第 40 卷第 4 期　南京师大学报(自然科学版)　Vol. 40 No. 4
2017 年 12 月　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)　Dec,2017

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2017.04.005

双分数布朗运动驱动的降低权利金权证定价

赵　巍

(淮海工学院商学院,江苏 连云港 222005)

[**摘要**]　双分数布朗运动能满足分形特征,同时在一定条件下能够满足半鞅,已替代分数布朗运动成为数理金融研究中更为合适的工具. 在双分数布朗运动假定下,基于拟鞅定价思路给出了双分数 Black-Scholes 定价模型的解析解;随后,着重讨论了双分数布朗运动环境下的降低权利金权证定价问题,使分数布朗运动和标准布朗运动驱动的定价模型都成为其特例. 本文研究方法对求解各类扩展的布朗运动族驱动的定价模型都具有借鉴价值.

[**关键词**]　双分数布朗运动,拟鞅,双分数 Black-Scholes 模型,降低权利金

[**中图分类号**]F830.9　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2017)04-0021-05

Research on Depressed Option Pricing Driven by Bifractional Brownian Motion

Zhao Wei

(School of Business,Huaihai Institute of Technology,Lianyungang 222005,China)

Abstract:Considering of fractional character,Brownian motion is non-reasonable for basic assumption to option pricing model. Fractional Brownian motion suit for the fractional property of financial assets,but it is not a semi-martingale lead to failure to apply stochastic analysis. This paper sets the assert price followed bifractional Brownian motion, and construct quasi-martingale method under the risk neutral measure to solve bifractional Black-Scholes model and two kinds of depressed option by the same way. The results show bifractional Brownian motion and standard Brownian motion become a special example,and the method is important significance of option pricing diven by many kinds of modified Brownian motion.

Key words:bifractional Brownian motion,Quasi-martingale,bifractional Black-Scholes model,depressed option

金融衍生资产定价作为现代金融理论的核心内容,传统上对其研究是基于股价服从几何布朗运动假定. Black 和 Scholes(1973)根据这一思想,得出了著名的 Black-Scholes 公式[1]. 然而大量实证研究结果通过长期相关性检验,否定了金融资产价格随机游走的完美假设[2]. Mandelbro(1968)[3]提出的分数布朗运动成为描述金融资产长期相关特征的有效工具,但分数布朗运动不是半鞅,无法用随机积分进行分析,且导致市场不完备[4-6]. Hu 和∅ksendal(2003)[7]通过定义分数伊藤积分,构建了无套利且完备的分数 Black-Scholes 市场. 但在该积分定义下的自融资策略不符合经济学理论,影响了模型的使用效果,双分数布朗运动是对分数布朗运动的扩展和修正,既能够刻画金融资产分形特征,且在一定限制条件下满足半鞅,且经济含义明确,可以用随机分析理论求解期权定价模型[8]. 随后,董莹莹,薛红[9-10]基于保险精算方法,研究双分数布朗运动环境下的重置期权定价公式.

虽然 Hu 和∅ksendal(2003)定义的积分经济意义欠缺,但其对于采用随机积分方法求解期权定价的思想值得推广. 本文将这一思路用于双分数布朗移动驱动的期权定价研究,在构建完备双分数金融市场前提下,基于双分数布朗运动统计特性和鞅定价方法,研究了降低权利金定价问题,并对双分数期权价格和传统期权价格以及单分数期权价格进行了比较.

收稿日期:2016-06-18.

基金项目:江苏省高校哲学社会科学基金项目(2017SJB1685).

通讯联系人:赵巍,副教授,研究方向:金融工程与金融复杂性. E-mail:njzhaow@126.com

1　预备知识

定义1　称高斯过程$\{B_t^H, t\geqslant 0\}$,$0<H<1$,为分数布朗运动,若其满足[11]:

(1)$E(B_t^H)=0$;

(2)$E(B_t^H B_s^H)=\dfrac{1}{2}\{|t|^{2H}+|s|^{2H}-|t-s|^{2H}\}$.

式中,H为赫斯特指数,且$H=1/2$时恰为标准布朗运动$B(t)$. 分数布朗运动$B_t^H\sim N(0,t^{2H})$,满足分形自相似性,即对任意常数$c>0$,B_{ct}^H和$c^H B_t^H$具有相同的幂率分布.

定义2　称高斯过程$\{B_t^{H,K}, t\geqslant 0\}$,$0<H<1$,$0<K\leqslant 1$为双分数布朗运动,若其满足[12-13]:

(1)$E(B_t^{H,K})=0$;

(2)$E(B_t^{H,K}B_s^{H,K})=\dfrac{1}{2^K}\{(t^{2H}+s^{2H})^K-|t-s|^{2HK}\}$.

当$K=1$,$B_t^{H,K}$退化为分数布朗运动.

随机过程X_t称为分数Itô过程,如果其满足:

$$\mathrm{d}X_t=\mu_{x,t}\mathrm{d}t+\sigma_{x,t}\mathrm{d}B_t^H,$$

式中,$\mu_{x,t}$为X_t的时变均值,$\sigma_{x,t}$为X_t的时变方差.

引理1[9]　考虑分数差分方程

$$\mathrm{d}X_t=\mu X_t+\sigma X_t\mathrm{d}B_t^H,$$

则有

$$X_t=X_0\exp(\sigma B_t^H+\mu t-1/2\sigma^2 t^{2H}),$$

式中,μ,σ为常数.

引理2[9]　考虑分数差分方程

$$\mathrm{d}X_t=\mu X_t+\sigma X_t\mathrm{d}B_t^{H,K},$$

则有

$$X_t=X_0\exp(\sigma B_t^{H,K}+\mu t-1/2\sigma^2 t^{2HK}),$$

式中,μ,σ为常数,$B_t^{H,K}$为双分数布朗运动.

引理3[13]　任意有界的可测未定权益F_T在任意时刻t时的价格为

$$F_t=\mathrm{e}^{-(T-t)}\tilde{E}_t^P[F_T],$$

式中,$\tilde{E}_t^P[\cdot]$为概率测度P下的拟条件数学期望.

考虑另一风险中性测度R,若

$$B_t^{H,R}=B_t^{H,Q}+\theta t^{2H}=B_t^{H,Q}+\int_0^t 2H\theta\tau^{2H-1}\mathrm{d}\tau,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

式中,$B_t^{H,Q}$、$B_t^{H,R}$分别为风险中性测度Q、R下的分数布朗运动.

引理4[13]　若函数f满足$\tilde{E}_t[f(B_T^H)]<\infty$. 则对任意$t\leqslant T$,有下面的对等关系:

$$\tilde{E}_t^R[f(B_T^H)]=\frac{1}{Z_t}\tilde{E}_t^Q[f(B_T^H)Z_T],$$

式中,$Z_t=\exp\left(\theta B_t^H-\dfrac{\theta^2}{2}t^{2H}\right)$,$\tilde{E}_t^Q[\cdot]$、$\tilde{E}_t^R[\cdot]$分别为风险中性测度$Q$和$R$下的拟条件数学期望.

2　双分数Black-Scholes期权定价模型

考虑股价S_t满足双分数布朗运动:

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}B_t^{H,K}.$$

若Black-Scholes模型其余条件不变,则此时市场为双分数Black-Scholes市场. 假定存在两种资产:一种是无风险资产债券,满足:

$$\mathrm{d}M_t = rM_t\mathrm{d}t,$$

式中，r 为债券利率；一种是股权型风险资产，满足双分数布朗运动，有

$$\mathrm{d}S_t = rS_t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t^{H,K}.$$

由引理 2，有

$$S_t = S_0 \exp\left(rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2HK} + \sigma B_t^{H,K}\right).$$

定理 1　标的资产 S，到期日为 T，执行价为 M 的欧式看涨期权 t 时刻的价格为

$$C_t = S_t N(d_1) - Me^{-r(T-t)} N(d_2),$$

式中，

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/M) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/M) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}.$$

证明　根据引理 2

$$C(t, S(t)) = \tilde{E}_t^Q[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\max((S_T - M), 0)] = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[S_T I_{\{S_T>M\}}] - M\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[I_{\{S_T>M\}}],$$

显然，$\tilde{E}_t^Q[I_{\{S_T>M\}}] = P_t^Q(\ln S_T > \ln M)$，而

$$\ln S_T = \ln S_t + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK}) + \sigma(B_T^{H,Q} - B_t^{H,Q}) > \ln M,$$

由 $B_T^{H,K} \sim N(0, T^{2HK})$，$B_t^{H,K} \sim N(0, t^{2HK})$，可得

$$(B_T^{H,K} - B_t^{H,K}) > \frac{\ln(M/S_t) - r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma},$$

也即

$$-\frac{B_T^{H,K} - B_t^{H,K}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \leqslant \frac{\ln(S_t/M) + r(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}.$$

所以

$$\tilde{E}_t^Q[I_{\{S_T>K\}}] = P_t^Q(\ln S_T > \ln M) = N(d_2).$$

另一方面，考虑 $B_t^{HK,R} = B_t^{HK,Q} - \sigma t^{2HK}$，定义 $Z_t = \exp\left(\sigma B_t^{HK} - \frac{\sigma^2}{2}t^{2HK}\right)$，由引理 4

$$\tilde{E}_t^Q[S_t I_{\{S_T>M\}}] = \mathrm{e}^{rT}\tilde{E}_t^Q[Z_T I_{\{S_T>M\}}] = Z_t \mathrm{e}^{rT}\tilde{E}_t^R[I_{\{S_T>M\}}],$$

而

$$\ln S_T = \ln S + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2HK} + \sigma B_T^{HK,Q} = \ln S + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T^{2H} + \sigma B_T^{HK,R},$$

$$\tilde{E}_t^R[I_{\{S_T>M\}}] = P_t^R(\ln S_T > \ln M) = P_t^R\left(-\frac{\Delta B_T^{HK,R}}{\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}} \leqslant \frac{\ln(S_t/M) + r(T-t) + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK} - t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK} - t^{2HK}}}\right),$$

即

$$\tilde{E}_t^Q[S_T I_{\{S_T>M\}}] = S_t \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{e}^{rT}N(d_1) = S_t \mathrm{e}^{r(T-t)}N(d_1).$$

所以，双分数布朗运动驱动的欧式看涨期权定价模型为

$$C_t = S_t N(d_1) - M\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2),$$

定理得证.

3　降低权利金的权证定价模型

降低权利金权证因其定价模型的简单和避险操作的简易也受到发行券商的推崇. 此类权证在双分数布朗运动背景之下,研究降低权利金期权定价可以得到更为接近市场现实的定价模型,从而给投资者提供理论参考. 降低权利金权证主要包括:上限型买权和抵付型买权两种类型.

3.1　上限型买权

上限型买权的到期日现金流量 C_T 满足:

$$C_T=\begin{cases}0, & S_T\leqslant M_1\\ S_T-M_1, & M_1<S_T<M_2\\ M_2-M_1, & S_T\geqslant M_2\end{cases}$$

当到期资产价格 S_T 小于执行价格 M_1 或介于 M_1 及 M_2 之间,该期权价格等同一般买权价格;但若 S_T 大于执行价格 M_2,要受上限(M_2-M_1)的限制,因此权利金得以降低.

根据引理 2 的结果,有

$$C_t=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[(S_T-M_1)I_{\{M_1<S_T<M_2\}}]+\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}_t^Q[(M_2-M_1)I_{\{S_T\geqslant M_2\}}],$$

而

$$\tilde{E}_t^Q[S_TI_{\{M_1<S_T<M_2\}}]=S_0\mathrm{e}^{rT}\tilde{E}_t^Q[Z_TI_{\{M_1<S_T<M_2\}}]=S_0\mathrm{e}^{rT}Z_t\tilde{E}_t^R[I_{\{M_1<S_T<M_2\}}]=\mathrm{e}^{r(T-t)}S_tP_t^R\left[\ln M_1<\ln S_t+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_T^{HK,R}-B_t^{HK,R})<\ln M_2\right]=\mathrm{e}^{r(T-t)}S_t[N(d_1^*)-N(d_1^{**})],$$

式中,

$$d_1^*=\frac{\ln(S_t/M_1)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}},$$

$$d_1^{**}=\frac{\ln(S_t/M_2)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}},$$

同样

$$\tilde{E}_t^Q[I_{\{M_1<S_T<M_2\}}]=P_t^Q(M_1<S_T<M_2)=N(d_2^*)-N(d_2^{**}).$$

式中,$d_2^*=d_1^*-\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}$,$d_2^{**}=d_1^{**}-\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}$.

另一方面,由定理 1 可知

$$\tilde{E}_t^Q[(M_2-M_1)I_{\{S_T\geqslant M_2\}}]=(M_2-M_1)\tilde{E}_t^Q[I_{\{S_T\geqslant M_2\}}]=(M_2-M_1)N(d_2^{**}),$$

因此,上限型买权的定价公式为

$$C_t=\mathrm{e}^{-r(T-t)}\{S_t\mathrm{e}^{r(T-t)}[N(d_1^*)-N(d_1^{**})]-M_1[N(d_2^*)-N(d_2^{**})\}+\mathrm{e}^{-r(T-t)}\{(M_2-M_1)N(d_2^{**})]=S_t[N(d_1^*)-N(d_1^{**})]+\mathrm{e}^{-r(T-t)}[M_2N(d_2^{**})-M_1N(d_2^*)].$$

3.2　抵付型买权

抵付型买权到期日的现金流 DC_T 为:

$$DC_T=\begin{cases}0, & S_t<M\\ 0, & M\leqslant S_t\leqslant L\\ S_t-M, & L<S_t\end{cases}$$

当到期资产价格 S_t 小于执行价格 M,该期权价格等同一般买权价格. 但当介于 M 及 L 之间,此权证不支付任何现金. 这是因为在初始获利阶段,该权证不支付任何现金,只有 S_t 高于 L,才支付现金,此时权利金得以降低. 据此,抵付型买权的到期价值,应当是 BS 模型价格减去最初支付部分的权利金,即

$$DC_t=S_tN(d_1)-M\mathrm{e}^{-r(T-t)}N(d_2)-\mathrm{e}^{-r(T-t)}\tilde{E}^Q[(S_T-M)I_{\{M\leqslant S_T\geqslant L\}}],$$

式中,d_1,d_2 为定理 1 给出.

而

$\widetilde{E}_t^Q[(S_T-M)I_{\{K\leqslant S_T\leqslant L\}}]=\widetilde{E}_t^Q[S_T I_{\{M\leqslant S_T\leqslant L\}}]-M\widetilde{E}_t^Q[I_{\{M\leqslant S_T\leqslant L\}}]=S_t e^{r(T-t)}[N(d_1)-N(d_1^L)]-M[N(d_2)-N(d_2^L)]$,

式中,

$$d_1^L=\frac{\ln(S_t/L)+r(T-t)+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2HK}-t^{2HK})}{\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}}},$$

$$d_2^L=d_1^L-\sigma\sqrt{T^{2HK}-t^{2HK}},$$

故

$$DC_t=S_tN(d_1)-Me^{-r(T-t)}N(d_2)-S_t[N(d_1)-N(d_1^L)]+Me^{-r(T-t)}[N(d_2)-N(d_2^L)]=S_tN(d_1^L)-Me^{-r(T-t)}N(d_2^L).$$

4　结论

双分数布朗运动在积分意义上和经济意义上具有显著优势,成为描述资产价格的合适工具. 以此为基础,本文结合双分数布朗运动的统计特性和传统鞅定价思路,得到了双分数 Black-Scholes 公式,进而对双分数布朗运动驱动的降低权利金权证定价模型进行求解. 分析结果显示,双分数期权价格与到期时间、双分形参数 HK 有关. 本研究借助分数布朗运动环境下的鞅定价思路,扩展到双分数布朗运动驱动的定价问题,将随机积分意义和经济意义完美结合,对各类修正的分数布朗运动族驱动的定价模型具有推广价值.

[参考文献]

[1] BLACK F,SSHCLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Political economy,1973,81(3):637-659.
[2] FAMA E. The behavior of stoek market price[J]. The journal of business,1965,38(1):34-105.
[3] MANDELBROT B B,VAN NESS J W. Fractional Brownian motion,fractional noises and application[J]. SIAM review,1968,10:422-437.
[4] LIN S J. Stochastic analysis of fractional Brownian motion,fractional noise and applications[J]. SIAM review,1995,10:422-437.
[5] ROGER L C G. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Mathematical finance,1997,7:95-105.
[6] DECREUSEFOND L,USTUNEL A S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion[J]. Potential analysis,1999,10:177-214.
[7] HU Y Z,KSENDAL B. Fractional white noise calculus and application to finance[J]. Infinite dimensional analysis,quantum probability and related topics,2000,1(6):32.
[8] 肖炜麟,张卫国,徐维东. 双分式布朗运动下股本权证的定价[J]. 系统工程学报,2013,28(3):348-354.
[9] 董莹莹,薛红. 分数布朗运动环境下重置期权定价[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2016,32(3):242-245.
[10] 董莹莹,薛红. 双分数跳-扩散过程下重置期权定价[J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2016,37(1):1-4.
[11] RUSSO F,TUDOR C. On the bifractional Brownian motion[J]. Stochastic processes and application,2006,116(5):830-856.
[12] ESSEBAIY K,TUDOR C. Multidimensional bifractional Brownian motion:Ito and Tanaka formulas[J]. Stochastic and dynamics,2007,7(3):365-388.
[13] BENDER C,SOTTINE T,VALKEILA E. Arbitrage with fractional Brownian motion[J]. Theory of stochastic processes,2006,12(3):1-12.

[责任编辑:陆炳新]