doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.04.003

与 Lebesgue 测度有关的紧凸集的超空间的拓扑结构

杨 鎏[1],杨寒彪[2]

(1.陕西学前师范学院数学系,陕西 西安 710100)
(2.五邑大学数学与计算机科学学院,广东 江门 529099)

[**摘要**] 本文主要证明了欧氏平面上,面积不超过某给定正数的紧凸集全体,赋予 Hausdorff 度量拓扑构成的超空间,是一个 AR;还证明了$[0,1]\times[0,1]$中,Lebesgue 测度不超过某正数 $m_0(m_0<1)$的紧凸集全体同胚于 Hilbert 方体 $Q=[-1,1]^\omega$.

[**关键词**] 超空间,紧凸集,Lebesgue 测度

[**中图分类号**]O189.1 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2017)04-0012-04

The Topological Structures of Hyperspaces of Compact Convex Sets Concerned with Lebesgue Measure

Yang Liu[1],Yang Hanbiao[2]

(1.Department of Mathematics,Shaanxi Xueqian Normal University,Xi'an 710100,China)
(2.School of Mathematics and Computational Science,Wuyi University,Jiangmen 529099,China)

Abstract:In this paper,we mainly proved that the hyperspace of all compact convex sets which not exceeding a given positive constant,endowed with the Hausdorff metric topology,is homeomorphic to an AR;And also proved that the hyperspace of all compact convex sets which Lebesgue measure not exceeding $m_0(m_0<1)$ in$[0,1]\times[0,1]$,is homeomorphic to the Hilbert cube $Q=[-1,1]^\omega$.

Key words:hyperspace,compact convex set,Lebesgue measure

无限维拓扑学研究的热点问题之一是超空间理论. Curtis-Schori-West 超空间定理[1-4]是超空间理论的一个基本定理:紧度量空间 X 中所有的紧集赋予 Hausdorff 度量拓扑所构成的超空间同胚于 Hilbert 方体 $Q=[-1,1]^\omega$ 的充要条件是 X 为非平凡的 Peano 连续统(Peano 连续统是指连通的局部连通的紧的可分可度量空间). 但经典的超空间理论的研究也涉及到底空间的线性结构问题. 例如,Nadler,Quinn 以及 Stavrokas 系统地研究了局部凸的可度量空间上的紧凸集的超空间,他们证明了以下主要结果:

定理 1[5] 设 X 是局部凸的可度量空间. $cc(X)$表示 X 上紧凸集全体赋予 Hausdorff 度量拓扑所构成的超空间.

(1)如果 X 紧且 $\dim X\geqslant 2$,则 $cc(X)$同胚于 Q.

(2)设 U 是 R^n 开凸集,$n\geqslant 2$,则 $cc(U)$同胚于 $Q\times[0,1)$.

设(X,d)是度量空间,E,F 是 X 中的非空有界闭集,它们之间的 Hausdorff 距离定义为

$$d_H(E,F)=\max\{\sup_{a\in E}\inf_{b\in F}d(a,b),\sup_{b\in F}\inf_{a\in E}d(a,b)\}.$$

Montejano[6]得到上述结果(2)的一个推广,即设 U 是 $R^n(n\geqslant 2)$中的一个开集,则 $cc(U)$同胚于 $U\times Q\times[0,1)$. Bnakh,Sakai 以及杨忠强等学者还研究了 Banach 空间上有关闭凸集的各种超空间的拓扑结构,可

收稿日期:2017-04-14.

基金项目:国家自然科学基金(11471202)、陕西省教育厅基金(16JK1183).

通讯联系人:杨鎏,博士,讲师,研究方向:拓扑学,泛函分析,算子理论. E-mail:381900567@qq.com

参考文献[7-12]. 杨忠强还将超空间理论中的经典方法应用于函数空间,得到了许多深刻的结果[13-19]. Bazilevich[20]给出:n 方体 $[-1,1]^n(n\geqslant 2)$ 中紧凸集全体和光滑严格凸的紧凸集全体所组成的超空间的空间对同胚于 (Q,s), $s=(-1,1)^{\omega}$;在[21]中,Bazilevich 还证明了 $R^n(n\geqslant 2)$ 中,定宽度的紧凸体全体赋予 Hausdorff 度量拓扑,同胚于一个可缩的 Q-流形.

杨鎏[22]研究欧氏平面上定面积紧凸体的超空间的拓扑结构,得到了下面的定理.

定理 2 设 $v_0>0$, M_{v_0} 为平面上所有面积为 v_0 的紧凸体所构成的集族赋予 Hausdorff 度量拓扑,则 M_{v_0} 是一个 Q-流形.

本文讨论了和面积有关的紧凸集的超空间的拓扑结构,证明了面积不超过某给定正数的紧凸集全体赋予 Hausdorff 度量拓扑是一个 AR;讨论了和 Lebesgue 测度有关的紧凸集的超空间拓扑结构,证明了:

$$I_{\leqslant m_0}\approx\begin{cases}R^4 & \text{if } m_0=0,\\ Q & \text{if } 0<m_0\leqslant 1,\end{cases}$$

式中,$m(A)$ 表示 A 的 Lebesgue 测度,$I_{\leqslant m_0}=\{A\in cc(I^2)\mid m(A)\leqslant m_0\}$, $I=[0,1]$.

1 相关定义及引理

定义 1 设 $X\subset R^2$. 如果对 X 中任意两点 a,b 及 $t\in[0,1]$, $ta+(1-t)b\in X$, 则称 X 是 R^2 中的凸集.

定义 2[23] 设(X,d)是度量空间,若对任意度量空间 Y 使得 X 是 Y 的闭子空间,存在连续映射 $r:Y\to X$ 使得 $r\mid X=id_X$,则称空间 X 是一个 AR. 若存在 X 在 Y 中的邻域 U 及连续映射 $r:U\to X$ 使得 $r\mid U=id_X$,则称空间 X 是一个 ANR.

引理 1[23] 设 X 是一个可分的度量空间. 则下面的结论等价:

(1)X 是 AR.

(2)X 是可缩的 ANR.

引理 2[22] 设 $\varepsilon:M_{v_0}\to(0,+\infty)$是连续函数. 对任意的 $t\in[0,1)$,定义 $\varepsilon_t:M_{v_0}\to\xi$, $\varepsilon_t(A)=\{(1-t)x\mid x\in O_{\varepsilon(A)}(A)\}$, $A\in M_{v_0}$.

(1)ξ_t 是连续的映射.

(2)$\xi_t(A)$是平滑的.

(3)存在 $t_A\in(0,1)$,使得 $v_{\xi_{t_A}}(A)=v_0$.

(4)$T:\xi\to(0,1)$, $T(A)=t_A$ 是一个连续函数.

命题 1 $Q\setminus\{\bar{0}\}$ 是 AR.

证明 由定理 A 及[22]命题 3 知 $cc(R^2)$是一个 ANR. 又由[22]命题 3 的证明过程知,$Q\setminus\{\bar{0}\}$ 是可缩的,故再由引理 1 知 $Q\setminus\{\bar{0}\}$ 是 AR.

2 主要结果

定理 3 设 $v_0>0$, $M_{\leqslant m_0}=\{A\in cc(R^2):v_A\leqslant v_0\}$,则 $M_{\leqslant m_0}$是一个 AR.

证明 令 $r:cc(R^2)\to M_{\leqslant m_0}$

$$r(A)=\begin{cases}A & \text{if } v_A\leqslant v_0,\\ (1-t_A)A & \text{if } v_A>v_0,\end{cases}$$

式中,t_A 由引理 2 确定,显然 r 连续. 再由命题 1 得证.

定理 4 令

$$N_0=\{A\in cc(R^2)\mid v_A=0\},\quad N_0'=\{A\in cc(I^2)\mid v_A=0\}.$$

则 $N_0\approx R^3\times[0,+\infty)$, $N_0'\approx R^4$.

证明 显然,对于平面上的紧凸集 A 而言,$v_A=0$ 当且仅当 A 为连接平面上两个点 $P=(x,y)$, $Q=(x+s,y+t)$的线段(含退化为一个点的线段),显然,我们可以假定 $t\geqslant 0$.进一步,$h(A)=(x,y,s,t)$建立了从 N_0 到 $R^3\times[0,+\infty)$的同胚. 因此,第一个结论成立. 同理,可以证明第二个结论也成立.

下面讨论和 Lebesgue 测度有关的紧凸集的超空间问题. 对欧氏空间中的任意紧集 A,记 $m(A)$表示 A

的 Lebesgue 测度,$\dim(A)$表示覆盖的维数. 首先给出零维空间的定义.

设(X,d)是度量空间,若对任意的 $x\in X$ 及 X 的邻域 U,存在 X 中既开又闭的子集 A,使得 $x\in A\subseteq U$,则称 X 是零维度量空间.

Van Mill 证明了下面的结论.

定理 5[23]　$\{A\in \mathrm{Comp}(I)\mid \dim A=0\}$同胚于 s,其中 $s=(-1,1)^{\omega}$.

我们知道,对于非空局部紧的仿紧空间中的一个子空间 A,A 的覆盖维数为零当且仅当 A 是完全不连通的(可参考[24]定理 6.2.10). 而单位区间中的任意零测紧集 A 显然是完全不连通的,否则必存在 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$ 使得$[a,b]$包含于 A 的某个连通分支里,则 $m(A)\geqslant b-a$,与假设矛盾. 反之不真,即存在单位区间上的一个零维的非零测的紧集. 下面我们给出一个这样的例子.

它的构造过程与 Cantor 集的方法类似,只是我们挖掉的区间长度不是常比例的.

第一次挖掉整个单位区间的中间 $1/3^1$,第二次挖掉剩余两个区间各自的中间 $1/3^2$, 第三次挖掉剩余 4 个区间各自的中间 $1/3^3$,依此递归我们可以定义单位区间上的开区间$\{S_n\}$如下:

$$S_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),S_2=S_1\cup\left\{0+\frac{3^2-1}{2}\left[\frac{1}{3^2}\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)\right],0+\left(\frac{3^2-1}{2}+1\right)\left[\frac{1}{3^2}\cdot\left(\frac{1}{3}-0\right)\right]\right\}\cup$$
$$\left\{\frac{2}{3}+\frac{3^2-1}{2}\left[\frac{1}{3^2}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\right],\frac{2}{3}+\left(\frac{3^2-1}{2}+1\right)\left[\frac{1}{3^2}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\right]\right\},$$

$$S_3=S_1\cup S_2\cup\left[0+\frac{3^3-1}{2}\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right),0+\left(\frac{3^3-1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right)\right]\cup\left[\frac{15}{81}+\frac{3^3-1}{2}\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right),\frac{15}{81}+\left(\frac{3^3-1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right)\right]\cup$$
$$\left[\frac{54}{81}+\frac{3^3-1}{2}\times\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right),\frac{54}{81}+\left(\frac{3^3-1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right)\right]\cup\left[\frac{69}{81}+\frac{3^3-1}{2}\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right),\frac{69}{81}+\left(\frac{3^3-1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{3^3}\cdot\frac{4}{81}\right)\right],$$

S_n,$n\geqslant 4$ 可以依照这种方法递归进行下去. 则相应的测度值 $m(S_n)$如下

$$\begin{cases} m(S_1)=\dfrac{1}{3}, \\ m(S_2)=m(S_1)+\dfrac{1}{3^2}[1-m(S_1)], \\ m(S_3)=m(S_2)+\dfrac{1}{3^3}[1-m(S_2)], \\ \qquad\vdots \\ m(S_n)=m(S_{n-1})+\dfrac{1}{3^n}[1-m(S_{n-1})]. \end{cases}$$

定义 $C_0=I\backslash(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}S_i)$. 由于$\{m(S_n)\}$单调递增且 $m(S_n)\leqslant 1$,故$\lim\limits_{n\to\infty}m(S_n)$存在.

令 $\varepsilon_n=1-m(S_n)$. 则

$$1-\varepsilon_n=1-\varepsilon_{n-1}+\frac{1}{3^n}[1-(1-\varepsilon_{n-1})]=1-\varepsilon_{n-1}+\frac{1}{3^n}\varepsilon_{n-1},$$

故 $\varepsilon_n=\varepsilon_{n-1}-\dfrac{1}{3^n}\varepsilon_{n-1}$,即$\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}=1-\dfrac{1}{3^n}$.因此

$$\varepsilon_n=\varepsilon_1\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdots\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right).$$

由于数列$\{\varepsilon_n\}$单调递减且有下界,故$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n$ 存在. 给上式两边同时作用对数函数,则

$$\ln\varepsilon_n=\ln\left(1-\frac{1}{3^1}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{3^i}\right).$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$收敛等价于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛.故可令 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)=\alpha$.则$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=\mathrm{e}^{\alpha}>0$.

则 $m(C_0)=\mathrm{e}^{\alpha}\neq 0$.由 C_0 的构造法,显然 C_0 不包含任何退化的区间,即 C_0 是完全不连通的.故 $\dim C_0=0$.

定理 6　设 $0\leqslant m_0\leqslant 1$, $I_{\leqslant m_0}=\{A\in cc(I^2)\mid m(A)\leqslant m_0\}$,则

$$I_{\leqslant m_0}\approx\begin{cases}R^4 & \text{if } m_0=0,\\ Q & \text{if } 0<m_0\leqslant 1.\end{cases}$$

证明　由定理 4 和本章的定理 1 得证.

[参考文献]

[1] CURTIS D W. Hyperspaces of noncompact metric spaces[J]. Compositio Math,1980,40(2):139-152.

[2] CURTIS D W,SCHORI R M. Hyperspaces of polyhedra are Hilbert cubes[J]. Fund Math,1978,99(3):189-197.

[3] SCHORI R M,WEST J E. Hyperspaces of graphsare Hilbert cubes[J]. Pacific J Math,1974,53(2):239-251.

[4] SCHORI R M,WEST J E. Hyperspaces of the closed unit interval is a Hilbert cube[J]. Trans Amer Math Soc,1975,213(1):217-235.

[5] NADLER S,QUINN J E,STAVROKAS N M. Hyperspaces of compact convex sets[J]. Pacific J of Math,1979,83:411-462.

[6] MONTEJANO L. The hyperspace of compact convex subsets of an open subset of R^n[J]. Bull Pol Acad Sci Math,1987,35(11/12):793-799.

[7] BANAKH T,HETMAN I. A"hidden"characterization of polyhedral convex sets[J]. Studia Math,2011,206:63-74.

[8] BANAKH T,HETMAN I,SAKAI K. Recognizing the topology of the space of closed convex subsets of a Banach space[J]. Studia Math,2013,216(1):17-33.

[9] BANAKH T,KURIHARA M,SAKAI K. Hyperspaces of normed linear spaces with the Attouch-Wets topology[J]. Set-Valued Anal,2003,11(1):21-36.

[10] SAKAI K. The spaces of compact convex sets and bounded closed convex sets in a Banach space[J]. Houston J Math,2008,34(1):289-300.

[11] SAKAI K,YAGUCHI M. Hyperspaces of Banach spaces with the Attouch-Wets topology[J]. Set-Valued Anal,2004,12(3):329-344.

[12] SAKAI K,YANG Z Q. The spaces of closed convex sets in Euclidean spaces with the Fell topology[J]. Bull Pol Acad Sci Math,2007,55(2):139-143.

[13] YANG Z,HU S,WEI G. The topological structure of continuous function space of non-compact space with the Fell topology[J]. Topology Proc,2013(41):17-38.

[14] YANG Z,WU N. A topological position of the set of continuous maps in the set of upper semicontinuous maps[J]. Sci China Ser A,Math,2009(52):1 815-1 828.

[15] YANG Z,YAN P,Topological classification of function spaces with the Fell topology Ⅰ[J]. Topology Appl,2004(178):146-159.

[16] YANG Z,ZHENG Y,CHEN J. Topological classification of function spaces with the Fell topology Ⅱ[J]. Topology Appl,2015,187(1):82-96.

[17] YANG Z,ZHENG Y,CHEN L. Topological classification of function spaces with the Fell topology Ⅲ[J]. Topology Appl,2016(197):112-132.

[18] YANG Z,ZHANG B. The hyperspace of the hypographs of continuous maps with the Fell topology[J]. Acta mathematica sinica,english series,2012(28):57-66.

[19] YANG Z,ZHOU X. A pair of spaces of upper semi-continuous maps and continuous maps[J]. Topology Appl,2007(154):1 737-1 747.

[20] BAZILEVICH L E. On the hyperspace of strictly convex bodies[J]. Matem Studi,1993,2:83-86.

[21] BAZILEVICH L E. Topology of the hyperspace of convex bodies of constant width[J]. Mathematical notes,1997,62(6):813-819.

[22] 杨鎏. 定面积的紧凸体的超空间的拓扑结构[J]. 南京大学学报(自然科学版),2016,52(3):558-565.

[23] MILL J V. Infinite-dimensional topology of function spaces[M]. Amsterdam:North-Holland Math Library 64,Elsevier Sci Publ B V,2001.

[24] ENGELKING R. General topology[M]. 2nd ed. Berlin:Heldermann Verlag,1989.

[责任编辑:陆炳新]