doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2018.01.004

关于 Diophantine 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 与 $y^2-2^nz^2=4$ 的公解

万 飞,杜先存

(红河学院教师教育学院,云南 蒙自 661199)

[摘要] 本文证明了当 $s,n\in\mathbf{Z}^+$时 Diophantine 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 与 $y^2-2^nz^2=4$ 除开 $s=2$ 且 $n=1,3,5$ 外仅有平凡解$(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$.

[关键词] 整数解,公解,基本解,Pell 方程,递归序列,奇素数

[中图分类号]O156 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2018)01-0017-05

On the Diophantine Equations $x^2-s(s+1)y^2=1$ and $y^2-2^nz^2=4$

Wan Fei,Du Xiancun

(College of Teacher Education,Honghe University,Mengzi 661199,China)

Abstract: In this paper, the following conclusions are proved: If $s,n\in\mathbf{Z}^+$, then the equations in title has only trivial solution $(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$ with the exceptions that $s=2$ and $n=1,3,5$.

Key words: integer solution, common solution, fundamental solution, Pell equation, recursive sequence, odd prime

Diophantine 方程 $x^2-D_1y^2=k$ 与 $y^2-Dz^2=m$ 的求解问题一直受到人们的关注.$k=1,m=4$ 时,方程变为

$$x^2-D_1y^2=1 \text{ 与 } y^2-Dz^2=4. \tag{1}$$

关于方程(1)的解的情况,目前已有如下一些结果:

(1)$D_1=2$,陈建华[1]解决了 D 最多为 2 个不同奇素数之积的情况;曹珍富[2]、曾登高[3]等解决了 D 最多为 4 个不同奇素数之积的情况;陈永高[4]解决了 $D\equiv-1\pmod{12}$且 D 最多为 6 个不同的奇素数之积的情况;任小枝[5]解决了 $D\equiv-1\pmod{12}$且 D 最多为 8 个不同的奇素数之积的情况;胡永忠、韩清[6],管训贵[7]等对 $D=2\prod_{i=1}^{k}p_i$(p_i 是互异的奇素数)的不同情况做过一些研究;陈志云[8]解决了 $D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$的情况.

(2)$D_1=6,D=2\prod_{i=1}^{k}p_i$($p_i$ 是互异的奇素数)时,贺腊荣等[9]已经对 p_i 受某些条件限制的情况做过一些工作;$D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$时,王冠闽、李炳荣[10]已经解决.

(3)$D_1=30,D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$时,贺腊梅[11]已经解决.

(4)$D_1=m(m+1),D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$时,贺腊梅[11]已经解决了$\frac{m(m+1)}{2}\equiv3\pmod 8\ (m\in\mathbf{Z}^+)$时的情形.

在此基础上,本文将利用与文[11]不同的方法研究 $D_1=s(s+1)\ (s\in\mathbf{Z}^+),D=2^n(n\in\mathbf{Z}^+)$时方程(1)的解的情况.

收稿日期:2016-12-15.

基金项目:江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ160782)、红河学院校级教改课题(JJJG151010)、江西科技师范大学重点课题(2015XJZD002)、红河学院中青年学术骨干培养资助(2015GG0207)

通讯联系人:万飞,副教授,研究方向:初等数论及数学教育. E-mail:mzwanfei@163.com

1 主要引理

引理 1[12] 当 $a>1$ 且 a 是平方数时,方程 $ax^4-by^2=1$ 至多有一组正整数解.

引理 2 Diophantine 方程 $(2s+1)^2x^4-s(s+1)y^2=1$ 仅有正整数解 $(x,y)=(1,2)$.

证明 由引理 1 知,方程 $(2s+1)^2x^4-s(s+1)y^2=1$ 至多只有一组正整数解,而 $(1,2)$ 为方程 $(2s+1)^2x^4-s(s+1)y^2=1$ 的正整数解,故方程 $(2s+1)^2x^4-s(s+1)y^2=1$ 仅有正整数解 $(x,y)=(1,2)$.

引理 3[13] 设 $d\in\mathbf{Z}^+$ 且不是一个完全平方数,设 (x_1,y_1) 为方程 $x^2-dy^2=1$ 的最小解,则 $x^2-dy^2=1$ 的全部正整数解 (x_n,y_n) 可以由下式给出:

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{1}{2}[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n+(x_1-\sqrt{d}y_1)^n], \\ y_n=\dfrac{1}{2\sqrt{d}}[(x_1+\sqrt{d}y_1)^n-(x_1-\sqrt{d}y_1)^n], \end{cases} \quad n\in\mathbf{N}.$$

引理 4[14] 设 a,b 是 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解,则有下面递归序列成立:

$$\begin{cases} x_{n+2}=2ax_{n+1}-x_n, y_{n+2}=2ay_{n+1}-y_n, \\ x_0=1, x_1=a; y_0=0, y_1=b. \end{cases}$$

引理 5 设 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的全部整数解为 (x_n,y_n), $n\in\mathbf{Z}$,则 $\dfrac{x_n}{2s+1}$ 为平方数当且仅当 $n=1$.

证明 若 $\dfrac{x_n}{2s+1}=a^2$,则 $x_n=(2s+1)a^2$,代入原方程得 $(2s+1)^2a^4-s(s+1)y^2=1$. 由引理 2 得, $(2s+1)^2a^4-s(s+1)y^2=1$ 仅有整数解 $(a,y)=(\pm1,\pm2)$,此时 $x_n=2s+1$,从而 $n=1$.反之,显然.

引理 6 设 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的全部整数解为 (x_m,y_m), $m\in\mathbf{Z}$,则对任意 $m\in\mathbf{Z}$, x_m, y_m 具有如下性质:

(1) $y_{2m}=2x_my_m$;

(2) $x_{m+1}=(2s+1)x_m+2s(s+1)y_m$, $y_{m+1}=2x_m+(2s+1)y_m$;

(3) $x_{m-1}=(2s+1)x_m-2s(s+1)y_m$, $y_{m-1}=-2x_m+(2s+1)y_m$;

(4) $y_m^2-4=y_{m-1}y_{m+1}$;

(5) $x_{m+2}=2(2s+1)x_{m+1}-x_m$, $x_0=1$, $x_1=2s+1$;

(6) $y_{m+2}=2(2s+1)y_{m+1}-y_m$, $y_0=0$, $y_1=2$;

(7) $x_m\equiv1\pmod 2$, $x_{2m+1}\equiv0(\bmod(2s+1))$, $x_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$;

(8) $y_{2m+1}\equiv2\pmod 4$, $y_{2m}\equiv0\pmod 4$;

(9) $gcd(y_m,y_{m+1})=2$;

(10) $y_{2m+1}\equiv\pm2\ (\bmod(2s+1))$, $y_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$;

(11) $gcd(x_{2m+1},y_{2m})=gcd(x_{2m+1},y_{2m+2})=2s+1$;

(12) $gcd(x_m,y_m)=gcd(x_m,x_{m+1})=gcd(x_{2m+2},y_{2m+1})=gcd(x_{2m},y_{2m+1})=1$.

证明 设 (x_1,y_1) 为 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的基本解,则有 $(x_1,y_1)=(2s+1,2)$.

由引理 3 可得到(1)、(2)、(3).

(4) 设 $\varepsilon=2s+1+2\sqrt{s(s+1)}$, $\bar{\varepsilon}=2s+1-2\sqrt{s(s+1)}$,则由引理 3,得 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的全部整数解 (x_m,y_m), $m\in\mathbf{Z}$ 可表为:

$$\begin{cases} x_m=\dfrac{\varepsilon^m+(\bar{\varepsilon})^m}{2}, \\ y_m=\dfrac{\varepsilon^m-(\bar{\varepsilon})^m}{2\sqrt{s(s+1)}}, \end{cases} \quad m\in\mathbf{Z}.$$

则有 $y_m^2=\left[\dfrac{\varepsilon^m-(\bar{\varepsilon})^m}{2\sqrt{s(s+1)}}\right]^2=\dfrac{\varepsilon^{2m}+(\bar{\varepsilon})^{2m}-2}{4s(s+1)}$, $y_m^2-4=\dfrac{\varepsilon^{2m}+(\bar{\varepsilon})^{2m}-2(8s^2+8s+1)}{4s(s+1)}$;而

$y_{m+1}y_{m-1}=\dfrac{\varepsilon^{m+1}-(\bar{\varepsilon})^{m+1}}{2\sqrt{s(s+1)}}\dfrac{\varepsilon^{m-1}-(\bar{\varepsilon})^{m-1}}{2\sqrt{s(s+1)}}=\dfrac{\varepsilon^{2m}+(\bar{\varepsilon})^{2m}-[\varepsilon^2+(\bar{\varepsilon})^2]}{4s(s+1)}=\dfrac{\varepsilon^{2m}+(\bar{\varepsilon})^{2m}-2(8s^2+8s+1)}{4s(s+1)}$,故 $y_m^2-4=y_{m+1}y_{m-1}$.

由引理 4 得(5)、(6)成立.

(7)对递归序列(5)取模 2,得周期为 1 的剩余类序列,且对于 $\forall m\in\mathbf{Z}^+$,均有 $x_m\equiv1(\bmod 2)$;

对递归序列(5)取模 $2s+1$,得周期为 4 的剩余类序列,且当 $m\equiv1(\bmod 2)$ 时有 $x_m\equiv0(\bmod(2s+1))$,当 $m\equiv2(\bmod 4)$ 时有 $x_m\equiv-1(\bmod(2s+1))$,当 $m\equiv0(\bmod 4)$ 时有 $x_m\equiv1(\bmod(2s+1))$,故有 $x_{2m+1}\equiv0(\bmod(2s+1))$,$x_{2m}\equiv\pm1(\bmod(2s+1))$,故 $x_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$.

(8)对递归序列(6)取模 4,得周期为 2 的剩余类序列,且当 $m\equiv1(\bmod 2)$ 时有 $y_m\equiv2(\bmod 4)$,且当 $m\equiv0(\bmod 2)$ 时有 $y_m\equiv0(\bmod 4)$,故有 $y_{2m+1}\equiv2(\bmod 4)$,$y_{2m}\equiv0(\bmod 4)$.

由(8)即可得(9)成立.

(10)对递归序列(6)取模 $2s+1$,得周期为 4 的剩余类序列,且当 $m\equiv0(\bmod 2)$ 时有 $y_m\equiv0(\bmod(2s+1))$,当 $m\equiv1(\bmod 4)$ 时有 $y_m\equiv2(\bmod(2s+1))$,当 $m\equiv3(\bmod 4)$ 时有 $y_n\equiv-2(\bmod(2s+1))$,故有 $y_{2m+1}\equiv\pm2(\bmod(2s+1))$,$y_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$.

(11)由 $x_{m+1}=(2s+1)x_m+2s(s+1)y_m$,得 $x_{2m+1}=(2s+1)x_{2m}+2s(s+1)y_{2m}$,则有

$$gcd((2s+1)x_{2m}+2s(s+1)y_{2m},y_{2m})=gcd((2s+1)x_{2m},y_{2m})=gcd(2s+1,y_{2m}),$$

再由(10)中的 $y_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$可得$(x_{2m+1},y_{2m})=2s+1$.

同理可得 $gcd(x_{2m+1},y_{2m+2})=2s+1$.

(12)设 $gcd(x_m,s)=t$,则由(2)中的 $x_{m+1}=(2s+1)x_m+2s(s+1)y_m$ 知 $t\mid x_{m+1}$,故由 $x_{m+1}^2-s(s+1)y_{m+1}^2=1$ 得 $t\mid1$,所以 $t=1$,即 $gcd(x_m,s)=1$.

同理可得 $gcd(x_m,s+1)=1$.

由(2)中的 $y_{m+1}=2x_m+(2s+1)y_m$,得 $y_{2m+1}=2x_{2m}+(2s+1)y_{2m}$.再设 $gcd(2s+1,y_{2m+1})=p$,则由 $y_{2m+1}=2x_{2m}+(2s+1)y_{2m}$知 $p\mid x_{2m}$,再由 $p\mid(2s+1)$及(10)中的 $y_{2m}\equiv0(\bmod(2s+1))$得 $p\mid y_{2m}$,故由 $x_{2m}^2-s(s+1)y_{2m}^2=1$ 得 $p\mid1$,所以 $p=1$,即 $gcd(2s+1,y_{2m+1})=1$.

同理可得 $gcd(x_{2m},2s+1)=1$.

再设 $gcd(x_m,y_m)=d$,则由 $x_m^2-s(s+1)y_m^2=1$ 知,$d^2\mid1$,故 $d=1$,所以 $gcd(x_m,y_m)=1$;由(2)知 $gcd(x_m,x_{m+1})=gcd(x_m,(2s+1)x_m+2s(s+1)y_m)=gcd(x_m,2s(s+1)y_m)=gcd(x_m,y_m)=1$,即 $gcd(x_m,x_{m+1})=1$;由(2)知 $gcd(x_{2m+2},y_{2m+1})=gcd((2s+1)x_{2m+1}+2s(s+1)y_{2m+1},y_{2m+1})=gcd((2s+1)x_{2m+1},y_{2m+1})=gcd(x_{2m+1},y_{2m+1})=1$,即 $gcd(x_{2m+2},y_{2m+1})=1$;由(2)知 $gcd(x_{2m},y_{2m+1})=gcd(x_{2m},2x_{2m}+(2s+1)y_{2m})=gcd(x_{2m},(2s+1)y_{2m})=gcd(x_{2m},y_{2m})=1$,故 $gcd(x_{2m},y_{2m+1})=1$.

2　本文主要结论

定理　若 $s,n\in\mathbf{Z}^+$,则 Diophantine 方程

$$x^2-s(s+1)y^2=1 \text{ 与 } y^2-2^nz^2=4 \tag{2}$$

的公解的情况如下:

(1)当 $s=2$ 时,

①若 $n=1$,式(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm140)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$;

②若 $n=3$,式(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm70)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$;

③若 $n=5$,式(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm35)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$;

④若 $n\neq1,3,5$,式(2)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm5,\pm2,0)$;

(2)当 $s\neq2$ 时,式(2)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm(2s+1),\pm2,0)$.

3　定理证明

设(x_1,y_1)为 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的基本解,则有$(x_1,y_1)=(2s+1,2)$,故 Pell 方程 $x^2-s(s+1)y^2=1$ 的全部整数解(x_m,y_m),$m\in\mathbf{Z}$ 可表示为:

$$x_m+\sqrt{s(s+1)}\,y_m=\pm[x_1+\sqrt{s(s+1)}\,y_1]^m=\pm[2s+1+2\sqrt{s(s+1)}]^m,m\in\mathbf{Z}.$$

设$(x,y,z)=(x_m,y_m,z),m\in\mathbf{Z}$为(2)的整数解.

若n为正偶数,设$n=2l,l\in\mathbf{Z}^+$,则由$y^2-2^nz^2=4$得,$2^nz^2=2^{2l}z^2=y_m^2-4$,即$(y_m+2^lz)(y_m-2^lz)=4$,于是$y_m+2^lz=4,y_m-2^lz=1$,解得$y_m=\dfrac{5}{2},z=\dfrac{3}{2^{l+1}}$,由此可见此时方程(2)无正整数解,故当$n$为正偶数时方程(2)无非平凡解.

又$(y_m,z)=(\pm2,0)$为$y^2-2^nz^2=4$的平凡解,故当n为正偶数时(2)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm(2s+1),\pm2,0)$.

若n为正奇数,令$n=2l-1,l\in\mathbf{Z}^+$,则由引理6(4)知(2)成为

$$2^nz^2=2^{2l-1}z^2=y_m^2-4=y_{m-1}y_{m+1}.\tag{3}$$

若m为偶数,令$m=2k,k\in\mathbf{Z}$,此时(3)成为

$$2^{2l-1}z^2=y_{2k-1}y_{2k+1}.\tag{4}$$

由引理6(8)知$y_{2k-1}\equiv y_{2k+1}\equiv2(\bmod 4)$,则有$2\parallel y_{2k-1},2\parallel y_{2k+1}$,故式(4)的右边2的次数为2(偶数次),而式(4)的左边2的次数为$2l-1$次(奇数次),矛盾. 由此可见m为偶数时(10)无整数解,则(2)无整数解.故m只能为奇数,令$m=2k-1,k\in\mathbf{Z}$,则(3)成为

$$2^{2l-1}z^2=4x_{k-1}y_{k-1}x_ky_k.\tag{5}$$

由引理6(9),(12)得,$gcd(x_{k-1},y_{k-1})=gcd(x_k,y_k)=gcd(x_k,x_{k-1})=1,gcd(y_k,y_{k-1})=2$,则$gcd\left(\dfrac{y_k}{2},\dfrac{y_{k-1}}{2}\right)=1$.

①k为奇数时,由引理6(11),(12)得,$gcd(x_{k-1},y_k)=1,gcd(x_k,y_{k-1})=2s+1$,

则$gcd\left(\dfrac{x_k}{2s+1},\dfrac{y_{k-1}}{2s+1}\right)=1$.所以$x_{k-1},\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)},\dfrac{x_k}{2s+1},\dfrac{y_k}{2}$两两互素.

又$k=1$时,$x_{k-1}=x_0=1,\dfrac{x_k}{2s+1}=\dfrac{x_1}{2s+1}=1,\dfrac{y_k}{2}=\dfrac{y_1}{2}=1$,而对于任意$k\in\mathbf{Z},\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)}\neq1$.故$k\neq1$为奇数时,$x_{k-1},\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)},\dfrac{x_k}{2s+1},\dfrac{y_k}{2}$两两互素且均不为1.

由引理5知$\dfrac{x_k}{2s+1}$为平方数当且仅当$k=1$,故当$k\neq1$时,$\dfrac{x_k}{2s+1}$不为平方数.又$k\neq1$时,$x_{k-1},\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)},\dfrac{x_k}{2s+1},\dfrac{y_k}{2}$两两互素且均不为1.又由引理6(7)知$x_{k-1}\equiv1(\bmod 2)$,故当$k\neq1$时,$x_{k-1}\cdot\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)}\cdot\dfrac{x_k}{2s+1}\cdot\dfrac{y_k}{2}$不为平方数的2倍,所以$4x_{k-1}y_{k-1}x_ky_k=2^2\cdot(2s+1)^2\cdot x_{k-1}\cdot\dfrac{y_{k-1}}{2(2s+1)}\cdot\dfrac{x_k}{2s+1}\cdot\dfrac{y_k}{2}$不为平方数的2倍,所以此时无整数解,则(2)无整数解.

$k=1$时,(5)为$2^{2l-1}z^2=4x_0y_0x_1y_1=0$,则$z=0$,故此时(2)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm(2s+1),\pm2,0)$.

②k为偶数时,由引理6(11),(12)得,$gcd(x_k,y_{k-1})=1,gcd(x_{k-1},y_k)=2s+1$,

则$gcd\left(\dfrac{x_{k-1}}{2s+1},\dfrac{y_k}{2s+1}\right)=1$.故$x_k,\dfrac{y_k}{2(2s+1)},\dfrac{x_{k-1}}{2s+1},\dfrac{y_{k-1}}{2}$两两互素.

又$k=0$时,$x_k=x_0=1$;$k=2$时,$\dfrac{x_{k-1}}{2s+1}=\dfrac{x_1}{2s+1}=1,\dfrac{y_{k-1}}{2}=\dfrac{y_1}{2}=1$;而对于任意$k\in\mathbf{Z},\dfrac{y_k}{2(2s+1)}\neq1$.故$k\neq0,2$为偶数时,$x_k,\dfrac{y_k}{2(2s+1)},\dfrac{x_{k-1}}{2s+1},\dfrac{y_{k-1}}{2}$两两互素且均不为1.

由引理5知$\dfrac{x_{k-1}}{2s+1}$为平方数当且仅当$k=2$,故$k\neq2$时x_k不为平方数.又$k\neq0,2$时,$x_k,\dfrac{y_k}{2(2s+1)},\dfrac{x_{k-1}}{2s+1},\dfrac{y_{k-1}}{2}$两两互素且均不为1.又由引理6(7)知$x_k\equiv1(\bmod 2)$,故$x_k\cdot\dfrac{y_k}{2(2s+1)}\cdot\dfrac{x_{k-1}}{2s+1}\cdot\dfrac{y_{k-1}}{2}$不为平方数的2倍,所

以 $4x_{k-1}y_{k-1}x_ky_k=2^2(2s+1)^2\cdot x_k\cdot\frac{y_k}{2(2s+1)}\cdot\frac{x_{k-1}}{2s+1}\cdot\frac{y_{k-1}}{2}$不为平方数的 2 倍,所以此时(5)无整数解,则(2)无整数解.

$k=0$ 时,(5)为 $2^{2l-1}z^2=4x_{-1}y_{-1}x_0y_0=0$,则 $z=0$,故此时(2)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm(2s+1),\pm2,0)$.

$k=2$ 时,(5)为 $2^{2l-1}z^2=4x_1y_1x_2y_2=4\times5\times2\times49\times20=2^5\times5^2\times7^2$,则有$(l,z)=(1,\pm140),(2,\pm70),(3,\pm35)$.

此时 $m=2k-1=3$,即 $y_3=198$.又由(6)知 $y_2=4(2s+1)$,再由(6)得 $y_3=2(2s+1)y_2-y_1$,且 $y_3=198$,则有$(2s+1)^2=25$,解得 $s=2$,$s=-3$(舍去).又 $y_{-3}=-y_3$,所以$(y_{-3})^2=(-y_3)^2$,故 $y_3=-198$ 也是 Pell 方程 $x_m^2-s\cdot(s+1)y_m^2=1$ 的解.

故 $l=1$,即 $n=2l-1=1$ 时(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm140)$;$l=2$,即 $n=2l-1=3$ 时,(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm70)$;$l=3$,即 $n=2l-1=5$ 时,(2)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm485,\pm198,\pm35)$.

综上,定理得证.

[参考文献]

[1] 陈建华. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 武汉大学学报(理学版),1990,19(1):8-12.

[2] 曹珍富. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 科学通报,1986,31(6):476.

[3] 曾登高. 也说 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 数学的实践与认识,1995(1):81-84.

[4] 陈永高. Pell 方程组 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 北京大学学报(自然科学版),1994,30(3):298-302.

[5] 任小枝. Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 和 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 南京师大学报(自然科学版),2014,37(2):1-4.

[6] 胡永忠,韩清. 也谈不定方程组 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2002,36(1):17-19.

[7] 管训贵. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),2012,46(3):267-269,278.

[8] 陈志云. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报(自然科学版),1998(2):137-140.

[9] 贺腊荣,张淑静,袁进. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$,$y^2-Dz^2=4$[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2012,21(1):57-58.

[10] 王冠闽,李炳荣. 关于 Pell 方程 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版),2002,15(4):9-14.

[11] 贺腊梅. 关于几类不定方程组的正整数解的研究[D]. 西安:西北大学,2012.

[12] 乐茂华. 一类二元四次 Diophantine 方程[J]. 云南师范大学学报(自然科学版),2010,30(1):12-17.

[13] 单墫,余红兵. 不定方程[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1991:90.

[14] 赵天. 关于不定方程 $x^3\pm2^{3n}=3Dy^2$[D]. 重庆:重庆师范大学,2008:9.

[责任编辑:陆炳新]