得,解  $i$  转换为解  $j$  的概率遵从式(3), $T$  表示当前降温过程中所处的温度状态, $k$  表示一个常量.



图 3 不可行解的形式  
Fig. 3 Infeasible form

$$P_{i \rightarrow j} = \begin{cases} 1, & Dis_j \leq Dis_i, \\ e^{-(Dis_j - Dis_i)/kT}, & Dis_j > Dis_i. \end{cases} \quad (3)$$

(6)非支配排序:当  $N$  分别计算后,获得一组解的优化目标为  $(N_1, Dis_1), (N_2, Dis_2), \dots$ ,依据支配原则,对所获得的所有非劣解进行非支配排序,获得排序值为 1 的解,皆为该问题的 pareto 解.

2.2 IMOSA 算法描述

算法的描述如下所示:

输入:城市数量与坐标,旅行商的最大数  $N_{\max}$

输出:pareto 解

- 1. For  $n$  in  $N_{\max}$
- 2.    设定初始温度  $T_0$ ,终止温度  $T_f$ ,降温函数  $T_{k+1} = KT_k, (K \in (0.95, 0.99))$  以及迭代次数  $n(T_k)$
- 3.    生成一个初始解  $P$ ,将其存入最优解 best 中
- 4.    While( $T_k > T_f$ )
- 5.       For  $i$  in  $n(T_k)$
- 6.           $P_i$  成功随机插入一次变成  $P_j$ ,计算目标函数  $Dis$
- 7.          If( $Dis_j > Dis_i$ ):依据式(3)概率接受  $P_j$  替换  $P_i$
- 8.          Else: $P_j$  替代  $P_i$ ,并比较同 best 的好坏,检查  $P_j$  是否替换 best
- 9.       End for
- 10.    End while
- 11.    将  $(n, best)$  插入到 pareto 解集中
- 12. End for
- 13. 将 pareto 解集中的解进行非支配排序,将序值计算为 1 的解集输出至结果 pareto 解

3 实例分析

3.1 数据集

本文利用旅行商问题中的一个测试集,该旅行商问题包含 30 个城市,城市坐标如表 1 所示.

表 1 30 个城市位置坐标

Table 1 The location coordinates of 30 cities

编号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$X$	41	37	54	25	7	2	68	71	54	83	64	18	22	83	91
$Y$	94	84	67	62	64	99	58	44	62	69	60	54	60	46	38
编号	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$X$	25	24	58	71	74	87	18	13	82	62	58	45	41	44	4
$Y$	38	42	69	71	78	76	40	40	7	32	35	21	26	35	50

表 1 表示了 30 个城市的位置,分别用  $X$  和  $Y$  表示. 本文所研究的多旅行商问题中,最多可有 5 名旅行商对这些城市进行遍历,每个旅行商都是从第 0 号城市出发,即位置(41,94),遍历其所分配城市后又返回第 0 号城市. 城市分布图如图 4 所示,方框代表了 30 个城市的位置,连线表示了单个 TSP 问题的最优路径为 423.741.

3.2 多目标遗传算法求解

为求解上述问题,本节采用多目标遗传算法对目标进行求解,优化目标为式(1)和式(2). 遗传算法的初始种群规模为 200 个,迭代次数为 2 000,交叉概率为 0.9,变异概率为 0.1.

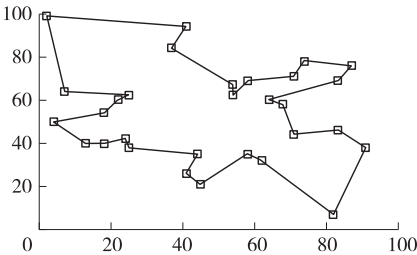


图 4 30 个城市 TSP  
Fig. 4 30 cities TSP

遗传算法的编码采用两层编码,第一层编码为不包含分隔符的传统 TSP 问题遗传编码,第二层编码用于记录该方案中在何处分隔,1 个分隔符位表示有 2 个旅行商;遗传算法中的交叉算子,本文采用交叉映射方法对不可行解进行修补,同时交叉过程中的分隔符随交叉位置进行交换,如果交叉完毕后,第二层编码中不包含分隔符,则随机产生某处位置作为分隔符,将解转换为含有 2 个旅行商的旅行商问题,如果交叉完毕后分隔符多于 4 个,则依据分隔符之间的距离,删除分隔符位间距小的分隔符位,直到分隔符不多于 4 个;变异算子原理同模拟退火中移动的原理相同,第二层编码中的分隔符随插入位置的不同动态改变。

采用多目标遗传算法获得多目标的 pareto 解如表 2 所示,表 2 描述了两个优化目标值——旅行商人数  $N$  和最少遍历路径长度  $Dis$ ;图 5 展示了每个 pareto 解的图形表示,图 5 中的(a)表示了 2 个旅行商对 30 个城市遍历的结果,(b)表示了 3 个旅行商的结果,(c)表示了 4 个旅行商的结果,(d)表示了 5 个旅行商的结果。

表 2 遗传算法求解结果

Table 2 The results of genetic algorithm	
旅行商人数 $N$	目标函数 $Dis$
2	277.681
3	228.329
4	197.549
5	195.092

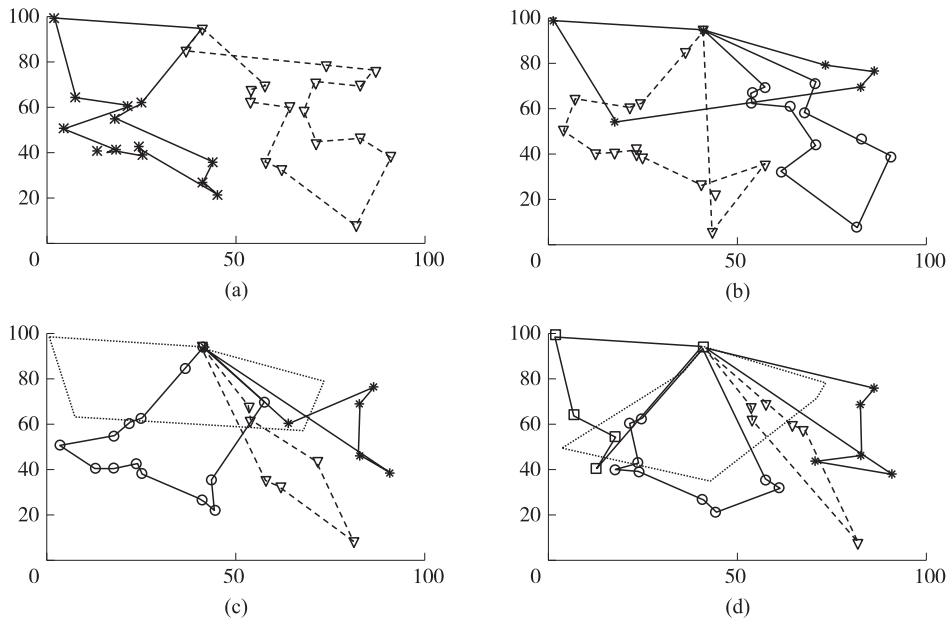


图 5 多目标遗传算法求解结果

Fig. 5 The results of genetic algorithm

3.3 改进的多目标模拟退火算法求解

本节采用改进的多目标模拟退火算法对问题进行求解. 对于模拟退火的初始化条件设置如下:初始温度  $T_0=10$ ,终止温度  $T_f=0.001$ ,降温函数  $T=0.95T$ ,内循环次数  $n(T_k)=300$ . 虽然模拟退火算法具有完整的收敛性理论,但同其他启发式算法类似,每次计算都不能完全收敛于最优解,因此本文设计的算法中,在同一旅行商数量下进行 15 次模拟退火算法,保留求解过程中的最优解作为输出。

表 3 描述了模拟退火算法给出的目标优化值,第 3 列表示了每个旅行商遍历其被分配的目标所走的路径长度. 根据 pareto 解的支配原则,解(4,192.354)支配解(5,192.354),(5,192.354)解应该被舍去,为了便于算法作对比,依然保留了这个非 pareto 解。

表 3 模拟退火算法求解结果

Table 3 The results of IMOSA

旅行商人数 $N$	目标函数 $Dis$	单个旅行商所走路程				
2	252.238	251.261	252.238			
3	206.355	204.246	178.913	206.355		
4	192.354	174.693	192.354	178.859	174.988	
5	192.354	181.875	181.583	192.354	188.491	191.531

图 6 为表 3 中所得结果的图形化表示. 从图 6(c)、(d) 可以看到, 该问题的第二个优化目标下界为 192.354.

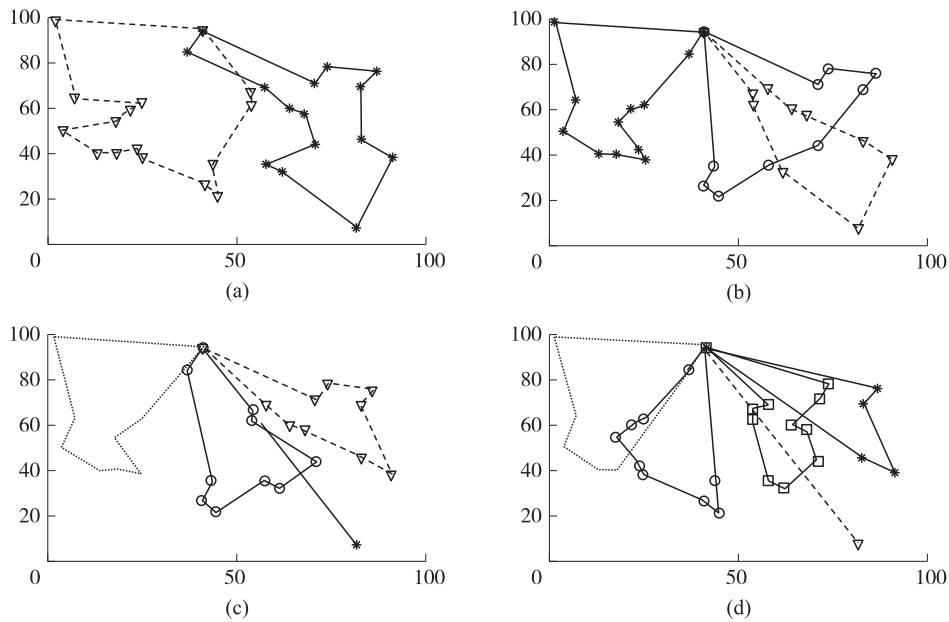


图 6 改进的多目标模拟退火算法求解结果

Fig. 6 The results of IMOSA

## 4 结果分析

上一节采用多目标遗传算法和改进的多目标模拟退火算法对 30 个城市的多旅行商问题进行求解, 从图 6 中发现, 模拟退火算法在旅行商数量为 4 时, 已经达到优化目标的  $Dis$  的下界, 为使两种算法有较好的对比性, 模拟退火算法结果保留 5 个旅行商的求解结果.

本文将从算法计算复杂度和计算结果两方面对两种算法进行比较.

### 4.1 计算复杂度

本文采用计算中加和比较的次数来衡量算法的计算复杂度. 多目标遗传算法采用 NSGA-II 框架, 采用非支配排序和拥挤距离对解的好坏进行比较, 每一代的非支配排序和拥挤距离所达到的时间复杂度为,

$$O_1 = MN_z^3 + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^K \frac{N_i(N_i-1)}{2} + N_z,$$

其中  $N_z$  为初始种群规模,  $K$  为序值的数量,  $M$  为优化目标的数量, 非支配排序主要包含目标两两比较以及序值的标定中, 拥挤距离主要包含目标的单个目标拥挤距离排序以及个体的拥挤距离求和; 在交叉中的时间复杂度为

$$O_2 = N_z P_c 2N_{\text{city}} \frac{N_{\text{city}}}{2} = N_z P_c N_{\text{city}}^2,$$

其中  $P_c$  为交叉概率, 包含了交叉的次数和单个个体在交叉后的交叉映射中; 在变异中的时间复杂度为

$$O_3 = N_z P_m,$$

其中  $P_m$  为变异概率.

所以综上分析, 多目标遗传算法在一次迭代过程中的计算复杂度约为

$$O = MN_z^3 + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^K \frac{N_i(N_i-1)}{2} + N_z + N_z P_c N_{\text{city}}^2 + N_z P_m.$$

本文改进的模拟退火算法的计算复杂度主要为等温过程中内循环的迭代次数, 因而其一次模拟退火的计算复杂度为  $O_1 = n(T_k) \frac{\ln T_f - \ln T_0}{\ln K}$ , 多个旅行商  $N$  的计算复杂度为  $O_2 = Nn(T_k) \frac{\ln T_f - \ln T_0}{\ln K}$ , 在获得问题



的最优结果后,对所获得结果进行一次非支配排序,计算复杂度为  $O_3 = N^2$ ,所以综上所述改进的多目标模拟退火算法的计算复杂度为  $O = Nn(T_k) \frac{\ln T_f - \ln T_0}{\ln K} + N^2$ .

在实验中,对算法的计算复杂度进行了测试,在多目标遗传算法迭代到第 90 代时,模拟退火算法完成了计算. 模拟退火算法的计算复杂度不受种群数目等影响,内循环次数和外循环次数是其主要的计算复杂度来源,根据计算公式可得本文中设定的外循环次数大约为 200 次. 经上分析,在多目标多旅行商问题中多目标遗传算法的计算复杂度远大于改进的多目标模拟退火遗传算法.

#### 4.2 计算结果分析

从表 2、3 中数据可分析得到,模拟退火算法相较于遗传算法所得解更优,当  $N$  较小时,模拟退火算法明显优于遗传算法,当  $N$  较大时,模拟退火算法的结果较优于遗传算法. 在本文的实例中,模拟退火算法在  $N=4$  时,已使得优化目标值即式(2)达到最优解,故其在求解 pareto 解中舍弃了  $N=5$  这个解,而遗传算法由于不能有效收敛到最优解,导致其在求解过程中多出一组 pareto 解,求解结果相较于模拟退火算法稍差.

从图 5、6 可以看到,由于遗传算法的收敛速度较慢,在达到指定的迭代次数的情况下,遗传算法中旅行商的最短回路尚无法找到,尤其是在  $N$  较小时. 而模拟退火算法则找到了旅行商数目为  $N$  时的最佳分组,并且能够计算得到每名旅行商的最优访问路径.

综上所述,由于遗传算法将大部分时间用于交叉、非支配排序和拥挤距离计算中,而模拟退火算法相对遗传算法只做了变异操作,虽然模拟退火算法只是逐步从邻域中一步一步寻找最优,遗传算法进行了大范围的搜索,但其结果还是要远好于遗传算法,而且计算复杂度也较低. 因而在该优化目标下的多旅行商问题,改进的多目标模拟退火算法要优于多目标遗传算法.

### 5 结语

近年来,由于人工智能技术的发展,多旅行商问题的应用也越来越广,诸如无人机数量规划、快递员数目确定等. 本文将最小化旅行商数目和最小化旅行商访问路径作为多目标规划中的两个目标,采用模拟退火的算法,分析两个优化目标的次序,将非支配排序放在最后进行比较,节省了算法的空间复杂度,降低了算法的计算复杂度,并且可以取得较好的结果. 改进的多目标模拟退火算法同多目标遗传算法进行实例计算比较,前者的计算复杂度和计算结果均强于后者,更适合于求解多旅行商问题.

文中考虑了多旅行商的数目,取得较好的结果. 在此基础上,拟对多旅行商的访问的终点进行动态规划,不再返回出发城市,而返回于几个特定的城市,该设想可用于车辆运输作业. 从指定城市出发,配送货物,并从终点拉回其他物资,进行再次运输作业. 由于车辆的检修需在空车状态进行,且行驶一定路程后必须检修,因而需要指定合适的车辆数目.

#### [参考文献]

- [1] 吴成明,王毅,毕红续,等. 基于不同条件的旅游路线规划问题研究[J]. 数学的实践与认识,2016(15):90-96.
- [2] SOYLU B. A general variable neighborhood search heuristic for multiple traveling salesmen problem[J]. Computers and industrial engineering,2015,90(C):390-401.
- [3] KOTA L,JARMAI K. Mathematical modeling of multiple tour multiple traveling salesman problem using evolutionary programming[J]. Applied mathematical modelling,2015,39(12):3 410-3 433.
- [4] 俞庆生,林冬梅,王东. 多旅行商问题研究综述[J]. 价值工程,2012,31(2):166-168.
- [5] XIE B L,YING L I,MIN L,et al. Vehicle routing problem with temporary supplementary points for spreading deicing salt[J]. Systems engineering-theory and practice,2014,34(6):1 593-1 598.
- [6] LIU M,ZHANG P Y. New hybrid genetic algorithm for solving the multiple traveling salesman problem:an example of distribution of emergence materials[J]. Journal of system and management,2014,23(2):247-254.
- [7] ANN S,KIM Y,AHN J. Area allocation algorithm for multiple UAVs area coverage based on clustering and graph method[J]. IFAC-papers on line,2015,48(9):204-209.

- 
- [8] KIRALY A, CHRISTIDOU M, CHOVAN T, et al. Minimization of off-grade production in multi-site multi-product plants by solving multiple traveling salesman problem[J]. Journal of cleaner production, 2016, 111: 253–261.
- [9] 王勇臻, 陈燕, 于莹莹. 求解多旅行商问题的改进分组遗传算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(1): 198–205.
- [10] SINGH A, BAGHEL A S. A new grouping genetic algorithm approach to the multiple traveling salesperson problem[J]. Soft computing, 2009, 13(1): 95–101.
- [11] YUAN S, SKINNER B, HUANG S, et al. A new crossover approach for solving the multiple travelling salesmen problem using genetic algorithms[J]. European journal of operational research, 2013, 228(1): 72–82.
- [12] LIU W, LI S, ZHAO F, et al. An ant colony optimization algorithm for the multiple traveling salesmen problem[C]//4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, 2009. ICIEA 2009. IEEE, 2009: 1 533–1 537.
- [13] NECULA R, BREABAN M, RASCHIP M. Performance evaluation of ant colony systems for the single-depot multiple traveling salesman problem[C]//International Conference on Hybrid Artificial Intelligence Systems. Cham: Springer, 2015: 257–268.
- [14] XUE M H, WANG T Z, MAO S. Double evolutionary artificial bee colony algorithm for multiple traveling salesman problem [C]//MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2016: 44.
- [15] VENKATESH P, SINGH A. Two metaheuristic approaches for the multiple traveling salesperson problem[J]. Applied soft computing, 2015, 26: 74–89.

[责任编辑: 丁 蓉]

---

(上接第79页)

- [21] 乐毅, 王斌. 深度学习-Caffe之经典模型详解与实战[M]. 北京: 电子工业出版社, 2016: 107–111.
- [22] ZENG R, WU J, SHAO Z, et al. Quaternion softmax classifier[J]. Electronics letters, 2014, 50(25): 1 929–1 931.
- [23] CHEN X, YE Q, ZOU J, et al. Visual trajectory analysis via replicated softmax-based models[J]. Signal, image and video processing, 2014, 8(1): 183–190.
- [24] LEE J Y, KIM K. A feature-based approach to extracting machining features[J]. Computer-aided design, 1998, 30(13): 1 019–1 035.
- [25] CANDÈS E J, LI X, MA Y, et al. Robust principal component analysis? [J]. Journal of the Acm, 2009, 58(3): 11.
- [26] XIE X, ZHENG W S, LAI J, et al. Normalization of face illumination based on large- and small-scale features[J]. IEEE transactions on image processing a publication of the IEEE signal processing society, 2011, 20(7): 1 807–1 821.
- [27] QI Z, TIAN Y, SHI Y. Robust twin support vector machine for pattern classification[J]. Pattern recognition, 2013, 46(1): 305–316.
- [28] QI Z, TIAN Y, SHI Y. Structural twin support vector machine for classification[J]. Knowledge-based systems, 2013, 43(2): 74–81.
- [29] SRIVASTAVA N, HINTON G, KRIZHEVSKY A, et al. Dropout: a simple way to prevent neural networks from overfitting[J]. Journal of machine learning research, 2014, 15(1): 1 929–1 958.
- [30] JR S E. Detecting and evaluating the impact of multidimensionality using item fit statistics and principal component analysis of residuals[J]. Journal of applied measurement, 2002, 3(2): 205–231.

[责任编辑: 丁 蓉]