doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.01.001

对合 BCK-代数与交换可剩余半群

杨闻起

(宝鸡文理学院数学与信息科学学院,陕西 宝鸡 721013)

[**摘要**] 引入对合 BCK-代数的伴随序半群和可剩余序半群的伴随 BCK-代数的概念,给出了它们之间的关系和性质,由此表明了 BCK-代数与序半群相互间的联系.

[**关键词**] BCK-代数,对合 BCK-代数,交换可剩余半群,伴随序半群,伴随 BCK-代数

[**中图分类号**]O153.1 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2018)01-0001-04

Involutory BCK-Algebras and Commutative Residuated Semigroups

Yang Wenqi

(School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: The concepts of adjoint ordered semigroups of involutory BCK-algebras and adjoint BCK-algebras of commutative residuated semigroups are introduced, and the relationship between them are investigated, their properties are discussed.

Key words: BCK-algebra, involutory BCK-algebra, commutation residuated semigroup, adjoint ordered semigroup, adjoint BCK-algebra

1966 年,日本数学家 Iseki K 以逻辑中的蕴含运算和集合中的差运算为基础,引入了 BCK-代数和 BCI-代数[1],由于它们是比较广泛的逻辑代数,曾得到国内外学者的关注,现已形成了比较完整的理论体系[2-3]. 在 BCI-代数的研究中,BCI-代数与序半群之间有紧密的联系,文[4]中已有全面的论述. 那么,BCK-代数与序半群的关系如何?本文通过引入对合 BCK-代数的伴随序半群,表明对合 BCK-代数都可以导出一个交换可剩余序半群,还通过引入可剩余序半群的伴随 BCK-代数的概念,表明每个可剩余序半群又可以导出一个 BCK-代数.

1 预备知识

便于论述,我们先给出已有的概念和结论.

文[1]最早引入了双 B 代数,后来文[3]等价地简化为:

定义 1[3] 设$(X, *, 0)$是$(2,0)$型代数,如果$\forall x,y,z\in X$,满足

(1)$((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$,

(2)$x*0=x$,

(3)$x*y=0$ 且 $y*x=0\Rightarrow x=y$,

那么,称 X 是一个 BCI-代数,记为$(X, *, 0)$,如果一个 BCI-代数 X 还满足

(4)$0*x=0$.

那么,称 X 是 BCK-代数,在不致混淆时也记为 X. 在 BCI(BCK)代数$(X, *, 0)$中,令 $x\leqslant y\Leftrightarrow x*y=0$,那么,$\leqslant$是 X 上的偏序,且 0 为该偏序的极小元(最小元),称$\leqslant$是 BCI(BCK)代数$(X, *, 0)$的自然偏序.

引理 1[2-3] 在 BCK-代数$(X, *, 0)$中,$\leqslant$为它的自然偏序,$\forall x,y,z\in X$,有

(1)$(x*(x*y))*y=0$,即 $x*(x*y)\leqslant y$,

收稿日期:2017-01-16.

基金项目:陕西省自然科学基金资助项目(2010JM1016)、陕西省教育厅基金资助项目(14JK1050).

通讯联系人:杨闻起,教授,研究方向:代数学. E-mail:baojiywq@126.com

(2) $x*x=0$,

(3) $x\leqslant y\Rightarrow z*y\leqslant z*x, x*z\leqslant y*z$,

(4) $(x*y)*z=(x*z)*y$,

(5) $(x*y)*x=0$,即 $x*y\leqslant x$.

定义 2[2-3] 在 BCK-代数 X 中,如果存在 $1\in X$,使 $\forall x\in X$,有 $x\leqslant 1$,称 1 为 X 的最大元,存在最大元的 BCK-代数叫有界的,并记 $Nx=1*x$.

引理 2[2-3] 设 1 是有界 BCK-代数的最大元,$\forall x,y\in X$,有

(1) $y\leqslant x, Nx*y=Ny*x$,

(2) $NN(x)\leqslant x$.

定义 3[2-3] 设 X 是有界 BCK-代数,如果对任意 $x\in X$,有 $NN(x)=x$,称 X 是对合 BCK-代数.

引理 3[2-3] 设 X 是 BCK-代数,则以下命题等价:

(1) X 是对合的,

(2) $Ny*Nx=x*y$,

(3) $x*Ny=y*Nx$.

另外,我们知道,半群与序结构相交融形成了序半群,文[5]对序半群理论作了全面的论述.

定义 4[5] 设 S 是半群,$\leqslant$ 为 S 上的偏序,$\forall a,b,c\in S$,如果 $a\leqslant b$,必有

$$ac\leqslant bc, ca\leqslant cb,$$

称 S 为序半群,记为$(S,\cdot,\leqslant)$. 在不致混淆时,也记为 S.

设 $1\in S$,如果 $\forall a\in S$,有 $1a=a1=a$,称 1 为 S 的幺元. 设 x,y 是序半群 S 中的元素,如果集合

$$\{z\in S\mid zx\leqslant y\}(\{z\in S\mid xz\leqslant y\})$$

非空,且有最大元,记为 $y:x(y::x)$,我们称 $y:x(y::x)$ 为 y 关于 x 的左(右)剩余. 如果 S 中的任意两个元素均有左剩余和右剩余,称 S 为可剩余半群.

在交换可剩余半群中左剩余与右剩余等价,且有

引理 4[5] 在交换可剩余半群 S 中,$\forall x,y,z\in S$,有

(1) $(y:x)x=x(y:x)\leqslant y$,

(2) $zx\leqslant y\Rightarrow z\leqslant y:x$,

(3) $a\leqslant b\Rightarrow \forall x\in S, a:x\leqslant b:x; x:b\leqslant x:a$,

(4) $y\leqslant x:(x:y)$,

(5) $x:yz=(x:y):z$.

2 结论

我们先由对合 BCK-代数的运算导出一种新运算.

定理 1 设$(X,*,0)$是以 1 为上界的对合 BCK-代数,规定:$xy=x*Ny$,则

(1) $xy=yx$,

(2) $(xy)z=x(yz)$,

(3) $x\leqslant y\Rightarrow xz\leqslant yz$,

(4) $1x=x, 0x=0, xNx=0$.

证明 (1)由引理 3 中的式(3)可得 $xy=x*Ny=y*Nx=yx$.

(2)由引理 1 中的式(4)可得

$$(xy)z=yx*Nz=(y*Nx)*Nz=(y*Nz)*Nx=(yz)x=x(yz).$$

(3)设 $x\leqslant y$,由引理 1 中的式(3)可得 $x*Nz\leqslant y*Nz$,即 $xz\leqslant yz$.

(4)由于 X 是对合 BCK-代数,有

$$1x=1*(Nx)=NNx=x, 0x=0*Nx=0, xNx=x*NNx=x*x=0.$$

根据定理 1 中的乘法运算,便可由对合 BCK-代数导出交换可剩余序半群.

定理 2 设$(X,*,0)$是以 1 为最大元的对合 BCK-代数,规定:$xy=x*Ny$,那么 X 关于该乘法作成以

1 为幺元的交换可剩余序半群,且 $b:a=N(a*b)$.

证明 由定理 1 直接可得,$(X,\cdot,1)$是以 1 为幺元的交换序半群. 下面证明它是可剩余的.

$\forall a,b\in X$,首先,由定义 3 和引理 1 得 $aN(a*b)=a*NN(a*b)=a*(a*b)\leqslant b$. 其次,设 $ax\leqslant b$,即 $a*Nx=a*(1*x)\leqslant b$,从而$(a*(1*x))*b=0$,由引理 1 中的式(4)可得$(a*b)*(1*x)=0$,即 $a*b\leqslant 1*x$,再由引理 1 的式(3)得

$$x=1*(1*x)\leqslant 1*(a*b)=N(a*b),$$

故 $N(a*b)=b:a$,则$(X,\cdot,\leqslant,1)$是可剩余半群.

定义 5 设$(X,*,0)$是以 1 为最大元的对合 BCK-代数,规定:$xy=x*Ny$,把定理 2 中导出的以 1 为幺元的交换可剩余半群$(X,\cdot,\leqslant,1)$称做 BCK-代数$(X,*,0)$的伴随序半群.

推论 1 设$(X,*,0)$是以 1 为最大元的对合 BCK-代数,则它的伴随序半群$(X,\cdot,1)$是群当且仅当 X 是平凡 BCK-代数.

证明 如果$(X,\cdot,1)$是群,则 $\forall x\in X$, $\exists y\in X$,使得 $xy=x*Ny=x*(1*y)=1$,由引理 1 中的式(5)知,$1=x*(1*y)\leqslant x$,但是 1 为最大元,故 $x=1$,从而 X 中只有一个元素. 反过来显然成立.

下面讨论定理 2 的逆问题,即由含幺交换可剩余半群,如何导出 BCK-代数.

定理 3 设$(S,\cdot,\leqslant,1)$是以 1 为幺元的交换可剩余序半群,且 1 为最大元,$a:b$ 表示 a 关于 b 的剩余,那么$(S,:,1)$是 BCK-代数,且该 BCK-代数的自然偏序是序半群中偏序的对偶.

证明 $\forall x,y,z\in S$,有

(1)如果 $x:y=1$,那么 $y1\leqslant x$,即 $y\leqslant x$. 反过来,如果 $y\leqslant x$,即 $y1\leqslant x$,从而 $1\leqslant x:y$,但 1 为最大元,故 $x:y=1$. 从而 $x:y=1$ 当且仅当 $y\leqslant x$,进而 $x:y=1$,$y:x=1$ 当且仅当 $x=y$.

(2)设 $x:1=y$,即 $y=y1\leqslant x$,由于 $1x=x\leqslant x$,故 $x\leqslant x:1=y$,所以 $x=y$,从而有 $x:1=x$.

(3)设 $x:y=u$,$x:z=v$,$z:y=w$,则

$$uy=yu\leqslant x,vz=zv\leqslant x,wy=yw\leqslant z.$$

故 $vwy\leqslant vz\leqslant x$,有 $wv=vw\leqslant x:y=u$,$w\leqslant u:v$,由(1)知$(u:v):w=1$,即

$$((x:y):(x:z)):(z:y)=1.$$

(4)由于 1 是幺元和最大元,即 $\forall x\in S$,有 $x1=x\leqslant 1$,所以,$1\leqslant 1:x$,再由 1 是最大元知,$1:x=1$.

由定义 1 知,$(S,:,1)$是 BCK-代数. 由于 BCK-代数$(S,:,1)$的自然偏序为 $x\leqslant' y\Leftrightarrow x:y=0$,但由以上(1)的证明过程知 $x:y=1\Leftrightarrow y\leqslant x$,所以 $x\leqslant' y\Leftrightarrow y\leqslant x$,即序半群$(S,\cdot,\leqslant,1)$中的偏序与它的伴随 BCK-代数$(S,:,1)$的自然偏序互相对偶.

定义 6 设$(S,\cdot,\leqslant,1)$是一个以 1 为幺元的交换可剩余半群,且 1 为最大元,$a:b$ 表示 a 关于 b 的剩余,把定理 3 中的 BCK-代数$(S,:,1)$叫做序半群$(S,\cdot,\leqslant,1)$的伴随 BCK-代数.

推论 2 设$(S,\cdot,\leqslant,1)$是一个以 1 为幺元的交换可剩余半群,且 1 为最大元,m 为最小元,则它的伴随 BCK-代数$(S,:,1)$是对合的.

证明 显然,m 是伴随 BCK-代数$(S,:,1)$的最大元,故$(S,:,1)$有界. $\forall x\in S$,由引理 4 中的式(4)知,$x\leqslant m:(m:x)$,又由引理 1 中的公式 1 知,$m:(m:x)\leqslant x$,故 $NNx=m:(m:x)=x$,即$(S,:,1)$是对合的.

定理 4 设对合 BCK-代数$(X,*,0)$的伴随序半群为$(X,\cdot,\leqslant,1)$,那么序半群$(X,\cdot,\leqslant,1)$的伴随 BCK-代数$(X,:,1)$与$(X,*,0)$同构.

证明 由于对合 BCK-代数$(X,*,0)$的伴随序半群为$(X,\cdot,\leqslant,1)$,$\forall x,y\in X$,由定理 2 知,它的剩余运算为:$x:y=N(y*x)$. 设$f(x)=Nx(\forall x\in X)$,如果 $Nx=Ny$,那么 $NNx=NNy$,由于 BCK-代数$(X,*,0)$是对合的,故 $x=y$,即 f 是单射. $\forall x\in X$,令 $a=Nx$,那么,$f(a)=NNx=x$,故 f 是双射. $\forall x,y\in X$,有 $f(x)=Nx$,$f(y)=Ny$,$f(x*y)=N(x*y)=y:x$. 由于 BCK-代数$(X,*,0)$是对合的,由定理 2 和引理 3 得

$$f(x):f(y)=Nx:Ny==N(Ny*Nx)=N(x*y)=y:x.$$

故 $f(x*y)=f(x):f(y)$,故 f 是同构映射,即$(X,:,1)\cong(X,*,0)$.

定理 5 设$(S,\cdot,\leqslant,1)$是一个以 1 为幺元的交换可剩余半群,且 1 为最大元,m 为最小元,它的伴随 BCK-代数为$(S,:,1)$,且 BCK-代数$(S,:,1)$的伴随序半群为$(S,\circ,\leqslant',m)$,那么$(S,\circ,\leqslant',m)\cong(S,\cdot,\leqslant,1)$.

证明 由推论 2 知,伴随 BCK-代数$(S,:,1)$是对合的,且 m 是最大元,故 $Nx=m:x$. 设 $f(x)=Nx(\forall x\in$

S),如果 $Nx=Ny$,那么 $NNx=NNy$,由于 BCK-代数$(S,:,1)$是对合的,故 $x=y$,即 f 是单射. $\forall x\in S$,令 $a=Nx$,那么,$f(a)=NNx=x$,故 f 是 S 上的双射变换. $\forall x,y\in S$,有 $f(x)=Nx$,$f(y)=Ny$,由引理 4 中的式(5)得

$$f(xy)=N(xy)=m:xy=(m:x):y.$$

另外,由定理 2 可得

$$f(x)\circ f(y)=Nx\circ Ny=Nx:NNy=Nx:y=(m:x):y.$$

故 $f(xy)=f(x)\circ f(y)$. 再设 $x\leqslant y$,由引理 4 中的式(3)知,$m:y=m:x$,即 $Ny\leqslant Nx$,故 $f(x)\leqslant' f(y)$,故 f 是序半群$(S,\cdot,\leqslant,1)$到$(S,\circ,\leqslant',m)$的同构映射.

[参考文献]

[1] ISEKI K. An algebra related with a propositional calculus[J]. Proceedings of the Japan academy,1966,42:26-29.

[2] 孟杰,刘用麟. BCK-代数引论[M]. 西安:陕西科学技术出版社,2001.

[3] HUANG Y S. BCI-algebra[M]. Beijing:Science Press,2006.

[4] 杨闻起. BCI-代数与半群[M]. 北京:科学出版社,2011.

[5] 谢祥云. 序半群引论[M]. 北京:科学出版社,2001.

[6] 朱怡权. 蕴涵代数与 BCK-代数[J]. 模糊系统与数学,2002,16(3):31-37.

[7] 朱怡权. 关于正则余剩余格与对合 BCK-格[J]. 模糊系统与数学,2010,24(1):23-28.

[责任编辑:陈　庆]