

具有抗药性发展的非自治害虫治理模型研究

刘 丽^{1,2}, 曲若文³, 康宝林¹, 刘 兵¹

(1.鞍山师范学院数学与信息科学学院, 辽宁 鞍山 114007)

(2.辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连 116029)

(3.鞍山市第一中学, 辽宁 鞍山 114000)

[摘要] 考虑到杀虫剂对害虫种群的作用具有一定的残留作用, 以及同一种杀虫剂长期且单一的使用会使害虫对杀虫剂产生抗药性, 同时考虑到自然界害虫种群的发展变化受时间影响以及人类对害虫的治理都是呈周期性变化, 本文建立了在杀虫剂作用函数影响下的具有抗药性发展的非自治单种群害虫治理模型, 给出了害虫灭绝的临界条件, 并依据临界条件给出了杀虫剂的切换策略。

[关键词] 抗药性, 杀虫剂作用函数, 非自治害虫治理模型, 害虫灭绝

[中图分类号] O175.1 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2018)01-0030-05

Study on a Non-autonomous Pest Management Model with Resistance Development

Liu Li^{1,2}, Qu Ruowen³, Kang Baolin¹, Liu Bing¹

(1.College of Mathematics and Information Science, Anshan Normal University, Anshan 114007, China)

(2.Department of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(3.Anshan No.1 Middle School, Anshan 114000, China)

Abstract: Considering the residual effect of pesticides on pest populations, the pest resistance to pesticides which developed by the long-term and single use of the same pesticide, the effects of the development of pest populations in the nature affected by the time and a periodic change about the human controlling for the pest, a non-autonomous single-species pest management model with resistance development under the influence of pesticide function is established. Further, the critical condition of pest extinction is given. According to the critical condition, the switching strategy of pesticides is obtained.

Key words: resistance to pesticides, pesticide function, non-autonomous pest management model, pest extinction

害虫往往对人类的生活、生产或他们的作物和牲畜产生负面影响, 进而影响社会经济和生态平衡. 从农业部了解到, 据全国农作物病虫测报网监测调查和专家会商分析, 2017 年农作物病虫害呈重发趋势, 预计发生面积比上年增加 9.7%, 所以研究害虫治理问题对人类生活和社会发展具有重要的意义.

目前, 害虫的治理方法主要包括化学控制和生物控制^[1-11]. 化学控制就是利用化学药剂(如杀虫剂等)对害虫进行控制^[1], 化学控制对害虫的治理作用效果是非常好的, 特别是在害虫数量猛增的时候, 许多重要害虫的控制仍然依赖于化学药剂的使用, 所以应用化学控制来防治害虫是农业生产的客观需要和必然. 在以往的研究中, 假设化学药剂对害虫是成比例杀死的^[2-5], 而实际上由于化学药剂的残留效应, 化学药剂对害虫的杀死率是逐渐减小的, 于是本文在建模时引入单调递减的负指数函数作为杀虫剂作用函数^[6-7, 10]. 又由于化学药剂长期连续且单一的使用, 害虫对化学药剂渐渐产生抗药性, 易感害虫被淘汰, 抗性害虫则生存繁殖起来形成新的抗性种群, 这样会导致害虫重新爆发而导致农作物损失惨重. 与此同时化学药剂的长期连续使用会对土壤、环境产生污染, 也不利于农作物的生长. 所以近年来许多学者通过建立数学模型来研究如何降低害虫对化学药剂产生的抗药性^[5, 7-8], 他们在研究过程中假设害虫种群的变化与

收稿日期: 2017-10-15.

基金项目: 国家自然科学基金(11371030)、辽宁省自然科学基金(20170540001).

通讯联系人: 刘兵, 博士, 教授, 研究方向: 生物数学. E-mail: liubing529@126.com

时间、季节性变化等因素无关,然而实际上自然界害虫种群的变化是受时间影响的,所以有必要考虑周期环境下的害虫治理模型^[9-10].综上本文将建立并研究一类杀虫剂作用函数影响下的具有抗药性发展的只采用化学控制的单种群非自治害虫治理模型,并且给出相应的杀虫剂切换策略.

1 模型构建

假设害虫种群的增长符合非自治单种群 Logistic 模型,即

$$\frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right), \quad (1)$$

式中, $x(t)$ 表示害虫种群在 t 时刻的种群数量; $r(t)$ 表示内禀增长率; $K(t)$ 表示环境容纳量; $r(t)$ 、 $K(t)$ 都是连续的有上下界的正的 T -周期函数.

本文假设周期性喷洒杀虫剂治理害虫,并且由于长期重复喷洒同一种杀虫剂,害虫产生抗药性,因此将害虫种群分为易感害虫和抗药性害虫,于是建立如下的只有化学控制的非自治害虫治理模型,

$$\begin{cases} \frac{dx_s(t)}{dt} = r(t)q(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - b_1(t)x_s(t), \\ \frac{dx_r(t)}{dt} = r(t)(1-q(t))x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - b_2(t)x_r(t), \end{cases} \quad (2)$$

式中, $x_s(t)$ 、 $x_r(t)$ 分别表示易感害虫和抗药性害虫在 t 时刻的种群数量; $b_1(t)$ 、 $b_2(t)$ 分别表示杀虫剂对易感害虫和抗药性害虫的杀虫剂作用函数,这里假设杀虫剂对抗药性害虫几乎不起作用,即 $b_2(t) \approx 0$; 由于杀虫剂对易感害虫的杀死率逐渐减小,这里 $b_1(t)$ 采用负指数函数来刻画,即

$$b_1(t) = me^{-\delta(t-nT_p)}, nT_p \leq t < (n+1)T_p,$$

式中, m 为杀虫剂效率, δ 为杀虫剂的衰减率, T_p 为杀虫剂喷洒周期,且 $T = hT_p$, $h \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$; $q(t)$ 表示在 t 时刻易感害虫数量占害虫总量的比例,即 $q(t) = \frac{x_s(t)}{x(t)}$,那么可以得到关于 $q(t)$ 的微分方程,即

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x_s(t)}{x(t)} \right) = \left(\frac{dx_s(t)}{dt} x(t) + x_s(t) \frac{dx(t)}{dt} \right) / x^2(t) = b_1(t)q(t)(q(t)-1),$$

综上,得到如下具有抗药性的非自治害虫治理模型,

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_s(t)}{dt} + \frac{dx_r(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - b_1(t)q(t)x(t),$$

于是,系统(2)可以改写为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = r(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)} \right) - b_1(t)q(t)x(t), \\ \frac{dq(t)}{dt} = b_1(t)q(t)(q(t)-1), \\ q(0) = q_0. \end{cases} \quad (3)$$

本文中记 $f^L = \inf\{f(t) : 0 < t < T\}$, $f^M = \sup\{f(t) : 0 < t < T\}$.

2 动力学性质分析

对系统(3)中第二个方程在任意区间 $nT_p \leq t < (n+1)T_p$ 进行求解,可得 $q(t)$ 的方程,

$$q(t) = \frac{q(nT_p)}{q(nT_p) + (1-q(nT_p)) \exp\left(\frac{m}{\delta}(1-e^{-\delta(t-nT_p)})\right)}. \quad (4)$$

图 1 模拟了 $q(t)$ 随时间发展的曲线图,其中 T_p 分别取 1、0.8、0.4,可以看出随着杀虫剂喷洒周期的减小易感害虫所占比例 $q(t)$ 也相应减小,说明杀虫剂喷洒频率越快,害虫抗药性发展越快.

通过迭代可以得到

$$q(nT_p) = \frac{q_0}{q_0 + (1 - q_0) \exp\left(\frac{nm}{\delta} (1 - e^{-\delta T_p})\right)}. \quad (5)$$

非自治系统的一般微分方程为

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) F(t, x(t)), \quad (6)$$

式中, $F(t, x(t))$ 是定义在 R_{+0}^2 上的实值函数, 与文献 [11] 相类似的方法, 给出如下判别种群灭绝的引理.

引理 1 假设系统(3)满足:

(1) 函数 $F(t, x(t))$ 是 T_p -周期函数且当 $t \neq nT_p$ 时

对 $x(t)$ 连续可微, 且 $\frac{\partial F(t, x(t))}{\partial x(t)}$ 连续;

(2) 存在两个连续函数 $\eta(x(t))$ 和 $\tau(t)$, 满足对任意的 $x(t) > 0$ 有 $\eta(x(t)) > 0$, 当 $t \geq 0$ 时 $\tau(t) \geq 0$, 并且当 $t \geq 0, x(t) \geq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial F(t, x(t))}{\partial x(t)} \leq -\eta(x(t)) \tau(t),$$

以及

$$\int_0^\infty \tau(t) dt = \infty;$$

(3) 存在 $\xi > 0$, 使得

(a) 当 $t \geq 0$ 时, $F(t, 0) \leq \xi$;

(b) $\exp\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p+l} F(s, 0) ds\right) < 1$, 其中 $0 < l < T_p, n \in \mathbf{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$.

那么系统(5)以 $x(0) = x_0$ 为初值的解 $x(t)$ 满足, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$.

于是得到下面关于害虫灭绝的定理.

定理 1 如果 $R_0(n, T_p) < 1$, 则系统(3)以 $x(0) = x_0$ 为初值的任意解 $x(t)$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$, 其中

$$R_0(n, T_p) = \exp(r^M T_p) \left(\frac{q(nT_p) \exp\left(\frac{m}{\delta} e^{-\delta T_p}\right) + (1 - q(nT_p)) \exp\left(\frac{m}{\delta}\right)}{\exp\left(\frac{m}{\delta}\right)} \right),$$

式中, $q(nT_p)$ 由方程(5)确定.

证明 系统(3)中,

$$F(t, x(t)) = r(t) - \frac{r(t)}{K(t)} x(t) - b_1(t) q(t).$$

首先易看出引理 1 中条件(1)成立. 又

$$\frac{\partial F(t, x(t))}{\partial x(t)} = -\frac{r(t)}{K(t)},$$

取 $\eta(x(t)) = 1, \tau(t) = \frac{r(t)}{K(t)}$, 则

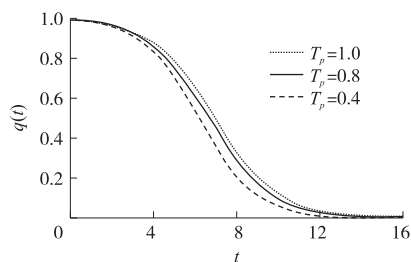
$$\int_0^\infty \tau(t) dt = \int_0^\infty \frac{r(t)}{K(t)} dt \geq \int_0^\infty \frac{r^L}{K^M} dt = \infty,$$

那么引理 1 中条件(2)成立. 由于

$$F(s, 0) = r(s) - m e^{-\delta(s-nT_p)} q(t) \leq r^L,$$

所以,

$$\exp\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p+l} F(s, 0) ds\right) = \exp\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p+l} (r(s) - m \exp(-\delta(s-nT_p)) q(s)) ds\right) =$$



其它参数取为 $q_0 = 0.99; m = 0.8; \delta = 0.2$.

图 1 易感害虫所占比例 $q(t)$ 在不同杀虫剂喷洒周期的变化曲线图

Fig. 1 Changing graph of proportion $q(t)$ of sensitive pests in the different period of spraying pesticides

$$\begin{aligned}
 & \exp\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p+l} r(s) ds\right) \exp\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p+l} (-m \exp(-\delta(s-nT_p)) q(s)) ds\right) \leq \\
 & \exp(r^M T_p) \exp\left(\left(\int_{(n-1)T_p+l}^{nT_p} + \int_{nT_p}^{nT_p+l}\right) (-m \exp(-\delta(s-nT_p)) q(s)) ds\right) \leq \\
 & \exp(r^M T_p) \exp\left(\left(\int_{nT_p+l}^{(n+1)T_p} + \int_{nT_p}^{nT_p+l}\right) (-m \exp(-\delta(s-nT_p)) q(s)) ds\right) \leq \\
 & \exp(r^M T_p) \exp\left(\int_{nT_p}^{(n+1)T_p} (-m \exp(-\delta(s-nT_p)) q(s)) ds\right) = \\
 & \exp(r^M T_p) \left(\frac{q(nT_p) \exp\left(\frac{m}{\delta} \exp(-\delta T_p)\right) + (1-q(nT_p)) \exp\left(\frac{m}{\delta}\right)}{\exp\left(\frac{m}{\delta}\right)} \right) = R_0(n, T_p),
 \end{aligned}$$

那么引理 1 中条件(3)成立.

因此,系统(3)以 $x(0)=x_0$ 为初值的任意解 $x(t)$,当 $t \rightarrow \infty$ 时 $x(t) \rightarrow 0$. 证毕.

由定理 1 知,当 $R_0(n, T_p) < 1$ 时,害虫种群最终灭绝. 从 $R_0(n, T_p)$ 的表达式可以看出,临界值 $R_0(n, T_p)$ 是关于杀虫剂喷洒次数 n 的连续函数,说明害虫灭绝的临界条件 $R_0(n, T_p)$ 不是一个常数,而是一个动态值,它依赖于杀虫剂喷洒次数 n . 图 2(a) 给出了临界值 $R_0(n, T_p)$ 在不同杀虫剂喷洒周期作用下与杀虫剂喷洒次数的关系曲线图,可以看出 $R_0(n, T_p)$ 随着杀虫剂喷洒次数 n 的增大而增大,也就是当杀虫剂喷洒一定的次数后临界值 $R_0(n, T_p)$ 将会大于 1,这说明长期且单一的使用同一种杀虫剂会使害虫对其产生抗药性,害虫种群最终将持续生存而不会灭绝. 图 2(a) 中取 $T_p=0.4$ 时,杀虫剂喷洒 7 次后从第 8 次开始临界值 $R_0(n, T_p)$ 大于 1;取 $T_p=0.8$ 时,杀虫剂喷洒 3 次后从第 4 次开始临界值 $R_0(n, T_p)$ 大于 1;取 $T_p=1$ 时,杀虫剂喷洒 2 次后从第 3 次开始临界值 $R_0(n, T_p)$ 大于 1. 图 2(b) 中相应给出 $T_p=0.4, 0.8, 1$ 时,害虫种群数量 $x(t)$ 的变化曲线图,可以看出最终害虫种群重新爆发. 图 2(b) 还可以看出杀虫剂喷洒周期越短 (即杀虫剂喷洒频率越快),最初害虫种群数量下降速度越快,治理效果越好. 但当害虫种群数量达到最低以后 (即 $R_0(n, T_p) = 1$ 时),杀虫剂喷洒频率越快害虫种群数量重新爆发的速度越快,说明杀虫剂喷洒频率越快害虫对杀虫剂产生抗药性越快.

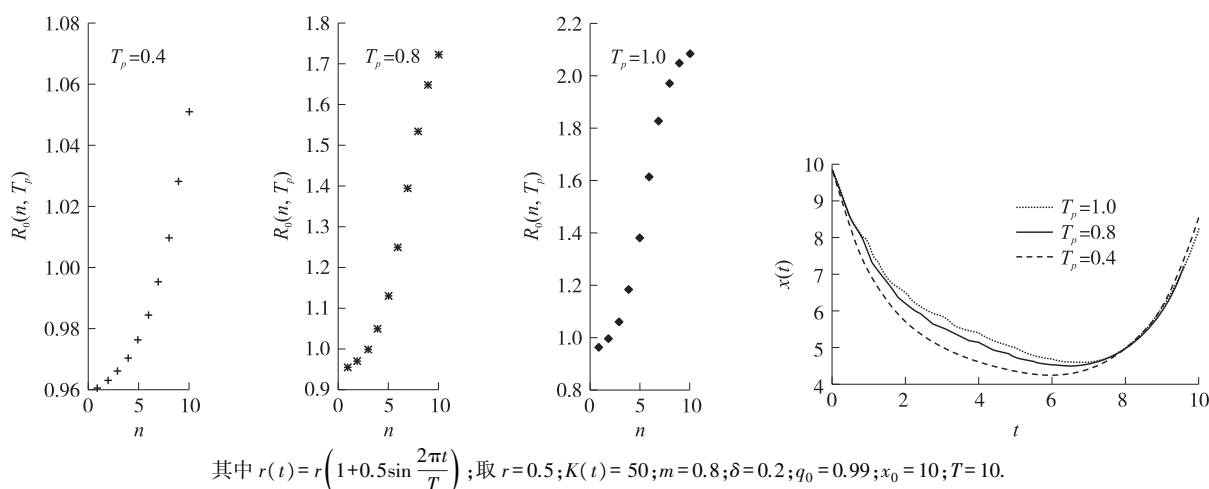


图 2 (a) $R_0(n, T_p)$ 与杀虫剂喷洒次数的关系曲线图; (b) 害虫种群数量 $x(t)$ 在不同杀虫剂喷洒周期下的变化曲线图

Fig. 2 (a) Relationship graphs between $R_0(n, T_p)$ and frequency of spraying pesticides;

(b) Changing graph of pest population $x(t)$ in the different period of spraying pesticides

3 切换杀虫剂策略

由图 2 容易看出,当 $R_0(n, T_p) < 1$ 时,害虫种群下降,一旦临界值 $R_0(n, T_p)$ 达到 1,害虫种群数量将以更快的速度重新爆发,此时就要考虑替换杀虫剂. 记临界值 $R_0(n, T_p)$ 首次超过 1 的杀虫剂喷洒次数为 n_0 ,那么

我们以临界值条件为杀虫剂切换依据,每种杀虫剂从 n_0+1 次开始被替换为另一种杀虫剂. 令 $R_0(n, T_p) = 1$, 求解可得

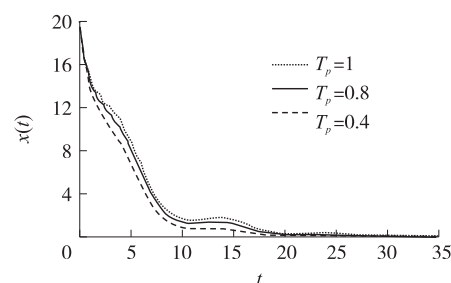
$$n_0 = \left\lceil \frac{\delta}{m(1-\exp(-\delta T_p))} \ln \frac{q(0) \left(\exp\left(-\frac{m}{\delta}(1-\exp(-\delta T_p))\right) - \exp(-r^M T_p) \right)}{(1-q(0))(\exp(-r^M T_p)-1)} \right\rceil,$$

这里 $[b]$ 表示不超过 b 的最大正整数.

图 3 表明 $T_p=0.4$ 时,杀虫剂喷洒 7 次后从第 8 次开始替换另一种杀虫剂; $T_p=0.8$ 时,杀虫剂喷洒 3 次后从第 4 次开始替换另一种杀虫剂; $T_p=1$ 时,第一种杀虫剂喷洒 2 次后从第 3 次开始替换另一种杀虫剂,我们通过几次替换杀虫剂,最终害虫种群灭绝,害虫治理问题得到解决.

4 结论

本文首次提出并建立了在杀虫剂作用函数影响下的具有抗性发展的非自治单种群害虫治理模型,研究害虫抗药性发展对害虫控制的影响,在理论上,得到了害虫灭绝的临界条件,当 $R_0(n, T_p) < 1$ 时害虫种群灭绝. 由于害虫对杀虫剂产生抗药性,本文采取以临界条件 $R_0(n, T_p)$ 为依据提出替换杀虫剂策略,得到在第 n_0+1 次开始替换另一种杀虫剂,几次替换后可以实现害虫灭绝的目的. 为了延缓害虫抗药性的发展,我们还可以采用以杀虫剂效用为依据,当杀虫剂效用降低到一定程度时替换另一种杀虫剂;以经济危害水平为依据的杀虫剂替换策略,这方面的工作我们将在以后的研究中给出相应的结论. 在本文中我们没有考虑由于多种杀虫剂高频率的使用将导致害虫多重抗药性的发展,因此,在以后的研究中我们将建立更有效的非自治的害虫综合治理模型.



其中 $r(t) = r \left(1 + 0.5 \sin \frac{2\pi t}{T} \right)$; 取 $r = 0.5$;
 $K(t) = 50; m = 0.8; \delta = 0.2; q_0 = 0.99; x_0 = 20; T = 10$.

图 3 切换杀虫剂对害虫种群数量的影响

Fig. 3 Effect on switching pesticides on pest population

[参考文献]

- [1] LU Z H, CHI X B, CHEN L S. Impulsive control strategies in biological control of pesticide[J]. Theoretical population biology, 2003, 64(1): 39-47.
- [2] LIU X N, CHEN L S. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator[J]. Chaos, solitons and fractals, 2003, 16(2): 311-320.
- [3] LIU B, ZHANG Y J, CHEN L S. Dynamic complexities in a Lotka-Volterra predator-prey model concerning impulsive control strategy[J]. Int J Bifurcat Chaos, 2005, 15(2): 517-531.
- [4] LI C T, TANG S Y. The effects of pulse spraying and releasing periods dynamics of generalized predator-prey model[J]. International journal of biomathematics, 2012, 5(1): 1250012.
- [5] 韩静光, 刘兵, 王洪娇. 具有抗性发展和轮换使用杀虫剂的综合害虫治理模型的动力学性质[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2015, 28(1): 1-3.
- [6] 王定丽, 刘兵, 康宝林. 基于杀虫剂作用函数的一类生育脉冲害虫治理模型的研究[J]. 生物数学学报, 2017, 32(1): 84-88.
- [7] 梁菊花. 基于综合害虫治理策略的混合模型研究[D]. 西安: 陕西师范大学, 2013.
- [8] 康宝林. 基于脉冲微分方程的害虫治理策略研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2016.
- [9] 吴文. 周期环境和综合控制策略对害虫控制影响的研究[D]. 西安: 陕西师范大学, 2011.
- [10] 顾云开, 刘兵, 刘万波. 杀虫剂函数影响下非自治周期害虫综合治理模型的研究[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2017, 30(1): 9-12.
- [11] VANCE R R, CODDINGTON E A. A nonautonomous model of population growth[J]. Journal of mathematical biology, 1989, 2: 340-367.

[责任编辑: 陆炳新]