

# 正多边形区域上 Laplace 算子特征值的 非结构网络谱元法

文永松, 庞一成, 张俊, 朱淑娟

(贵州财经大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)

[摘要] 采用高精度的混合三角形、四边形单元剖分求解任意正多边形区域上的 Laplace 算子的特征值. 由 Legendre 多项式线性组合构造内部单元的基函数和边界基函数. 首先, 给出特征值的误差估计和算法实现. 然后, 测试数值算例的精度, 以验证理论结果, 表明方法的有效性及其正确性.

[关键词] Laplace 算子, 特征值问题, 非结构网络谱元法

[中图分类号] O241.82 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2018)01-0026-04

## An Unstructured Spectral Element Method for the Laplace Eigenvalue Problem on Regular Polygons

Wen Yongsong, Pang Yicheng, Zhang Jun, Zhu Shujuan

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China)

**Abstract:** In this paper, we use an unstructured spectral element method which mixed triangular and quadrangle for the Laplace eigenvalue problem on the regular polygon domain. We construct the basis functions by combining with the Legendre polynomials for the interior element and boundary. The convergence of the eigenvalue and numerical implement are also given. Finally, a series of numerical examples are provided to support the theoretical results and demonstrate the accuracy and efficiency of this methods.

**Key words:** Laplace operator, eigenvalue problem, unstructured spectral element method

谱方法已成为偏微分方程数值求解的重要方法之一, 其主要的优点是高精度, 即如果原方程的解无限光滑, 那么用谱方法所求得的数值解将是指数阶收敛的. 传统意义下的谱方法也有其不足之处, 其中一个主要缺点是要求计算区域规则, 也就是说它无法灵活处理复杂的物理区域. 由 Patera<sup>[1]</sup> 等人发展起来的谱元法基于区域分解的技巧, 将复杂区域分解成若干个较小的四边形或六面体区域, 然后在每个小区域上使用谱方法. 这样, 谱元法既继承了有限元方法对复杂区域的适应性, 又保持了谱方法的高精度优点. 它在不可压流体的计算中取得了很大的成功<sup>[2]</sup>, 如今已经成为计算流体力学中最常用的方法之一. 基于以上优点, 谱(元)方法已经被广泛运用到其它一些领域, 如量子力学和数值天气预报等<sup>[3-6]</sup>.

文献[7-8]提出了一种新型非结构网络谱元法, 本文中我们将这一方法应用于正多边形区域上 Laplace 算子特征值问题的计算. 新方法允许混合任意三角形和四边形单元, 实现了复杂区域的计算.

## 1 问题描述

假设  $\Omega$  为正多边形, 我们考虑 Laplace 特征值问题如下:

$$-\Delta u = \lambda u \text{ in } \Delta, u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \quad (1)$$

收稿日期: 2017-12-12.

基金项目: 贵州省教育厅自然科学研究项目(KY字[2016]170)、贵州省科学技术基金(J[2015]2026)、贵州省教育厅自然科学研究项目(KY[2015]482).

通讯联系人: 庞一成, 博士, 副教授, 研究方向: 高维非线性守恒律方程. E-mail: 2009kyhh@sina.com

定义空间

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ \forall \psi \in L^2(\Omega), \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ in } L^2(\Omega), \psi = 0, \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

则其对应的弱形式为:寻找  $\lambda \in \mathbf{R}, u \in H_0^1(\Omega)$ , 使得

$$(\nabla u, \nabla v) = \lambda(u, v), \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2)$$

首先,把多边形区域剖分成三角形和四边形的组合,取 Legendre-Gauss-Lobatto 点为网络点,如图 1, (a)和(b)分别为五边形和六边形的网络剖分.

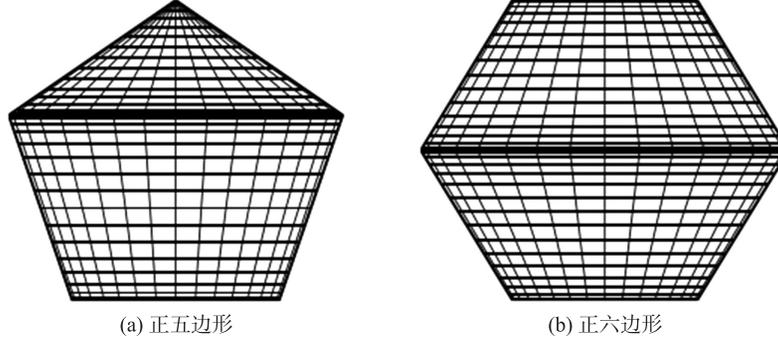


图 1 正五边形和正六边形的网络剖分(其中  $N=16$ )

Fig. 1 The mesh generation of regular pentagons and hexagons( $N=16$ )

其次,我们假设  $\square$  为参考四边形区域为  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , 如果一般三角形区域  $\Omega_k$  的 3 个顶点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  和  $(x_3, y_3)$ , 那么从  $\square$  到三角形单元  $\Omega_k$  的一一映射为:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(x_2-x_1) + \frac{1}{2}(1+\eta)(x_3-x_2) + x_1, \\ y = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(y_2-y_1) + \frac{1}{2}(1+\eta)(y_3-y_2) + y_1, \end{cases} \quad \forall (\xi, \eta) \in \square. \quad (3)$$

逆变换为

$$\begin{cases} \xi = 2 \frac{(x-x_1)(y_3-y_1) - (x_3-x_1)(y-y_1)}{(x-x_3)(y_2-y_1) - (x_2-x_1)(y-y_3)} - 1, \\ \eta = 2 \frac{(x-x_1)(y_2-y_1) - (x_2-x_1)(y-y_1)}{(x_3-x_1)(y_2-y_1) - (x_2-x_1)(y_3-y_1)} - 1, \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \Omega_k. \quad (4)$$

如果  $\Omega_k$  是四边形单元,假设 4 个顶点为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  和  $(x_4, y_4)$ , 那么  $\square$  到四边形单元  $\Omega_k$  的映射如下:  $\forall (\xi, \eta) \in \square$ ,

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1(1-\xi)(1-\eta)}{4} + \frac{x_2(1+\xi)(1-\eta)}{4} + \frac{x_3(1+\xi)(1+\eta)}{4} + \frac{x_4(1-\xi)(1+\eta)}{4}, \\ y &= \frac{y_1(1-\xi)(1-\eta)}{4} + \frac{y_2(1+\xi)(1-\eta)}{4} + \frac{y_3(1+\xi)(1+\eta)}{4} + \frac{y_4(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned}$$

定义离散空间

$$V_{N,K}^0 = \{ \Phi \in H_0^1(\Omega) \cap P_{N,K}(\Omega) \}.$$

式中,  $P_{N,K}(\Omega)$  为定义在每个单元  $\Omega_k$  上的不超过  $N$  阶的多项式空间. 则对应于空间的全离散格式为: 寻求  $\lambda_{N,K} \in \mathbf{R}, u_{N,K} \in V_{N,K}^0$ , 使得

$$(\nabla u_{N,K}, \nabla v_{N,K}) = \lambda_{N,K}(u_{N,K}, v_{N,K}), \forall v_{N,K} \in V_{N,K}^0. \quad (5)$$

## 2 误差分析

首先,我们定义  $\Omega$  上的正交投影算子:  $\Pi_{N,K}^{1,0}: H_0^1(\Omega) \rightarrow V_{N,K}^0$ , 使得对任意的  $\psi \in V_{N,K}^0$ , 满足

$$(\nabla(\psi - \Pi_{N,K}^{1,0}\psi), \nabla \chi_{N,K})_{\Omega} = 0, \forall \chi_{N,K} \in V_{N,K}^0.$$

则我们可以得到如下误差估计,

**引理 1** 令  $r \geq 1$ , 则对所有  $\psi \in H^r(\Omega) \cap V$ , 我们可以得到如下误差估计

$$\|\psi - \Pi_{N,K}^{1,0} \psi\|_{1;\Omega} \leq h^{\min(N+1,r)} N^{1-r} \|\psi\|_{r;\Omega}$$

式中,  $h$  为单元剖分的长度.

**证明** 证明过程可以参考文献[9]中的定理 3.2 及其文献[10]在标准四边形单元上的投影误差定理 7.3.

由参考文献[11]中 Babuska, Osborn 推导的关于特征值和特征向量的误差估计式(1.1)和(1.4), 我们容易得到以下特征值和特征向量的误差收敛阶:

**定理 1** 令  $(\lambda, u)$  和  $(\lambda_{N,K}, u_{N,K})$  分别为问题(1)和问题(2)的解. 如果  $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^r(\Omega)$ , 且  $r \geq 2$ , 那么对于任意的  $N \geq 2$ , 我们有如下结论

$$\|u - u_{N,K}\|_1 \leq Ch^{\min(N+1,r)} N^{1-r}, \tag{6a}$$

$$\lambda - \lambda_{N,K} \leq Ch^{2\min(N+1,r)} N^{2(1-r)}. \tag{6b}$$

### 3 算法实现

为推导问题(1)的线性系统, 需构造内部单元的基函数

$$\phi_{ij}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{4i+6}\sqrt{4j+6}} (L_i(\xi) - L_{i+2}(\xi))(L_j(\eta) - L_{j+2}(\eta)). \tag{7}$$

易证每个子单元的谱空间为

$$V_{N,K}^0 = \text{span} \{ \phi_{ij}^k(\xi, \eta), 0 \leq i, j \leq N-2 \}. \tag{8}$$

其次构造边界基函数:

$$\varphi_i^k(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2(4i+6)}} (L_i(\xi) - L_{i+2}(\xi))(L_0(\eta) - L_2(\eta)), \text{ 如果 } (x_k, y_k) \in \Omega_k. \tag{9}$$

$$\varphi_i^k(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2(4i+6)}} (L_i(\xi) - L_{i+2}(\xi))(L_0(\eta) - L_2(\eta)), \text{ 如果 } (x_k, y_k) \in \Omega_{k+1}.$$

由基函数代入以上表达式, 可得线性代数系统

$$Au_{N,K} = \lambda_{N,K} Bu_{N,K}.$$

以上问题属于广义特征值问题, 可以由 Laplace 库的 dgeev 函数来高效求解出对应的特征值和特征向量, 且计算量大约为  $O((KN)^6)$ .

### 4 数值算例

理论上, 我们可以给出任意多边形的数值结果, 在本文中, 我们只简略给出正五边形和正六边形的特征值收敛结果, 其他正多边形可以由程序类似计算给出.

采用非结构网络谱元法, 把多项式阶数  $N=48$  作为收敛的解(正五边形最小特征值为 7.155 339 137 194 92, 正六边形最小特征值为 7.957 089 389 625 09), 图 2 画出了最小特征值对数-对数坐标下的误差. 从图 2 我们可以看到, 误差呈指数阶下降的趋势.

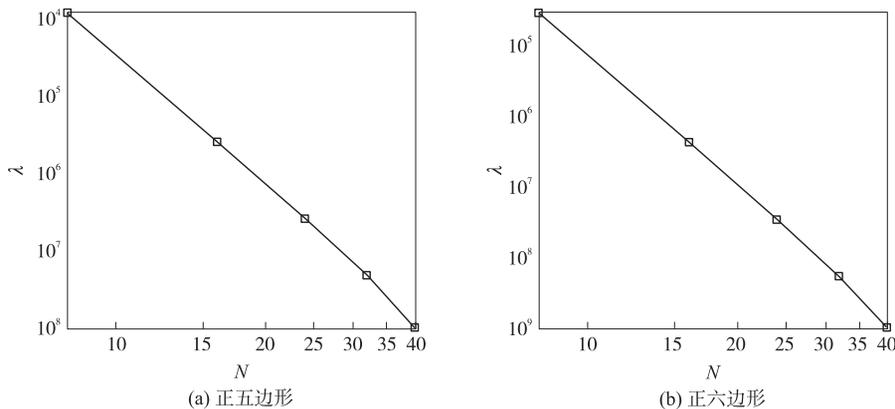


图 2 最小特征值在正五边形和正六边形的误差图(其中以多项式阶数  $N=48$  为精确解)  
 Fig. 2 Error estimate of minimum eigenvalue in regular pentagons and hexagons( $N=48$ )

对应最小特征值的特征向量等值线图如图 3. 其虚线代表负数,实线代表正数. 从图 3 可以看出,在正多边形的中间有一个漩涡产生.

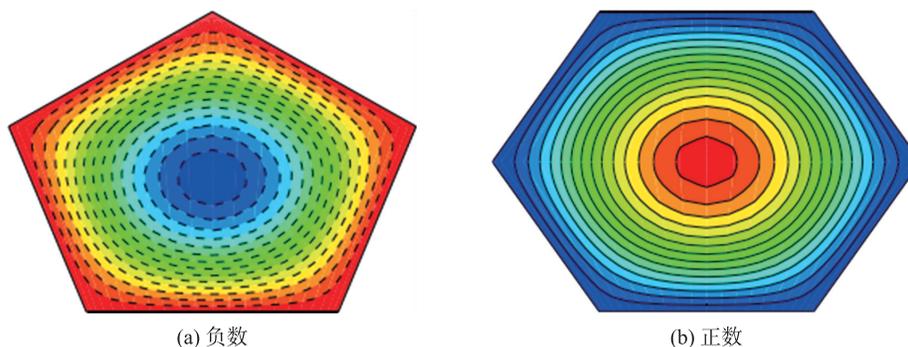


图 3 对应最小特征值的特征向量(其中多项式阶数  $N=24$ )

Fig. 3 The eigenvector corresponding to the minimum eigenvalue( $N=24$ )

#### [ 参考文献 ]

- [ 1 ] PATERA A T. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion[ J ]. Journal of computational physics, 1984, 54( 3 ): 468-488.
- [ 2 ] MADAY Y, PATERA A. Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations[ J ]. State-of-the-art surveys on computational mechanics, 1989: 71-143.
- [ 3 ] BERNARDI C, MADAY Y. Spectral Method[ C ]//Proceedings of Handbook of Numerical Analysis, North-Holland, 1997.
- [ 4 ] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al. Spectral methods in fluid dynamics[ M ]. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 285-331.
- [ 5 ] GOTTLIEB D, ORSZAG D. Numerical analysis of spectral methods: theory and applications[ J ]. For Industr & Appl Maph, 1977, 45( 4 ): 969-970.
- [ 6 ] GUO B Y. Spectral methods and their applications[ M ]. Singapore: World Scientific, 1998.
- [ 7 ] CHEN L Z, SHEN J, XU C J. A triangle spectral method for the Stokes equations[ J ]. Numer Math-Theory Me, 2011, 4( 2 ): 158-179.
- [ 8 ] CHEN L Z, SHEN J, XU C J. A unstructured nodal spectral-element method for the Navier-Stokes equations[ J ]. Commun Comput Phys, 2011, 12( 1 ): 315-336.
- [ 9 ] SHEN J, WANG L L, LI H. A triangular spectral element method using fully tensorial rational basis functions[ J ]. SIAM J Numer Anal, 2009, 47( 3 ): 1 619-1 650.
- [ 10 ] BERNARDI C, MADAY Y. Spectral methods[ J ]. Handbook of numerical analysis, 1997( 5 ): 209-485.
- [ 11 ] BABUSKA I, OSBORN J E. Estimates for the errors in eigenvalue and eigenvector approximation by Galerkin methods, with particular attention to the case of multiple eigenvalues[ J ]. SIAM J Numer Anal, 1987, 24( 6 ): 1 249-1 276.

[ 责任编辑: 陈 庆 ]